

Pratybų nr. 19 uždaviniai

Lapkričio 25 d. I-II grupei.

1. Tegu funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2, & \text{jei } x \leq 0, \\ x^2 - 2, & \text{jei } 0 < x \leq 2, \\ x, & \text{jei } x > 2. \end{cases}$$

Rasti funkcijos f tolydumo ir trūkio taškus.

2. Tegu $a \in \mathbb{R}$ ir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yra funkcija su reikšmėmis

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & \text{jei } x \leq 1, \\ ax + 1, & \text{jei } x > 1. \end{cases}$$

Kokioms a reikšmėms funkcija f yra tolydi?

3. Tegu $f(x) := \{x\}$ (skaičiaus trupmeninė dalis). Rasti funkcijos trūkio taškų aibę.
4. Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yra tolydi ir $c \in \mathbb{R}$ yra toks, kad $f(c) > 0$. Įrodyti egzistuojant tokį δ , kad $f(x) > f(c)/2$ kiekvienam $x \in O_\delta(c)$.
5. Tarkime, kad $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yra tolydi funkcija. Įrodyti, kad egzistuoja tokia tolydi funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kad $g(x) = f(x)$ kiekvienam $x \in [a, b]$ (tokia funkcija vadinama funkcijos f tolydžiuoju tęsiniu). Įrodykite, kad šis teiginys nėra teisingas bet kuriai tolydžiai funkcijai $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.
6. Tarkime, kad $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ yra tokia funkcija, kad

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

visiems $x, y \in (a, b)$ ir $\lambda \in (0, 1)$ (tokia funkcija vadinama iškiliaja). Įrodyti, kad f yra tolydi