Pratybų nr. 15 uždaviniai

Balanžio 21 d. – II grupei, balandžio 24 d. – I grupei.

1. Tarkime, kad $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ir $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^d$. Įrodyti: jei $h(x) \to 0$, kai $x \to 0$, ir $g = o(h)$, kai $x \to 0$, tai $g(x) \to 0$, kai $x \to 0$.

2. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) := (x_1x_2 - 2x_1 + x_2 + 5, x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 3x_2 + 4)$$

kiekvienam $x \in \mathbb{R}^2$. Naudojantis tik apibrėžimu rasti šios funkcijos išvestinę ir *Jacobi*o matricą.

3. Tegul funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra tiesinė. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama, o jos išvestinė funkcija yra pastovioji funkcija $Df = f$, t.y. funkcija su reikšmėmis $Df(x) = f$ kiekvienam $x \in \mathbb{R}^p$.

4. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ yra tolydi taške $u \in \mathbb{R}^p$ ir egzistuoja tokia afininė funkcija $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, kad $f(u+x) - T(u+x) = o(x)$, kai $x \to 0$. Įrodyti, kad f yra diferencijuojama taške u ir kiekvienam $x \in \mathbb{R}^p$

$$Df(u)(x) = T(u + x) - T(u) = T(x) - T(0)$$

5. Tarkime, kad $U \subset \mathbb{R}^p$ yra atvira aibė, o funkcija $f : U \to \mathbb{R}^q$ yra diferencijuojama taške $u \in U$. Įrodyti, kad f yra tolydi taške u.

6. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra diferencijuojama taške $u \in \mathbb{R}^d$. Tegul $x \in \mathbb{R}^d$ ir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $g(t) := f(u + tx)$ kiekvienam $t \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad g yra diferencijuojama taške 0 ir rasti $g'(0)$.