

Pratybų nr. 22 uždaviniai

Gegužės 22 d. – I,II grupei.

1. Tegu X yra euklidinės erdvės \mathbb{R}^p matas poaibis ir $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija. Įrodyti, kad funkcija f yra mati tada ir tik tada, kai aibė

$$\{x \in X : f(x) \geq R\} = f^{-1}[[R, \infty]]$$

yra mati su kiekvienu $r \in \mathbb{R}$.

2. Tegu $X \in \mathbb{R}^p$ yra mati aibė. Parodyti, kad jei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ yra mati funkcija, tai mačios yra funkcijos $|f|$, $\max\{f, 0\}$ ir $\min\{f, 0\}$.
3. Tegu $X \subset \mathbb{R}^p$ yra mati ir (f_n) yra X aibėje apibrėžta ir aprėžta funkcijų seka. Įrodyti, kad jei kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, f_n yra mati, tai funkcija $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ irgi yra mati.
4. Tegu f ir g yra paprastos funkcijos. Parodyti, kad fg irgi yra paprasta funkcija.
5. Parodyti, kad funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yra didėjančios paprastų funkcijų sekos (ϕ_n) ribinė funkcija. Rasti $\int_0^2 \phi_n$ ir $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \phi_n$. Ar $\int_0^2 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \phi_n(x)$.