Pratybų nr. 18 uždaviniai

Lapkričio 18 d. I grupei , lapkričio 21 - II grupei

Funkcija $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadinama n-tojo laipsnio polinomu ($n \in \mathbb{N}$), jei ji apibrėžiama taip:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

čia $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra realieji skaičiai vadinami polinomo koeficientais. Realusis skaičius c vadinamas polinomo šaknimi, jeigu $P(c) = 0$.

Polinomus analogiškai galima apibrėžti kompleksinių skaičių aibėje. Tada yra teisinga teorema: kiekvienam n-tojo laipsnio polinomui $P(z)$ egzistuoja skaičiai $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, tokie, kad $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. Ši teorema vadinama pagrindine algebros teorema (dėl istorinių priežasčių).

Kadangi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, ši teorema galioja ir polinomams su realiaisiais koeficientais. Kadangi

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$$

ir $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yra realieji skaičiai, tai akivaizdu, kad z_i negali būti bet kokie kompleksiniai skaičiai. Nesunku pastebėti, kad jei nors vienas z_i nėra realusis skaičius, tai būtinai koks nors kitas z_j bus jo jungtinis (t.y. $z_i z_j \in \mathbb{R}$ ir $z_i + z_j \in \mathbb{R}$). Taigi polinomą su realiais koeficientais galima išskaidyti į pirmo laipsnio polinomų ir antro laipsnio polinomų, neturinčių realių šaknų, sandaugą.

1. Parodyti, kad n-tojo laipsnio polinomui $P(x)$, $\lim_{x\to\infty} |P(x)| = \infty$, jei $n > 0$.
2. Tegu $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ir $P(x)$ bei $Q(x)$ yra polinomai. Tegu

   $$P(a) = Q(a) = 0.$$

   Kokias reikšmes gali įgyti riba $\lim_{x\to a} R(x)$?
3. Rasti ribas
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x + 1}$.
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$, čia $n \in \mathbb{N}_+$.
4. Tegul $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir

   $$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija netolydi kiekviename taške.
5. Tegu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir

   $$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{b}, x \in \mathbb{Q},\ x = \dfrac{a}{b},\ \text{(neprastinama trupmena)} \end{cases}$$

   Parodyti, kad funkcija tolydi iracionaliuose taškuose ir netolydi racionaliuose.