Pratybų patikrinimo III uždavinių sprendimai

Uždavinys 1 *Tegu* $X_1 = [-2, -1/2]$, $X_2 = \mathbb{R}\backslash(-5, 5)$. *Parodyti, kad* $X_1 \cup X_2$ *yra uždara aibė.*

Sprendimas 1. Naudojantis tuo, kad atviri intervalai yra atviros aibės, o uždari intervalai uždaros, gauname, kad X_1 yra uždara aibė. Kadangi $R\backslash X_2 = (-5, 5)$, tai naudojantis atviros aibės apibrėžimu gauname, kad X_2 yra uždara aibė. Dviejų uždarų aibių sąjunga yra uždara aibė. $\square$
Sprendimas 1. $X_2 = (-\infty, 5] \cup [5, \infty)$ pagal apibrėžimą. $X_1 \cup X_2 = (-\infty, 5] \cup [-2, -1/2] \cup [5, \infty)$. Uždarų intervalų sąjunga yra uždara aibė. $\square$

Uždavinys 2 *Tegu* $X_n = R\backslash[1/n, n]$. *Įrodyti, kad* $\cup_{n=2}^{4} X_n$ *yra atvira aibė.*

Sprendimas 1. $R\backslash X_n = [1/n, n]$. Kadangi uždaras intervalas yra uždara aibė, pagal atviros aibės apibrėžimą, X_n yra atvira aibė. Atvirų aibių sąjunga yra atvira aibė. $\square$
Sprendimas 2. $X_2 = (-\infty, 1/2) \cup (2, \infty)$, $X_3 = (-\infty, 1/3) \cup (3, \infty)$, $X_4 = (-\infty, 1/4) \cup (4, \infty)$. $X_2 \cup X_3 \cup X_4 = X_2$. X_2 yra atvira nes ji yra atvirų intervalų sąjunga.

Uždavinys 3 *Tegu* $P(x) = x^2 + 2x - 3$. *Parodyti, kad* $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$.

Sprendimas 1. $P(x) = (x - 1)(x + 3)$. $|P(x)| = |x - 1||x + 3|$. Kadangi $\lim_{x\to\infty} |x - 1| = \lim_{x\to\infty} |x + 3| = \infty$, tai ir $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$ $\square$.
Sprendimas 2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks $R > 0$, kad

$$|f(x)| > \varepsilon, \text{ kai } |x| > R.$$

$|P(x)| = |(x + 1)^2 - 4| > \varepsilon$, kai arba $(x + 1)^2 - 4 < -\varepsilon$ arba $(x + 1)^2 - 4 > \varepsilon$. Pirma nelygybė ekivalenti nelygybei $|x + 1| < \sqrt{4 - \varepsilon}$, antroji $|x + 1| > \sqrt{4 + \varepsilon}$. Pasirenkam $R = \sqrt{4 + \varepsilon} + 1$

Uždavinys 4 *Tegu* $P(x) = x^2 + 2x + 5$. *Parodyti, kad* $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$.

Sprendimas 1. $|P(x)| = |(x + 1)^2 + 4| > |x + 1|^2$. Kadangi $\lim_{x\to\infty} |x + 1|^2 = \infty$, tai ir $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$.