Pratybų nr. 18 uždaviniai

Gegužės 8 d. – I-II grupei.

1. Tegu $f \in L(\mathbb{R}^P, \mathbb{R}^q)$ parodyti, kad $D^2 f(u) = 0$, kiekvienam $u \in \mathbb{R}^p$.
2. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis
$$f(r, \phi) = r(\cos\phi, \sin\phi)$$
Parodyti, kad f yra du kartus diferencijuojama ir rasti $D^2 f(u)$ bei $d^2 f(u)(r, \phi)$.
3. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis
$$f(x) = 16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 40x_2, \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
Rasti šios funkcijos ekstremumo taškus ir nustatyti jų tipą.
4. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis
$$f(x) = 2x_2^2 - x_1(x_1 - 1)^2, \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
Įrodyti, kad ši funkcija turi lokalųjį minimumą taške $(1/3, 0)$ ir balno tašką $(1, 0)$.
5. (Tiesinė regresija) Tarkime, kad vektoriai $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$, intepretuojami kaip realių duomenų reikšmės geometrinėje plokštumoje. Šių duomenų *regresijos tiese* vadinama tokia geometrinės plokštumos tiesė, kad vertikalių atstumų tarp duomenų ir tiesės kvadratų suma įgyja mažiausią reikšmę. Tegul $x_1, \ldots, x_n$ nėra visi tarpusavyje lygūs. Įrodyti, kad šios tiesės lygtis $y = c + \lambda x$ turi tokią išraišką:
$$\lambda = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \text{ ir } c = \overline{y} - \lambda\overline{x} = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2},$$
čia naudojami žymėjimai
$$\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,\ \overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i,\ \overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2,\ \overline{xy} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i,$$
6. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$
Tegu $x_1, \ldots, x_n$ yra skaičiai. Apibrėžkime funkciją $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taip:
$$L(a, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$
Įrodyti, kad šios funkcijos ekstremumo taškas yra
$$(\widehat{a}, \widehat{\sigma^2}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2,\right)$$
Parodyti, kad tai funkcija L šiame taške įgyja maksimumą. *Nuoroda.*Pasinaudoti tuo, kad L ir $\log L$ įygja maksimumą tame pačiame taške.