Pratybų patikrinimo II uždavinių sprendimai

Uždavinys 1 *Įrodyti, kad kiekvienam teigiamam realiam skaičiui t, egzistuoja toks natūralusis skaičius N, kad $t > \frac{13}{N} > 0$.*

Sprendimas 1. Remiantis Archimedo principu, kiekvienam realiajam skaičiui s egzistuoja natūrinis skaičius K, toks kad $K > s$. Tegu $s = \frac{13}{t}$. Tada egzistuoja toks K, kad

$$K > s = \frac{13}{t} \Rightarrow t > \frac{13}{K}.$$

Mūsų ieškomas N yra K. $\square$

Sprendimas 2. Kiekvienam teigiamam realiajam skaičiui t egzistuoja toks racionalusis skaičius c ir K, kad $0 < c < t < K$. Kadangi c yra racionalusis, tai $c = \frac{a}{b}$, čia $a, b \in \mathbb{N}_+$. Turime

$$t > c = \frac{a}{b} \geq \frac{1}{b} = \frac{13}{13b}.$$

Pažymėkime $N = 13b$. Tada

$$t > \frac{13}{N}.$$

Taigi radome natūralųjį skaičių N, kuriam galioja reikiama nelygybė. $\square$

Uždavinys 2 *Tarkime, kad aprėžta teigiamų realiųjų skaičių seka (r_n) konverguoja į teigiamą skaičių r. Parodyti, kad seka (r_n^2) konverguoja į r^2.*

Sprendimas 1. Jeigu turime dvi sekas (a_n) ir (b_n) konverguojančias atitinkamai į a ir b, tai seka $(a_n \cdot b_n)$ konverguoja į $a \cdot b$. Imkime $a_n = r_n$, ir $b_n = r_n$. Tada $a_n \cdot b_n = r_n^2$, $a = r$, $b = r$ ir $a \cdot b = r^2$. $\square$

Sprendimas 2. Kadangi r_n yra aprėžta, tai egzistuoja toks skaičius C, kad

$$|r_n| \leq C, \qquad \text{visiems } n \geq 1.$$

Kadangi $\lim r_n = r$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, kad

$$|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{C + |r|}, \qquad \text{visiems } n \geq N(\varepsilon).$$

Turime

$$\begin{aligned} |r_n^2 - r^2| &= |r_n - r||r_n + r| \\ &\leq |r_n - r|(|r_n| + |r|) \\ &\leq |r_n - r|(C + |r|) \\ &< \frac{\varepsilon}{C + |r|}(C + |r|) = \varepsilon, \end{aligned}$$

visiems $n \geq N(\varepsilon)$. Taigi kiekvienam $\varepsilon > 0$ mes radome tokį $N(\varepsilon)$, kad

$$|r_n^2 - r^2| < \varepsilon, \qquad \text{visiems } n \geq N(\varepsilon).$$

Taigi $\lim r_n^2 = r^2$. $\square$

Uždavinys 3 *Tarkime, kad turime aprėžtą ir atskirtą nuo nulio teigiamų realiųjų skaičių seką (r_n). Parodyti, kad jei seka $(\sqrt{r_n})$ konverguoja į $\sqrt{r}$, čia r teigiamas realusis skaičius, tai seka (r_n) konverguoja į r.* *5 b.*

Sprendimas 1. Jeigu turime dvi sekas (a_n) ir (b_n) konverguojančias atitinkamai į a ir b, tai seka $(a_n \cdot b_n)$ konverguoja į $a \cdot b$. Imkime $a_n = \sqrt{r_n}$, ir $b_n = \sqrt{r_n}$. Tada $a_n \cdot b_n = r_n$, $a = \sqrt{r}$, $b = \sqrt{r}$ ir $a \cdot b = r$. $\square$

Sprendimas 2. Kadangi r_n yra aprėžta, aprėžta ir $\sqrt{r_n}$. Taigi egzistuoja toks skaičius C, kad

$$\sqrt{r_n} \leq C, \qquad \text{visiems } n \geq 1.$$

Kadangi $\lim r_n = r$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, kad

$$|\sqrt{r_n} - \sqrt{r}| < \frac{\varepsilon}{C + \sqrt{r}}, \qquad \text{visiems } n \geq N(\varepsilon).$$

Turime

$$\begin{aligned}
|r_n - r| &= |\sqrt{r_n} - \sqrt{r}|(\sqrt{r_n} + \sqrt{r}) \\
&\leq |\sqrt{r_n} - \sqrt{r}|(C + \sqrt{r}) \\
&< \frac{\varepsilon}{C + \sqrt{r}}(C + \sqrt{r}) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

visiems $n \geq N(\varepsilon)$. Taigi kiekvienam $\varepsilon > 0$ mes radome tokį $N(\varepsilon)$, kad

$$|r_n - r| < \varepsilon, \qquad \text{visiems } n \geq N(\varepsilon).$$

Taigi $\lim r_n = r$. $\square$