Pratybų nr. 21 uždaviniai

Gegužės 19 d. – II grupei, gegužės 22 d. – I grupei

1. Įrodyti, kad iracionaliųjų skaičių intervale $[0,1]$ aibės *Lebesgue* išorinis matas yra vienas, t.y. $\lambda_1^*([0,1]\backslash\mathbb{Q}) = 1$
2. Tarkime, kad V yra realiųjų skaičių atviras intervalas. Įrodyti, kad
$$\lambda_1^*(V) = \lambda_1^*(V \cap (0,\infty)) + \lambda_1^*(V\backslash(0,\infty))$$
3. Tarkime, kad $u \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$ ir $u \leq v$. Įrodyti, kad lygybė
$$\lambda_d^*(V) = \lambda_d^*(V \cap (u,v)) + \lambda_d^*(V\backslash(u,v))$$
galioja su bet kuriuo atviruoju stačiakampiu V .
4. Įrodyti, kad mačioms aibėms galioja savybės:
   (a) jei $A \subset \mathbb{R}^d$ mati, tai $\mathbb{R}^2\backslash A$ mati.
   (b) jei euklidinės erdvs poaibiai $A_1, \ldots, A_n$ yra matūs, tai aibės $\cup_{i=1}^n A_i$ ir $\cap_{i=1}^n A_i$ yra mačios.
   (c) kiekviena euklidinės erdvės aibė, kurios *Lebesgue* išorinis matas yra nulis, yra mati.
5. Tegu $A_1, A_2, \ldots$ yra bet koks mačiųjų aibių skaitus rinkinys, parodyti, kad jungtis $\cup A_j$ ir sankirta $\cap A_j$ yra mačios aibės.
6. Tegul $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ yra didėjanti euklidinės erdvės mačiųjų aibių seka. Įrodyti, kad
$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$$