

Pratybų nr. 16 uždaviniai

Balandžio 24 d. – I, II grupei.

1. Tegu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad funkcija yra diferencijuojama ir rasti *Jacobio* matricą $Jf(u)$.

2. Funkcijos $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cos(x_2 x_3).$$

(a) Rasti funkcijos f visas dalines išvestines

(b) Rasti funkcijos f kryptinę išvestinę taške $(1, 2, 3)$ kryptimi $(1, -1, 0)$.

3. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yra diferencijuojama funkcija. Rasti funkcijos $g(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ išvestinę.

4. Tegu $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yra diferencijuojama funkcija, $f(x) = (\exp(-\|x\|_2), \cos(\|x\|_2))$ Rasti funkcijos $g(r, \phi) = f(r \cos \phi, r \sin \phi)$ išvestinę.

5. Funkcijos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x) := (x_1^{1/3} + x_2^{1/3})^3$$

kiekvienam $x \in \mathbb{R}^2$. Įrodyti, kad ši funkcija turi kryptines išvestines taške $(0, 0)$ visomis kryptimis, bet nėra tame taške diferencijuojama.

6. Funkcijos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ reikšmės yra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{jei } x \neq 0 \\ 0, & \text{jei } x = 0 \end{cases}$$

Parodyti, kad funkcija nėra tolydi taške $(0, 0)$, bet turi jame dalines išvestines.