

## Pratybų nr. 6 uždaviniai

Kovo 3 d. – II grupei, kovo 6 d. – I grupei.

1. Sukonstruoti tokį skaitų rinkinį kompaktinių aibių, kurių sąjunga nėra kompaktinė aibė.
2. Tegul  $K$  yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė. Tada egzistuoja tokie vektoriai  $u \in K$  ir  $v \in K$ , kad

$$\|u\|_2 \leq \|x\|_2 \leq \|v\|_2, \text{ visiems } x \in K$$

3. Tegul  $K$  yra euklidinės erdvės kompaktinė aibė ir  $y \notin K$ . Įrodyti, kad egzistuoja toks elementas  $u \in K$ , kad

$$\|u - y\|_2 \leq \|x - y\|_2, \text{ visiems } x \in K,$$

t.y. egzistuoja artimiausias  $y$ -ui aibės  $K$  elementas.

4. Įrodyti, kad funkcijos

(a)  $(x, y) \rightarrow x + y$  iš  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  į  $\mathbb{R}^d$

(b)  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$  iš  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  į  $\mathbb{R}^d$

(c)  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  iš  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  į  $\mathbb{R}$

yra tolydžios.

5. Tegul  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ir

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

Parodyti, kad

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \left( \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \right) = \lim_{x_2 \rightarrow 0} \left( \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2) \right) = 0$$

bet  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  neegzistuoja.

6. Tegul  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ir

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}.$$

Parodyti, kad  $\lim_{x_1 \rightarrow 0} (\lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2))$  ir  $\lim_{x_2 \rightarrow 0} (\lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2))$  neegzistuoja, bet  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  egzistuoja.