

Pratybų nr. 7 uždaviniai

Kovo 6 d. – I, II grupei.

1. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{jei } x \neq 0, \\ 0, & \text{jei } x = 0. \end{cases}$$

Ar ši funkcija tolydi taške $(0, 0)$? Atsakymą pagrįsti.

2. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} x_1 x_2, & \text{jei } x_1 x_2 > 0, \\ 0, & \text{jei } x_1 x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Kuriuose \mathbb{R}^2 taškuose ši funkcija tolydi? Atsakymą pagrįsti.

3. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2 x_2}{|x_2 - x_1^2|}, & \text{jei } x_1 \neq x_2, \\ 0, & \text{jei } x_1 = x_2. \end{cases}$$

Kuriuose \mathbb{R}^2 taškuose ši funkcija tolydi? Atsakymą pagrįsti.

4. Įrodyti, kad projekcija $\pi_h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija su kiekvienu $h \in \{1, \dots, d\}$.

5. Tegul $X \subset \mathbb{R}^p$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ ir $g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$. Funkcija $f \oplus g : \mathbb{R}^{q+d}$ su reikšmėmis $(f \oplus g)(x) := (f(x), g(x))$ vadina funkcijų f ir g tiesiogine suma. Įrodyti, kad $f \oplus g$ yra tolydi tada ir tik tada, kai f yra tolydi ir g yra tolydi.

6. Tegul $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\} \rightarrow R$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x_1, x_2) := \frac{1}{(x_1 - 2)^2 + x_2^2}$$

Ar ši funkcija tolygiai tolydi aibėje $O_1((0, 0))$? Ar ji yra tolygiai tolydi aibėje $O_2((0, 0))$? Atsakymą pagrįsti.