Pratybų nr. 21 uždaviniai

Gruodžio 2 d. – I grupei, gruodžio 5 d. – II grupei.

1. Tarkime, kad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yra funkcija, $\alpha \in (0, 1]$ ir egzistuoja toks skaičius $C \in \mathbb{R}$, kad

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$$

visiems $x, y \in [a, b]$ (tada sakoma, kad funkcijai f galioja *Hölder*io sąlyga su rodikliu α). Įrodyti, kad f yra tolygiai tolydi.

2. Pateikti tokį tolygiai tolydžios funkcijos f pavyzdį, kuriai negalioja *Hölder*io sąlyga su rodikliu 1. Nuoroda: nagrinėti funkciją su reikšmėmis $f(x) = \sqrt{x}$.

3. Tegu (x_n) yra intervalo (a, b) skirtingų elementų seka. Tegu (c_n) yra tokių teigiamų skaičių seka, kad eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konverguoja. Kiekvienam $x \in [a, b]$ tegu

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n 1_{[a,x]}(x_n).$$

Įrodyti, kad f yra didėjanti, $f(x_n+) - f(x_n-) = c_n$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$ ir f yra tolydi taškuose $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Tarkime, kad $a < b$ ir funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yra dalimis monotoninė. Jei f turi vidurinės reikšmės savybę intervale $[a, b]$, tai ji yra tolydi intervale (a, b).