Pratybų nr. 11 uždaviniai

Spalio 17 d. I grupei, spalio 20 d. II grupei.

1. Tegu (r_n) yra realiųjų skaičių seka ir $r \in \mathbb{R}$. Įrodyti, kad $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ tada ir tik tada, kai kiekvienam $k \in \mathbb{N}_+$ egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\rho(r_n, r) < 1/k$ kiekvienam $n \geq N$.
2. Tarkime, kad teigiamų realiųjų skaičių seka (r_n) konverguoja į skaičių r ir $r \neq 0$. Įrodyti, kad egzistuoja toks $N \geq m$, kad $|r_n| \geq |r|/2$ kiekvienam $n \geq N$.
3. Tarkime, kad teigiamų realiųjų skaičių seka (r_n) konverguoja į teigiamą skaičių r. Įrodyti, kad seka $(\sqrt{r_n})$ konverguoja į $\sqrt{r}$.
4. Tarkime, kad realiųjų skaičių aibė A turi viršutinį rėžį M ir egzistuoja tokia iš aibės A elementų sudaryta seka (x_n), kad $x_n \to M$, kai $n \to \infty$. Įrodyti, kad M yra aibės A mažiausias viršutinis rėžis.
5. Tegul $r_n := 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Įrodyti, kad $\sup_{n\in\mathbb{N}} r_n = 1$ ir $\inf_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$.
6. Tegul a yra teigiamas realusis skaičius. Parodyti, kad $\lim a^{1/n} = 1$. (Pasinaudoti tuo, kad $a = (1 + (a^{1/n} - 1)^n))$
7. Parodyti, kad $\lim n^{1/n} = 1$. (Pasinaudoti tuo, kad $n = (1 + (n^{1/n} - 1)^n))$
8. Rasti sekų ribas:
   (a) n^{1/n^2}
   (b) $(n^2)^{1/n}$
   (c) $(1 + n^2)^{1/n^3}$
   (d) $(1 + 1/n)^{2/n}$.