Pratybų nr. 4 uždaviniai

Vasario 20 d. I -II grupei.

1. Ar aibių rinkinys

$$\big\{\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - k\|_1 < 1\} : k \in \mathbb{Z}^d\big\}$$

   yra euklidinės erdvės $\mathbb{R}^d$ atvirasis denginys? Atsakymą pagrįsti.

2. Įrodyti, kad kiekviena, baigtinį elementų skaičių turinti, euklidinės erdvės aibė yra kompaktinė.

3. Tegu aibė $A = \{\|x\|_{\max} \leq 2, x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Tegu $C = A \cap B$ Ar aibė C yra santykinai atvira aibės A atžvilgiu, ar ji yra santykinai uždara? Pagrįskite savo atsakymą.

4. Imkime tą pačią aibę C. Ar taškas $(-1, 0)$ priklauso aibei C? Koks vidinis, sąlyčio, ribinis ar izoliuotas šis taškas yra aibei C? Ar įmanoma sukonstruoti aibės C taškų seką konverguojančią į $(-1, 0)$? Jei įmanoma sukonstruokite, ir parodykite konvergavimą, jeigu neįmanoma įrodykite.

5. Tegu $A = \{x \in R^3 : x_2 \geq 2, x_1^2 + x_3^2 = 1\}$.

   (a) Rasti A°.

   (b) Rasti $\overline{A}$.

   (c) Ar aibė A yra kompaktiška? Pagrįsti atsakymą.

   (d) Sukonstruoti tokią aibės A taškų seką, kuri nekonverguotų.

6. Įrodyti, kad aibės $A \subset \mathbb{R}^d$ savybės (a), (b), (c) yra ekvivalenčios:

   (a) A yra aprėžta

   (b) egzistuoja toks uždarasis stačiakampis $[a, b] \subset \mathbb{R}^d$, kad $A \subset [a, b]$.

   (c) egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_{max} \leq R\}$

   (d) egzistuoja toks realusis skaičius R, kad $A \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq R\}$

7* Tegu $A = \{x^2 - y^2 > 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $B_- = \{(-2, -2) < x < (0, 0), x \in \mathbb{R}^2\}$ ir $B_+ = \{(0, 0) < x < (2, 2), x \in \mathbb{R}^2\}$. Parodyti, kad aibės $A_- = A \cap B_-$ ir $A_+ = A \cap B_+$ yra iškilos, bei rasti vektorių $p \in \mathbb{R}^2$ tokį, kad

$$\sup\{p \cdot x : x \in A_-\} \leq \inf\{p \cdot x : x \in A_+\}$$