Pratybų nr. 9 uždaviniai

Spalio 7 d. I grupei, spalio 10 d. II grupei.

1. Įrodyti, kad jei t ir s yra teigiami realieji skaičiai ir jei $t > s$, tai $t^{-1} < s^{-1}$.
2. Įrodyti, kad su kiekvienu teigiamu realiuoju skaičiumi t egzistuoja toks natūralusis skaičius N, kad $t > 1/N > 0$.
3. Įrodyti, kad bet kuri realiųjų skaičių aibė gali turėti ne daugiau kaip vieną mažiausią viršutinį rėžį.
4. Tegul M yra realiųjų skaičių aibės A mažiausias viršutinis rėžis. Įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $x \in A$, kad $x > M - \varepsilon$.
5. Tarkime, kad x yra realusis skaičius ir (a_n) yra racionaliųjų skaičių *Cauchy* seka. Įrodyti: jei $x \leq a_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$, tai $x \leq LIM(a_n)$. Taip pat įrodyti, kad $x \geq LIM(a_n)$, jei $x \geq a_n$ su kiekvienu $n \in \mathbb{N}$. Nuoroda: jei taip nėra, tai galima rasti racionalųjį skaičių tarp dviejų realiųjų.
6. Tegul A yra realiųjų skaičių aibė, o $-A := \{-x : x \in A\}$. Įrodyti: jei M yra aibės $-A$ mažiausias viršutinis rėžis, tai $-M$ yra aibės A didžiausias apatinis rėžis.
7. Tegul r yra realusis skaičius. Įrodyti, kad $|r| = (r^2)^{1/2}$.