

Pratybų nr. 22 uždaviniai

Gruodžio 9 d. I–II grupėms

1. Tegul $[a, b]$ yra neišsigimęs intervalas. Bet kuriam $\delta > 0$ rasti tokį $[a, b]$ skaidinį $\tau = \{t_i, i = 0, 1, \dots, n\}$, kad jo smulkumas $|\tau| < \delta$.
2. Tegul $c \in \mathbb{R}$ ir tegul $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = c$ visiems $x \in [a, b]$. Rasti šios funkcijos *Riemanno* integralą naudojantis tik apibrėžimu.
3. Tegul $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = x$ visiems $x \in [a, b]$. Rasti šios funkcijos *Riemanno* integralą naudojantis tik apibrėžimu.
4. Tegul $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yra neneigiama (t.y. $f(x) \geq 0$, visiems $x \in [a, b]$) ir R-integruojama funkcija. Įrodyti, kad $\int_a^b f \geq 0$.
5. Tarkime, kad $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis $f(x) = 0$, kai $x \in (0, 1]$ ir $f(0) = 1$. Įrodyti, kad f yra R-integruojama ir rasti jos *Riemanno* integralą.
6. Rasti ribą:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$