Pratybų nr. 12 uždaviniai

Kovo 31 d. – I, II grupei.

1. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tegul

$$f_n(x) := x_1^n x_2^n$$

Kokioje aibėje šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) paprastai konverguoja ir kokioje aibėje ši seka tolygiai konverguoja? Atsakymą pagrįsti.

2. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x \in \mathbb{R}$ tegul

$$f_n(x) := \left(\frac{1}{1+nx}, \frac{x}{n} \right).$$

Įrodyti, kad šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) intervale $[0, 1]$ tolygiai nekonverguoja.

3. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x \in \mathbb{R}$ tegul

$$f_n(x) := \left(\frac{x}{1+nx}, \frac{x}{n} \right).$$

Įrodyti, kad šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) intervale $[0, 1]$ tolygiai konverguoja.

4. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tegul

$$f_n(x) = \left(\frac{\sin nx_1}{n}, \frac{\cos nx_1}{n} \right).$$

Ar šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja paprastai? Ar ji aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja tolygiai? Atsakymą pagrįsti.

5. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$ ir $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tegul

$$f_n(x) = (\sin(x_1/n), \cos(x_1/n)).$$

Ar šiomis reikšmėmis apibrėžta funkcijų seka (f_n) aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja paprastai? Ar ji aibėje $\mathbb{R}^2$ konverguoja tolygiai? Atsakymą pagrįsti.

6. Tarkime, kad $X \subset \mathbb{R}^p$ ir (f_n) yra funkcijų seka apibrėžta aibėje X ir reikšmes įgyjanti euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^q$. Įrodyti, kad (f_n) tolygiai nekonverguoja į 0 tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia X aibės elementų seka (x_n), kad vektorių seka $f_n(x_n)$ nekonverguoja į 0.