Pratybų nr. 2 uždaviniai

Vasario 7 d. I grupei, vasario 13, II grupei.

1. Kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ tegul

$$x_n := \left(\frac{n}{1+n}, \frac{1-n}{n} \right) \in \mathbb{R}^2$$

Naudojant tik sekos konvergavimo apibrėžimą, įrodyti, kad vektorių seka (x_n) konverguoja į vektorių $(1, -1)$, kai $n \to \infty$.

2. Su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, tegul $x_n := (e^{-n} \sin n, e^{-n} \cos n) \in \mathbb{R}^2$. Ar vektorių seka (x_n) turi ribą? Atsakymą pagrįsti.

3. Tarkime, kad $\mathbb{R}^d$ erdvės elementų seka (x_n) konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$ ir $\mathbb{R}^d$ erdvės elementų seka (y_n) yra aprėžta. Įrodyti, kad $x_n \cdot y_n \to 0$, kai $n \to \infty$.

4. Tarkime, kad vektorių seka (x_n) konverguoja į vektorių y. Įrodyti, kad bet kuris jos posekis (x_{n_k}) taip pat konverguoja į vektorių y.

5. Parodyti, kad jei $\|x_n - x\|_{\max} \to 0$, tai $\|x_n\|_{\max} \to \|x\|_{\max}$.

6. Tegu

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Rasti (pateikti įrodymus)

   (a) $\lim x_n$;
   (b) $\lim \|x_n\|_2$;
   (c) $\lim \|x_n\|_1$;
   (d) $\lim \|x_n\|_{\max}$.