Pratybų nr. 18 uždaviniai

Gegužės 5 d. – II grupei, gegužės 8 d. - I grupei

1. Tegul $p > 0$ ir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^p}, & \text{jei } x \neq 0, \\ 0, & \text{jei } x = 0. \end{cases}$$

   Kokioms p reikšmėms pirmoji dalinė išvestinė $D_1 f$ yra tolydi taške $(0,0)$.

2. Tegu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama funkcija ir $l_i = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$, $i = 1,2,3$ yra trys vienas kitam statmeni vektoriai. Parodyti, kad kiekvienam taške $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\sum_{i=1}^{3} (D_{l_i} f(u))^2 = \sum_{i=1}^{3} (D_i f(u))^2$$

3. Įrodyti, kad funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra afininė tada ir tik tada, kai f yra diferencijuojama ir jos išvestinė funkcija yra pastovioji funkcija.

4. Tegu $U \subset \mathbb{R}^p$ yra atvira iškila aibė ir funkcija $f : U \to \mathbb{R}^q$ yra diferencijuojama. Parodyti, kad jei $x, y \in U$, tai egzistuoja toks $z \in (x, y)$, kad

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq \|Df(z)(y - x)\|_2$$

5. Tarkime, kad $K \subset \mathbb{R}^2$ yra aibė taškų $x = (x_1, x_2)$ ribojama tiesėmis $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ir $x_1 + x_2 = 9$. Tegul $f : K \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = 4 - (1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2, \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

   Įrodyti, kad šios funkcijos maksimali reikšmė 4 įgyjama taške $(1,1)$ ir minimali reikšmė -61 įgyjama taškuose $(0,9)$ ir $(9,0)$. Paaiškinti, kaip tai derinasi su būtino ekstremumo sąlyga.

6. Tarkime, kad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = (x_1^2 - x_2)(3x_1^2 - x_2), \text{ visiems } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

   Įrodyti, kad nulis yra funkcijos f kritinis taškas, bet nėra lokalaus ekstremumo taškas. *Nuoroda:* nagrinėti reikšmes $f(0,t)$ ir $f(t, 2t^2)$, kai t yra arti nulio.