Pratybų nr. 20 uždaviniai

Lapkričio 28 d. – I grupei, gruodžio 2 d. – II grupei.

1. Tegul $f : A \to \mathbb{R}$ yra funkcija. Įrodyti, kad f yra aprėžta tada ir tik tada, kai $|f|$ yra aprėžta iš viršaus.

2. Tegul $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ir $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra tolydžios funkcijos. Tarkime, kad $f(0) < g(0)$ ir $f(1) > g(1)$. Įrodyti egzistuojant tokį tašką $c \in (0,1)$, kad $f(c) = g(c)$.

3. Pateikti pavyzdžius:

   (a) funkcijos $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, kuri yra tolydi ir aprėžta, kažkuriame taške įgyja minimalią reikšmę, bet niekur neįgyja maksimalios reikšmės.

   (b) funkcijos $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, kuri yra tolydi ir aprėžta, kažkuriame taške įgyja maksimalią reikšmę, bet niekur neįgyja minimalios reikšmės.

   (c) funkcijos $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, kuri yra aprėžta, bet niekur neįgyja maksimalios reikšmės ir niekur neįgyja minimalios reikšmės.

   (d) funkcijos $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, kuri neturi viršutinio rėžio ir neturi apatinio rėžio.

   Paaiškinti, kodėl nei vienas iš šių pavyzdžių nepaneigia maksimumo principo.

4. Tarkime, kad funkcija $f[0,2] \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir $f(0) = f(2)$. Įrodyti, kad intervale $[0,2]$ egzistuoja tokia skaičiai a ir b, kad $a - b = 1$ ir $f(a) = f(b)$.

5. Tegul $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija. Tarkime, kad $f(x) > 0$ kiekvienam $x \in [a,b]$. Įrodyti egzistuojant tokį skaičių $c > 0$, kad $f(x) > c$ kiekvienam $x \in [a,b]$.