# Matematinė analizė. Rudens semestro pratybų medžiaga

Jurgita Markevičiūtė, Vaidotas Zemlys

2009 m. gruodžio 10 d.

## Turinys

# 1 Pirmoji grupė uždavinių

## 1.1 1-2 paskaita

Rugsėjo 4, 7, 8 d.

1. Kuris iš teiginių *(a)* ir *(b)* yra tautologija
   (a) $[(A \Rightarrow B) \vee A] \Rightarrow B$,
   (b) $[(A \Rightarrow B) \wedge B] \Rightarrow A$.
2. Tegul $A$ ir $B$ yra teiginiai. Įrodyti, kad teisingos sudėtinių teiginių formos:
   (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ (tiesioginis);
   (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$ (kontrapozicijos);
   (c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ([A \wedge (\neg B)] \Rightarrow [C \wedge (\neg C)])$ bet kuriam teiginiui $C$ (prieštaros);
   (d) $[\neg(A \Rightarrow B)] \Leftrightarrow [A \wedge (\neg B)]$ (kontrpavyzdys).
3. Paprastame teiginyje yra vienas veiksmažodis. Sudėtiniame teiginyje būna keli veiksmažodžiai, taigi keli paprasti teiginiai. Kiekviename sudėtiniame teiginyje raskite paprastus teiginius, priskirkite jiems raides ir perrašykite sudėtinius teiginius loginiais simboliais. Pirma užduotis yra išspręsta kaip pavyzdys.
   (a) Jei $\underbrace{x > 0,}_{A}$ arba $\underbrace{x < 0,}_{B}$ tai $\underbrace{x^2 > 0}_{C}$ $\quad (A \vee B) \Rightarrow C$
   (b) Jei $a < b$ ir $c$ yra teigiamas, tai $ac < bc$
   (c) Tam, kad $q$ būtų racionalus, pakanka, kad $q$ dešimtainės trupmenos išraiška būtų baigtinė.
   (d) Sveikas skaičius $n$ yra lyginis, tada ir tik tada, kai $n$ padalijus iš 2 liekana yra nulis.
   (e) Tegu $n$ ir $m$ yra sveiki skaičiai ir $n + m$ yra lyginis. Tada arba $n$ ir $m$ abu kartu yra lyginiai arba $n$ ir $m$ abu kartu yra nelyginiai
   (f) $n$ lyginis yra būtina sąlyga, kad $n^2$ būtų lyginis.
   (g) Tam kad $n$ būtų lyginis yra būtina, kad $n^2$ būtų nelyginis.
4. Paneikite šiuos teiginius. Užrašykite ir simboline išraiška ir aiškia, suprantama kalba.
   (a) Jei $n$ yra lyginis natūrinis skaičius, tai ir $n^2$ yra lyginis natūrinis skaičius
   (b) Realus skaičius $x(x-1)$ yra teigiamas kai $x > 1$
   (c) Jei realaus skaičiaus kvadratas yra 2, tai šis skaičius nėra racionalusis.
   (d) Jei $y > 0$, tai $xy < zy \Rightarrow x < z$
5. Pavyzdžiuose *(a)–(f)* nustatyti, kas yra kintamasis $x$, kokia jo kitimo sritis ir kokia savybė $S(x)$. Naudojantis pirmuoju pavyzdžiu, kitiems pavyzdžiams panaudoti simbolinę išraišką. Kuris pavyzdys nėra teiginys? Pavyzdžiams, kurie yra teiginiai, nustatyti teisingumo reikšmę:
   (a) visiems realiesiems skaičiams $r$, $r^2 \geq 0$ (simboliškai $\forall r \in \mathbb{R}$, $r^2 \geq 0$);
   (b) visiems natūraliesiems skaičiams $n$, $n-1$ yra natūralusis skaičius;
   (c) visiems skaičiams, jei $p \in A$ yra pirminis, tai $p \in B$;
   (d) egzistuoja racionalusis skaičius $q$, kurio kvadratas yra 2;
   (e) egzistuoja sveikasis skaičius, prie kurio pridėjus 3, gauname $-1$;
   (f) kiekvienam realiajama skaičiui $r$ egzistuoja realusis skaičius $s$, kad $rs = 1$.
6. Performuluoti pavyzdžius *(a)–(e)* atskiriant kvantorius. Nustatyti teiginių teisingumą:
   (a) kiekvienam teigiamam skaičiui $x$, ir kiekvienam teigiamam skaičiui $y$, galioja $y^2 = x$;
   (b) egzistuoja teigiamas skaičius $x$ toks, kad kiekvienam teigiamam skaičiui $y$ galioja $y^2 = x$;
   (c) egzistuoja teigiamas skaičius $x$ ir egzistuoja teigiamas skaičius $y$ tokie, kad galioja $y^2 = x$;

(d) kiekvienam teigiamam skaičiui $y$ egzistuoja teigiamas skaičius $x$ toks, kad galioja $y^2 = x$;

(e) egzistuoja teigiamas skaičius $y$ toks, kad kiekvienam teigiamam skaičiui $x$ galioja $y^2 = x$.

7. Paneikite šiuos teiginius. Užrašykite ir simboline išraiška ir aiškia, suprantama kalba.

   (a) Kiekvienas realus skaičius $x$ tenkina $f(x) \geq f(0)$

   (b) $\sin t = \cos t$, kokiam nors kampui $t$.

   (c) Kiekvienam teigiamam $x$ galima rasti tokį teigiamą $y$, kad $xy < 0.001$

   (d) Kiekvienam $\epsilon > 0$ galima rasti tokį $\delta > 0$, kad jei $|x - y| < \delta$, tai $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

   (e) Tam tikrai funkcijai $f$, $f(x)$ neviršija 1 visiems $x$.

8. Tarkime, kad realūs skaičiai $a$, $b$, $c$ ir $d$ yra tokie, kad $a = b$ ir $c = d$. Naudojantis lygybės aksiomomis įrodyti, kad $a + d = b + c$.

**ND 1.1** *Parodyti, kad yra teisingos sudėtinių teiginių formos:*

*1.* $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

*2.* $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

**ND 1.2** *Pasinaudodami savo žiniomis apie realius skaičius nustatykite kurie iš šių teiginių yra teisingi, o kurie klaidingi.*

*1.* $\forall x,\ \exists y \ni x + y = 0$

*2.* $\forall x,\ \forall y, x + y = 0$

*3.* $\exists x \ni \forall y, x + y = 0$

*4.* $\exists x, \exists y \ni x + y = 0$

### 1.2 3-4 paskaita

Rugsėjo 11, 14, 15 d.

1. Aprašykite aibes išvardindami jų elementus
   (a) Realieji skaičiai tenkinantys lygtį $x^2 - 1 = 0$
   (b) Realieji skaičiai tenkinantys lygtį $x^2 + 1 = 0$
   (c) Sveikieji skaičiai tarp $-3$ ir 4 imtinai.
   (d) Natūralieji skaičiai
   (e) Lyginiai skaičiai.
   (f) Lygčių sistemos sprendiniai

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Kurios aibės praeitoje užduotyje yra kitų aibių poaibiai?
3. Aibės $X$ ir $Y$ yra lygios, jei $X \subset Y$ ir $Y \subset X$. Parodyti, kad taip apibrėžtai aibių lygybei galioja refleksyvumo, simetriškumo ir tranzityvumo aksiomos.
4. Tegul $X$, $Y$ ir $Z$ yra aibės. Įrodyti, kad $Z \cap (X \cup Y) = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$.
5. Tegul $X$ ir $Y$ yra aibės. Įrodyti: jei $X \subset Y$, tai $X = Y \backslash (Y \backslash X)$.
6. Tegul $X$ yra aibė ir $\simeq$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis aibėje $X$. Įrodyti:
   (a) $[x] \subset X$, kiekvienam $x \in X$. (Čia $[x]$ yra ekivalentumo klasė, $[x] := \{y \in X, y \simeq x\}$).
   (b) $x \in [x]$ kiekvienam $x \in X$.
7. Tegul $\mathbb{N}$ yra natūraliųjų skaičių aibė. Dekarto sandaugoje $X := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ apibrėžkime binarųjį sąryšį $\simeq_Z$ bet kuriems $(k, n) \in X$ ir $(p, q) \in X$, sakydami, kad $(k, n) \simeq_Z (p, q)$, jei $k+q = p+n$. Parodykite, kad taip apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $X$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis.
8. Tegu sąryšis $\simeq$ aibėje $\mathbb{R}$ yra apibrėžiamas taip: $x \simeq y$ tada ir tik tada, jei $x - y \in \mathbb{Z}$. Įrodykite, kad $\simeq$ yra ekvivalentumo sąryšis. Kokia yra 1 ekvivalentumo klasė? $\frac{2}{3}$?

**ND 1.3** *Tegu $X$ ir $Y$ yra aibės. Įrodyti, kad* $(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$

**ND 1.4** *Tegul $\mathbb{Z}$ yra sveikųjų skaičių aibė ir $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z} \backslash \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Dekarto sandaugoje $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ apibrėžkime binarųjį sąryšį $\simeq_Q$ bet kuriems $(a, b) \in X$ ir $(c, d) \in X$ sakydami, kad $(a, b) \simeq_Q (c, d)$, jei $ad = bc$. Parodykite, kad taip apibrėžtas binarusis sąryšis aibėje $X$ yra ekvivalentumo binarusis sąryšis.*

### 1.3 5-6 paskaita

Rugsėjo 18, 21, 22 d.

1. Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kaip $f(x) = x^2$. Taip pat apibrėžkime $\mathbb{R}$ intervalus

$$A = [0, 1] \quad B = [-1, 2] \quad C = [-3, 0]$$

   (a) Kokia yra $f$ apibrėžimo sritis?
   (b) Kokia yra $f$ reikšmių sritis?
   (c) Ar $f$ yra bijekcija? Paaiškinkite.
   (d) Ar $f$ yra siurjekcija? Paaiškinkite
   (e) Raskite $f[A]$, $f[B]$ ir $f[C]$.
   (f) Raskite $f^{-1}[A]$, $f^{-1}[B]$ ir $f^{-1}[C]$.

2. Įrodyti, kad funkcija $f : X \to Y$ yra injekcija tada ir tik tada, kai bet kuriems $x, y \in X$ iš $x \neq y$ išplaukia $f(x) \neq f(y)$.

3. Tegu $f, \tilde{f} : X \to Y$ ir $g, \tilde{g} : Y \to Z$.
   (a) Įrodyti: jei $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ ir $g$ yra injekcija, tai $f = \tilde{f}$. Ar šis teiginys teisingas, jei $g$ nėra injekcija?
   (b) Įrodyti: jei $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ ir $f$ siurjekcija, tai $g = \tilde{g}$. Ar šis teiginys teisingas, jei $f$ nėra siurjekcija?

4. Tegu funkcija $f : X \to Y$ yra bijekcija ir $f^{-1} : Y \to X$ yra atvirkštinė funkcijai $f$.
   (a) Įrodyti, kad $f^{-1}(f(x)) = x$ kiekvienam $x \in X$.
   (b) Įrodyti, kad $f(f^{-1}(y)) = y$ kiekvienam $y \in Y$.
   (c) Ar funkcija $f^{-1}$ turi atvirkštinę ir jei taip rasti ją.

5. Tegu $X$ yra aibės $Y$ poaibis ir tegul $I_{X\to Y} : X \to Y$ yra funkcija, įgyjanti reikšmes $I_{X\to Y}(x) := x$ kiekvienam $x \in X$, ir vadinama aibės $X$ *įdėjimu* į aibę $Y$. Kai $Y = X$, tai funkcija $I_{X\to X}$ vadinama *tapatingu atvaizdavimu* aibėje $X$. Įrodyti teiginius:
   (a) jei $X \subset Y \subset Z$, tai kompozicija $I_{Y\to Z} \circ I_{X\to Y} = I_{X\to Z}$.
   (b) jei $f : X \to Y$ yra funkcija, tai $f = f \circ I_{X\to X} = I_{Y\to Y} \circ f$.
   (c) jei funkcija $f : X \to Y$ yra bijekcija, tai $f \circ f^{-1} = I_{Y\to Y}$ ir $f^{-1} \circ f = I_{X\to X}$.

6. Tegul $f : X \to Y$. Įrodyti: $f$ yra bijekcija tada ir tik tada, kai lygybė $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ galioja bet kurioms aibėms $A \subset X$ ir $B \subset X$.

7. Tegul funkcijos $f : X \to Y$ ir $g : Y \to Z$ yra bijekcijos. Įrodyti, kad kompozicija $g \circ f$ yra bijekcija ir jos atvirkštinės funkcija $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8. Įrodyti, kad $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$.

**ND 1.5** *Kada tuščioji funkcija $f : \varnothing \to Y$ yra injekcija? siurjekcija? bijekcija?*

**ND 1.6** *Tegu $f : X \to Y$ ir $g : Y \to Z$. Įrodyti: jei $g \circ f$ yra injekcija, tai $f$ yra injekcija. Ar šiuo atveju $g$ privalo būti injekcija? Įrodyti: jei $g \circ f$ yra siurjekcija, tai $g$ yra siurjekcija. Ar šiuo atveju $f$ privalo būti siurjekcija?*

**ND 1.7** *Su bet kuria funkcija $f : X \to Y$, jos grafikas yra aibė $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Įrodyti, kad dvi funkcijos $f : X \to Y$ ir $f' : X \to Y$ lygios tada ir tik tada, kai $G(f) = G(f')$.*

## 1.4 7-8 paskaita

1. Sugalvokite kiekvienai iš šių aibių priegaugio operaciją ir nustatykite kurias Peano aksiomas šios aibės tenkina, o kurių ne.

   (a) $\varnothing$
   (b) $\{1\}$
   (c) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
   (d) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$
   (e) $\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, \dots\}$
   (f) $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 1\}$
   (g) $[1, \infty)$

2. Įrodyti lygybę, pasinaudojant apibrėžimu $2 + 2 = 4$;

3. Tegu, $n$ ir $m$ natūralieji skaičiai. Įrodyti, kad

$$n \cdot m = m \cdot n$$

   Pagalbiniai faktai:

   (a) Irodyti, kad $0 \cdot m = 0$.
   (b) Įrodyti, kad $(m++) \cdot n = m \cdot n + n$

4. Tegu $n$ yra teigiamas natūralusis skaičius. Įrodykite, kad egzistuoja toks vienintelis natūralusis skaičius $m$, kad $m++ = n$.

5. Įrodykite, kad natūraliesiems skaičiams $n$, $m$, ir $k$ galioja savybės:

   (a) $n \geq n$
   (b) jei $n \geq m$ ir $m \geq k$, tai $n \geq k$
   (c) jei $n \geq m$ ir $m \geq n$, tai $n = m$
   (d) jei $n \geq m$, tai $n + k \geq m + k$
   (e) jei $n < m$ ir $l \in \mathbb{N}$ yra teigiamas, tai $n \cdot l < m \cdot l$
   (f) $n < m$ tada ir tik tada, kai $m = n + l$ su kuriuo nors teigiamu natūraliuoju skaičiumi $l$
   (g) $n < m$ tada ir tik tada, kai $n++ \leq m$

6. Įrodyti tapatybę $(m + n)^2 = m^2 + 2m \cdot n + n^2$, bet kuriems $n, m \in \mathbb{N}$.

7. Tegul $a, b, c \in \mathbb{N}$ ir $a = b$. Įrodyti, kad $a + c = b + c$.

8. Tegu $x \in \mathbb{N}$ ir $y \in \mathbb{N}$ yra teigiami. Tada egzistuoja tokie $n \in \mathbb{N}$ ir $m \in \mathbb{N}$, kad

$$x = ny + m \text{ ir } 0 \leq m < y.$$

   Parodyti, kad $n$ ir $m$ yra vieninteliai skaičiai tenkinantys šią lygybę.

**ND 1.8** *Įrodyti lygybę, pasinaudojant apibrėžimu:* $2 \cdot 2 = 4$.

**ND 1.9** *Tegu* $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{N}$. *Įrodyti, jei* $a = b$ *ir* $c = d$, *tai* $a + c = b + d$.

**ND 1.10** *Įrodyti, jog visiems* $k, n, m \in \mathbb{N}$, *jei* $k < n$ *ir* $n < m$, *tai* $k < m$

# 2 Antroji grupė uždavinių

## 2.1 9-10 paskaita

Spalio 2, 5, 6 d.

1. Įrodyti, kad funkcija $I_N : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ su reikšmėmis $I_N(m) = [(m, 0)]_Z$, $m \in \mathbb{N}$ yra injekcija.
2. Įrodyti sveikiesiems skaičiams $n$ ir $m$, kad griežta nelygybė $n > m$ galioja tada ir tik tada, kai $n \geq m + 1$.
3. Įrodyti, kad $(-1) \cdot (-1) = 1$.
4. Tegul $a$ ir $b$ yra tokie sveikieji skaičiai, kad $ab = 0$. Įrodyti, kad tada arba $a = 0$ arba $b = 0$ (arba abu kartu).
5. Tegul $q$ yra racionalusis skaičius. Įrodyti, kad galioja lygiai viena iš trijų alternatyvų:
   (a) $q$ yra teigiamas racionalusis skaičius;
   (b) $q$ yra nulis;
   (c) $q$ yra neigiamas racionalusis skaičius.
6. Tegul $q$ ir $r$ yra racionalūs skaičiai. Įrodyti,
   (a) $|q| \geq 0$;
   (b) $|q| = 0$ tada ir tik tada, kai $q = 0$;
   (c) $|q \cdot r| = |q| \cdot |r|$;
   (d) $|q + r| \leq |q| + |r|$.
7. Tegu $q$ racionalusis skaičius. Įrodyti, kad egzistuoja vienintelis sveikasis skaičius $n$, kad $n \leq q < n + 1$.
8. Tegu $q, r \in \mathbb{Q}$ ir $q < r$. Įrodyti, kad egzistuoja toks $p \in \mathbb{Q}$, kad $q < p < r$.

**ND 2.1** *Tegul $q, r \in \mathbb{Q}$ ir $n, m \in \mathbb{N}$. Įrodyti (naudojant indukciją)*

1. $q^n \cdot q^m = q^{n+m}$, $(q^n)^m = q^{nm}$ *ir* $(qr)^n = q^n \cdot r^n$;
2. $q^n = 0$ *tada ir tik tada, kai* $q = 0$;
3. *jei* $q \geq r \geq 0$, *tai* $q^n \geq r^n \geq 0$;
4. *jei* $q > r \geq 0$ *ir* $n > 0$, *tai* $q^n > r^n \geq 0$;
5. $|q^n| = |q|^n$.

### 2.2 11-12 paskaita

Spalio 9, 12, 13 d.

1. Suformuluoti ką reiškia, kad racionaliųjų skaičių seka $(q_n)$ nėra *Cauchy* seka. , t. y. loginiais kvantoriais išreikšti teiginį „$(q_n)$ nėra *Cauchy* seka“.
2. Įrodyti: jei *Cauchy* sekos $(r_n)$ ir $(s_n)$ yra atskirtos nuo nulio ir $(r_n) \simeq_R (s_n)$, tai $(r_n^{-1}) \simeq_R (s_n^{-1})$.
3. Įrodyti, kad jei $t$ ir $s$ yra teigiami realieji skaičiai ir jei $t > s$, tai $t^{-1} < s^{-1}$.
4. Įrodyti, kad su kiekvienu teigiamu realiuoju skaičiumi $t$ egzistuoja toks natūralusis skaičius $N$, kad $t > 1/N > 0$.
5. Įrodyti, kad bet kuri realiųjų skaičių aibė gali turėti ne daugiau kaip vieną mažiausią viršutinį rėžį.
6. Tegul $M$ yra realiųjų skaičių aibės $A$ mažiausias viršutinis rėžis. Įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in A$, kad $x > M - \varepsilon$.
7. Tegul $A$ yra realiųjų skaičių aibė, o $-A := \{-x : x \in A\}$. Įrodyti: jei $M$ yra aibės $-A$ mažiausias viršutinis rėžis, tai $-M$ yra aibės $A$ didžiausias apatinis rėžis.
8. Tegul $r$ yra realusis skaičius. Įrodyti, kad $|r| = (r^2)^{1/2}$.

**ND 2.2** *Tarkime, kad $x$ yra realusis skaičius ir $(a_n)$ yra racionaliųjų skaičių Cauchy seka. Įrodyti: jei $x \leq a_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, tai $x \leq LIM(a_n)$. Taip pat įrodyti, kad $x \geq LIM(a_n)$, jei $x \geq a_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Nuoroda: jei taip nėra, tai galima rasti racionalųjį skaičių tarp dviejų realiųjų.*

**ND 2.3** *Tegul $D$ yra realiųjų skaičių aibės $A$ didžiausias apatinis rėžis. Įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in A$, kad $x < D + \varepsilon$.*

**ND 2.4** *Tegu $A$ ir $B$ yra netuščios ir aprėžtos realiųjų skaičių aibės. Tegul $C := \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Įrodyti, kad* $\sup C = \sup A + \sup B$

### 2.3 13-14 paskaita

Spalio 16, 19, 20 d.

1. Įrodyti, kad $\binom{n}{j} \leq 2(n/2)^j$, bet kuriems $1 \leq j \leq n$.
2. Tegul realusis skaičius $x \geq -1$ ir $n$ yra teigiamas natūralusis skaičius. Įrodyti, kad $(1+x)^n \geq 1+nx$.
3. Tegul $x, y \in \mathbb{R}$ ir $n \in \mathbb{N}_+$. Įrodyti, kad
$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}$$
4. Tegul $x$, $y$ yra realieji skaičiai, o realusis skaičius $\varepsilon > 0$, Įrodyti, kad $\rho(x,y) < \varepsilon$ tada ir tik tada, kai $y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$. Taip pat įrodyti, kad $\rho(x,y) \leq \varepsilon$ tada ir tik tada, kai $y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$.
5. Įrodyti, kad kiekviena realiųjų skaičių *Cauchy seka* yra aprėžta.
6. Tegu $(r_n)$ yra realiųjų skaičių seka ir $r \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $k \in \mathbb{N}_+$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\rho(r_n, r) < 1/k$ kiekvienam $n \geq N$.
7. Tarkime, kad realiųjų skaičių seka $(r_n)$ konverguoja į realųjį skaičių $r$, tokį kad $r \neq 0$. Įrodyti, kad egzistuoja toks $N \geq m$, kad $|r_n| \geq |r|/2$ kiekvienam $n \geq N$.
8. Tarkime, kad teigiamų realiųjų skaičių seka $(r_n)$ konverguoja į teigiamą skaičių $r$. Įrodyti, kad seka $(\sqrt{r_n})$ konverguoja į $\sqrt{r}$.

**ND 2.5** *Tegul realusis skaičius $r > 0$ ir $n$ yra teigiamas natūralusis skaičius. Įrodyti, kad lygtis $x^n = r$ atžvilgiu $x$ turi vienintelį sprendinį tarp visų teigiamų realiųjų skaičių.*

**ND 2.6** *Tarkime, kad realiųjų skaičių aibė $A$ turi viršutinį rėžį $M$ ir egzistuoja tokia iš aibės $A$ elementų sudaryta seka $(x_n)$, kad $x_n \to M$, kai $n \to \infty$. Įrodyti, kad $M$ yra aibės $A$ mažiausias viršutinis rėžis.*

**ND 2.7** *Įrodyti: jei skaičių seka $(r_n)$ konverguoja į $r$ ir $|r_n| \leq C$ visiems pakankamai dideliems $n$, tai $|r| \leq C$*

**ND 2.8** *Tegu realiųjų skaičių sekos $(r_n)$ ir $(s_n)$ konverguoja atitinkamai į realiuosius skaičius $r$ ir $s$. Įrodyti, kad seka $(\min\{r_n, s_n\}$ konverguoja į $\min\{r, s\}$.*

## 2.4 15-16 paskaita

Spalio 23, 26, 27 d.

1. Tegul $r_n := 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodyti, kad $\sup_{n\in\mathbb{N}} r_n = 1$ ir $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$.
2. Tegul $a$ yra teigiamas realusis skaičius. Parodyti, kad $\lim a^{1/n} = 1$. (Pasinaudoti tuo, kad $a = (1 + (a^{1/n} - 1))^n$, bei Niutono binomo formule).
3. Parodyti, kad $\lim n^{1/n} = 1$. (Pasinaudoti tuo, kad $n = (1 + (n^{1/n} - 1))^n$, bei Niutono binomo formule).
4. Pateikite pavyzdį sekos, kuri turi lygiai du ribinius taškus.
5. Tegul seka $(a_n)$ yra aprėžta iš viršaus. Įrodyti, kad šios sekos ribinių taškų aibė yra aprėžta iš viršaus.
6. Pateikite pavyzdį neaprėžtos sekos, kuri turi lygiai vieną ribinį tašką.
7. Tegu $(r_n)$ yra nemažėjanti realiųjų skaičių seka ir tegu ji turi ribinį tašką. Įrodyti, kad $(r_n)$ konverguoja.
8. Pateikite pavyzdį tokių aprėžtų sekų $(r_n)$ ir $(s_n)$, kad

$$\limsup_{n\to\infty}(r_n + s_n) = 0 \quad \text{ir} \quad \limsup_{n\to\infty} r_n = \limsup_{n\to\infty} s_n = 1.$$

# 3 Trečioji grupė uždavinių

## 3.1 17-18 paskaita

1. Rasti ribą
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$$
2. Rasti ribą
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$
3. Rasti ribą $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})$.
4. Parodyti, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.
5. Parodyti, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, kai $a>1$.
6. Įrodyti, kad
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$
7. Įrodyti nelygybes:
   (a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
   (b) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.
8. Parodyti, kad seka $x_n=1+1/2+1/3+\cdots+1/n-\ln n$ konverguoja.

**ND 3.1** *Rasti sekų ribas:*

*1.* $n^{1/n^2}$

*2.* $(n^2)^{1/n}$

*3.* $(1+n^2)^{1/n^3}$

*4.* $(1+1/n)^{2/n}$.

**ND 3.2** *Tegul* $r_1=1/2$*, tegul kiti trys nariai yra* $1/4,\ 1/2,\ 3/4$*. Tegul kiti septyni nariai yra* $1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8, 3/4, 7/8$ *ir taip toliau. Rasti visus šios sekos ribinius taškus.*

**ND 3.3** *Rasti ribą:*
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$$

### 3.2 19-20 paskaita

lapkričio 6,9,10 d.

1. Tegu $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ or $\sum_{i=m}^{\infty} b_i$ yra neneigiamų skaičių eilutės ir tegul egzistuoja riba $L = \lim_{i\to\infty} a_i/b_i$. Įrodyti:

   (a) jei $L > 0$, tai $\sum_{i\geq m} a_i$ konverguoja tada ir tik tada, kai konverguoja $\sum_{i\geq m} b_i$;

   (b) jei $L = 0$ ir $\sum_{i\geq m} b_i$ konverguoja, tai konverguoja ir $\sum_{i\geq m} a_i$.

2. Tegu $(c_i)$ yra teigiamų skaičių seka. Įrodyti, kad
$$\liminf_{i\to\infty} \frac{c_{i+1}}{c_i} \leq \liminf_{i\to\infty} c_i^{1/i}.$$

3. Įrodyti, kad diverguoja eilutė $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$.

4. Tegul skaičių eilutė $\sum_{i\geq m} a_i$ konverguoja absoliučiai ir tegul $(b_i)$ yra aprėžta skaičių seka. Įrodyti, kad eilutė $\sum_{i\geq m} a_i b_i$ konverguoja absoliučiai.

5. Parodyti, kad eilutė $\sum_{i\geq 1} 2^{-i}\sin(\frac{3\pi}{5}i)$ konverguoja.

6. Parodyti, kad eilutė
$$\sum_{n=1} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1 + x^2 + \cos^2 k\alpha},$$
čia $x \neq 0$, o $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguoja. (Taikyti D'Alembert eilučių konvergavimo požymį).

7. Parodyti, kad eilutė
$$\sum_{n=2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$
konverguoja. (Taikyti Cauchy eilučių konvergavimo požymį).

8. Tegul neneigiamų skaičių eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguoja. Pateikti pavyzdį rodantį, kad eilutė $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i}$ diverguoja ir įrodyti, kad $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_i}/i$ konverguoja. *Nuoroda: naudokitės nelygybe* $xy \leq (x^2+y^2)/2$.

**ND 3.4** *Įrodykite, kad eilutė* $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3i+1}$ *diverguoja.*

**ND 3.5** *Ištirkite eilutės* $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \ldots$ *konvergavimą.* Nuoroda: pasinaudokite tuo, kad $\sqrt{2} = 2\cos\pi/4$, bei tuo, kad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

**ND 3.6** *Ištirkite eilutės* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n!}\cos n^n$ *konvergavimą.*

### 3.3 21-22 paskaita

lapkričio 12,16,17

1. Ar eilutė
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$$
konverguoja?

2. Parodyti, kad eilutė $\sum a_n$ konverguoja, jei egzistuoja toks $\alpha > 0$, ir toks $N$, kad $-\dfrac{\ln a_n}{\ln n} > 1+\alpha$.

3. Ar konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$?

4. Ar konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, čia $\nu(n)$ yra skaičiaus $n$ skaitmenų skaičius? Naudokitės tuo, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konverguoja.

5. Įrodyti, kad sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra suskaičiuojama.

6. Įrodyti, kad racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra suskaičiuojama

7. Įrodyti, kad intervalai $(0,1)$ ir $(0,\infty)$ yra vienodos galios.

8. Įrodyti, kad bet kurie du uždari intervalai yra vienodos galios.

**ND 3.7** *Įrodyti, kad racionaliųjų skaičių porų aibė $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ yra suskaičiuojama*

**ND 3.8** *Tegu $X$ yra baigtinė aibė. Įrodyti, kad jei $f : X \to Y$ yra funkcija, tai vaizdas $f[X]$ irgi yra baigtinė aibė ir $|f[X]| \leq |X|$; be to jei $f$ yra injekcija, tai $|f[X]| = |X|$.*

**ND 3.9** *Tegu $X$ yra baigtinė aibė, o $\mathcal{P}(X)$ aibė, kurios elementai yra visi aibės $X$ poaibiai. Parodyti, kad $\mathcal{P}(X)$ yra baigtinė ir kad $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.* (Pasinaudoti Niutono binomo formule).

### 3.4 23-24 paskaita

1. Tegul $a$ ir $b$ yra tokie tiesės taškai, kad $a < b$ ir tegul $x \in (a, b)$. Įrodyti, kad egzistuoja tokia $x$ aplinka $O_\varepsilon(x)$, kuri yra $(a, b)$ poaibis.
2. Įrodyti, kad $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ ir $\bar{\varnothing} = \varnothing$.
3. Tarkime, kad $X$ ir $Y$ yra tokios tiesės taškų aibės, kad $X \subset Y \subset \bar{X}$. Įrodyti, kad $\bar{Y} = \bar{X}$.
4. Tegul $a, b \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad uždaras intervalas $[a, b]$ yra uždara aibė.
5. Tegul $n \in \mathbb{N}_+$ ir tegul $X_1, \ldots, X_n$ yra uždaros tiesės taškų aibės. Įrodyti, kad $\cup_{i=1}^n X_i$ yra uždara aibė.
6. Įrodyti, kad aprėžtos aibės uždarinys yra aprėžta aibė.
7. Įrodyti, kad kiekviena baigtinė tiesės taškų aibė yra uždara ir aprėžta.
8. Įrodyti, kad intervalai $(a, b]$ ir $[a, b)$ yra nei uždaros nei atviros aibės.
9. Tarkime, kad $X$ yra netuščia ir aprėžta iš viršaus tiesės taškų aibė ir tegul $M := \sup X$. Įrodyti, kad $M$ yra $X$ aibės sąlyčio taškas.

# 4 Ketvirtoji grupė uždavinių

## 4.1 25-26 paskaita

1. Tegu $\{X_1, \ldots, X_n\}$ yra atvirų aibių rinkinys. Įrodyti, kad $\cap_{i=1}^n X_i$ yra atvira aibė.
2. Tegu $\mathcal{G}$ yra atvirų aibių rinkinys (baigtinis ar begalinis). Įrodyti, kad $\cup\mathcal{G}$ yra atvira aibė.
3. Sudarykite aibės $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+\}$ atvirąjį denginį, iš kurio neįmanoma išrinkti baigtinio denginio.
4. Tegul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir
$$f(x) = \begin{cases} 2, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -2, x < 0. \end{cases}$$
Parodyti, kad taške 0 funkcijos riba neegzistuoja.
5. Įrodyti, kad jei funkcija $f$ taške $a$ konverguoja į $u$, o funkcija $g$ taške $a$ konverguoja į $v$, tai $fg$ taške $a$ konverguoja į $uv$.
6. Tegu $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Parodyti, kad $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$

   Rasti ribas:
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x+1}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, čia $n \in \mathbb{N}_+$.
10. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

**ND 4.1** *Tegul $a$ ir $b$ yra tokie tiesės taškai, kad $a < b$. Įrodyti, kad* $\overline{(a,b)} = [a,b]$, $\overline{(-\infty,b)} = (\infty,b]$, $\overline{(a,\infty)} = [a,\infty)$

**ND 4.2** *Tegul $I$ yra bet kokia aibė (baigtinė ar begalinė). Tarkime, kad su kiekvienu $i \in I$, $X_i$ yra uždara tiesės taškų aibė. Įrodyti, kad sankirta $\cap_{i\in I}$ yra uždara aibė.*

### 4.2 27-28 paskaita

1. Rasti ribas

   (a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ *(170)*

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ *(172)*

   (c) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$ *(176)*

   (d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ *(186)*

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.*(193)*

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ *(197)*

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\mu-1}{x}$.*(197)*

2. Tegul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ir

$$f(x) = \begin{cases} 0,\, x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1,\, x\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija netolydi kiekviename taške.

3. Tegu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ir

$$f(x) = \begin{cases} 0,\, x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{b},\, x\in\mathbb{Q},\ x=\dfrac{a}{b}, \text{ (neprastinama trupmena)} \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija tolydi iracionaliuose taškuose ir netolydi racionaliuose. *(263)*

4. Tegu funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2, & \text{jei } x\le 0, \\ x^2-2, & \text{jei } 0<x\le 2, \\ x, & \text{jei } x>2. \end{cases}$$

   Rasti funkcijos $f$ tolydumo ir trūkio taškus.

5. Tegu $f(x) := \{x\}$ (skaičiaus trupmeninė dalis). Rasti funkcijos trūkio taškų aibę. *(253)*

6. Tarkime, kad $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ yra tolydi funkcija. Įrodyti, kad egzistuoja tokia tolydi funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, kad $g(x)=f(x)$ kiekvienam $x\in[a,b]$ (tokia funkcija vadinama funkcijos $f$ tolydžiuoju tęsiniu). Įrodykite, kad šis teiginys nėra teisingas bet kuriai tolydžiai funkcijai $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

**ND 4.3**

*Tarkime, kad funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra tolydi ir $c\in\mathbb{R}$ yra toks, kad $f(c)>0$. Įrodyti egzistuojant tokį $\delta$, kad $f(x)>f(c)/2$ kiekvienam $x\in O_\delta(c)$.*

**ND 4.4** *Tegu $a\in\mathbb{R}$ ir $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis*

$$f(x) = \begin{cases} x^2-x+1, & \textit{jei } x\le 1, \\ ax+1, & \textit{jei } x>1. \end{cases}$$

*Kokioms $a$ reikšmėms funkcija $f$ yra tolydi?*

**ND 4.5** *Tarkime, kad $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ yra tokia funkcija, kad*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

*visiems $x,y\in(a,b)$ ir $\lambda\in(0,1)$ (tokia funkcija vadinama iškiliąja). Įrodyti, kad $f$ yra tolydi*

### 4.3 29-30 paskaita

1. Tegul $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ir $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra tolydžios funkcijos. Tarkime, kad $f(0) < g(0)$ ir $f(1) > g(1)$. Įrodyti egzistuojant tokį tašką $c \in (0,1)$, kad $f(c) = g(c)$.
2. Tarkime, kad funkcija $f[0,2] \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir $f(0) = f(2)$. Įrodyti, kad intervale $[0,2]$ egzistuoja tokie skaičiai $a$ ir $b$, kad $a - b = 1$ ir $f(a) = f(b)$.
3. Tarkime, kad $a < b$ ir funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra dalimis monotoninė. Jei $f$ turi vidurinės reikšmės savybę intervale $[a,b]$, tai ji yra tolydi intervale $(a,b)$.
4. Rasti funkcijos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ išvestinę intervalo $(a,b)$ taškuose pagal apibrėžimą, kai:
   (a) $f(x) = r$
   (b) $f(x) = x$
   (c) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (d) $f(x) = \sin x$.
5. Rasti funkcijų išvestines:
   (a) $\dfrac{\ln(\cos(x^2))}{\tan(e^x)}$
   (b) $\dfrac{\exp(\cos(\ln(x^3)))}{\sqrt{|\sin(x)|}}$
   (c) $4\sqrt{\sqrt{x+2}-1} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{\sqrt{x+2}-1}{2}} + 1$
   (d) $\arctan\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 2x}$
   (e) $\sin^2(w\cos\alpha x) + \cos^2(w\sin\alpha x)$
   (f) $\operatorname{ctan}(a\tan(b\arctan(cx)))$
   (g) $\log_a^c\sqrt{\frac{x+1}{x+b}}$
   (h) $\ln^a(\ln^b(\ln^c x))$
   (i) $x^{\sin x} + (\sin x)^x$
   (j) $x^{(\ln x)^x}$
   (k) $x^{x^{x^x}}$
6. Rasti funkcijų išvestines
   (a) $\arcsin\dfrac{1}{|x|}$ *(9)*
   (b) $[x]\sin^2\pi x$ *(9)*

**ND 4.6** *Tarkime, kad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra funkcija, $\alpha \in (0,1]$ ir egzistuoja toks skaičius $C \in \mathbb{R}$, kad*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

*visiems $x, y \in [a,b]$ (tada sakoma, kad funkcijai $f$ galioja Hölderio sąlyga su rodikliu $\alpha$). Įrodyti, kad $f$ yra tolygiai tolydi.*

**ND 4.7** *Pateikti tokį tolygiai tolydžios funkcijos $f$ pavyzdį, kuriai negalioja Hölderio sąlyga su rodikliu* 1. *Nuoroda: nagrinėti funkciją su reikšmėmis $f(x) = \sqrt{x}$.*

**ND 4.8** *Kuriuose taškuose diferencijuojamos funkcijos $|\sin x|$ ir $\sin|x|$?*

**ND 4.9** *Tarkime, kad tolydi funkcija $f : [a,b]$ yra diferencijuojama atvirame intervale $(a,b)$ ir $f'(x) = 0$, kiekvienam $x \in (a,b)$. Įrodyti, kad $f$ yra pastovioji funkcija su vienintele reikšme $r \in \mathbb{R}$, t.y. $f(x) = r$, kiekvienam $x \in [a,b]$.*

**ND 4.10** *Tarkime, kad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $0 \leq f(x) \leq x^2$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad $f$ yra diferencijuojama taške 0 ir $f'(0) = 0$.*