Pratybų nr. 13 uždaviniai

Spalio 28 d. I-II grupei.

1. Tegu $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ or $\sum_{i=m}^{\infty} b_i$ yra neneigiamų skaičių eilutės ir tegul egzistuoja riba $L = \lim_{i\to\infty} a_i/b_i$. Įrodyti:

   (a) jei $L > 0$, tai $\sum_{i\geq m} a_i$ konverguoja tada ir tik tada, kai konverguoja $\sum_{i\geq m} b_i$;

   (b) jei $L = 0$ ir $\sum_{i\geq m} b_i$ konverguoja, tai konverguoja ir $\sum_{i\geq m} a_i$.

2. Tegu (c_i) yra teigiamų skaičių seka. Įrodyti, kad

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{c_{i+1}}{c_i} \leq \liminf_{i\to\infty} c_i^{1/i}.$$

3. Įrodyti, kad diverguoja eilutė $\sum_{i\geq 0} \frac{1}{2i+1}$.

4. Tegul skaičių eilutė $\sum_{i\geq m} a_i$ konverguoja absoliučiai ir tegul (b_i) yra aprėžta skaičių seka. Įrodyti, kad eilutė $\sum_{i\geq m} a_i b_i$ konverguoja absoliučiai.

5. Parodyti, kad eilutė $\sum_{i\geq 1} 2^{-i} \sin(\frac{3\pi}{5} i)$ konverguoja.

6. Parodyti, kad eilutė

$$\sum_{n=1} nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1 + x^2 + \cos^2 k\alpha},$$

   čia $x \neq 0$, o $\alpha \in \mathbb{R}$, konverguoja. (Taikyti D'Alembert eilučių konvergavimo požymį).

7. Parodyti, kad eilutė

$$\sum_{n=2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

   konverguoja. (Taikyti Cauchy eilučių konvergavimo požymį).