

Pratybų nr. 1 uždaviniai

Vasario 7 d.

1. \mathbb{R}^3 erdvės vektoriams $x = (3, 0, -1)$ ir $y = (1, 2, 3)$ rasti:

- (a) vektorių $3x - y$;
- (b) skaliarinę sandaugą $x \cdot y$;
- (c) euklidinius ilgius $\|x\|_2$ ir $\|y\|_2$;
- (d) euklidinį atstumą $\rho_2(x, y)$.

2. Įrodyti, kad bet kuriems $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x \cdot x &> 0, \text{ jei } x \neq 0, \\x \cdot y &= y \cdot x, \\x \cdot (\lambda y + \mu z) &= \lambda(x \cdot y) + \mu(x \cdot z).\end{aligned}$$

3. Tegul $a, b, c \in \mathbb{R}$ ir bet kuriems $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tegul

$$q(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2.$$

Su kokiais $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcijai $q(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ galioja savybės:

$$\begin{aligned}q(x, x) &> 0, \text{ jei } x \neq 0, \\q(x, y) &= q(y, x), \\q(x, \lambda y + \mu z) &= \lambda q(x, y) + \mu q(x, z).\end{aligned}$$

4. Tegul $x, y \in \mathbb{R}^d$ ir $\|\cdot\|$ yra norma erdvėje \mathbb{R}^d . Įrodyti, kad

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

5. Įrodyti, kad funkcijoms $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_{\max}$ galioja savybės:

- (a) kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| \geq 0$;
- (b) kiekvienam $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$;
- (c) visiems $x \in \mathbb{R}^d$ ir $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (d) visiems $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

6. Pavaizduoti erdvės \mathbb{R}^d aibes $\{\|x\|_2 = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$, $\{\|x\|_1 = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$, $\{\|x\|_{\max} = 1, x \in \mathbb{R}^2\}$