# Pratybų nr. 13 uždaviniai

Kovo 31 d. – II grupei.

1. Tarkime, kad funkcijų sekos $(f_n)$ ir $(g_n)$ aibėje $X$ tolygiai konverguoja. Įrodyti, kad aibėje $X$ tolygiai konverguoja funkcijų seka $(f_n + g_n)$.

2. Tarkime, kad aibėje $X \subset \mathbb{R}^p$ apibrėžta ir reikšmes įgyjanti euklidinėje erdvėje funkcijų seka $(f_n)$ tolygiai konverguoja į funkciją $f : X \to \mathbb{R}^q$, o funkcija $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d$ yra tolydi. Įrodyti, kad funkcijų seka $(F \circ f_n)$ tolygiai konverguoja į funkciją $F \circ f$.

3. Tegu $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ir $f_u := f(x - u)$, $u \in \mathbb{R}^p$. Įrodyti
   (a) $f$ yra tolydi tada ir tik tada, kai su bet kuria, į nulį konverguojančia $\mathbb{R}^p$ elementų seka $(u_n)$, funkcijų seka $(f_{u_n})$ paprastai konverguoja į $f$;
   (b) $f$ yra tolygiai tolydi tada ir tik tada, kai su bet kuria į nulį konverguojančia $\mathbb{R}^p$ elementų seka $(u_n)$, funkcijų seka $(f_{u_n})$ tolygiai konverguoja į $f$.

4. Ar funkcijų eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} x_1^j x_2^j$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, aibėje
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$$
tolygiai konverguoja? Atsakymą pagrįsti.

5. Ar funkcijų eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} x_1^j x_2^j$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, aibėje
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$
tolygiai konverguoja? Atsakymą pagrįsti.

6. Ar funkcijų eilutė $\sum_{j=0}^{\infty} (x^j, (1 - x)^j)$, $x \in \mathbb{R}$, intervale $[0, 1]$ paprastai konverguoja? Kokioje aibėje ši eilutė konverguoja tolygiai? Atsakymą pagrįsti.