Pratybų nr. 4 uždaviniai

Rugsėjo 16 d. I grupei, II grupei.

1. Apibrėžkime funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kaip $f(x) = x^2$. Taip pat apibrėžkime $\mathbb{R}$ intervalus

$$A = [0, 1] \quad B = [-1, 2] \quad C = [-3, 0]$$

   (a) Kokia yra f apibrėžimo sritis?
   (b) Kokia yra f reikšmių sritis?
   (c) Ar f yra bijekcija? Paaiškinkite.
   (d) Ar f yra siurjekcija? Paaiškinkite
   (e) Raskite $f[A]$, $f[B]$ ir $f[C]$.
   (f) Raskite $f^{-1}[A]$, $f^{-1}[B]$ ir $f^{-1}[C]$.

2. Įrodyti, kad funkcija $f : X \to Y$ yra injekcija tada ir tik tada, kai bet kuriems $x, y \in X$ iš $x \neq y$ išplaukia $f(x) \neq f(y)$.

3. Tegu $f, \tilde{f} : X \to Y$ ir $g, \tilde{g} : Y \to Z$.

   (a) Įrodyti: jei $g \circ f = g \circ \tilde{f}$ ir g yra injekcija, tai $f = \tilde{f}$. Ar šis teiginys teisingas, jei g nėra injekcija?
   (b) Įrodyti: jei $g \circ f = \tilde{g} \circ f$ ir f siurjekcija, tai $g = \tilde{g}$. Ar šis teiginys teisingas, jei f nėra siurjekcija?

4. Tegu funkcija $f : X \to Y$ yra bijekcija ir $f^{-1} : Y \to X$ yra atvirkštinė funkcijai f.

   (a) Įrodyti, kad $f^{-1}(f(x)) = x$ kiekvienam $x \in X$.
   (b) Įrodyti, kad $f(f^{-1}(y)) = y$ kiekvienam $y \in Y$.
   (c) Ar funkcija f^{-1} turi atvirkštinę ir jei taip rasti ją.

5. Tegu X yra aibės Y poaibis ir tegul $I_{X\to Y} : X \to Y$ yra funkcija, įgyjanti reikšmes $I_{X\to Y}(x) := x$ kiekvienam $x \in X$, ir vadinama aibės X *įdėjimu* į aibę Y. Kai $Y = X$, tai funkcija $I_{X\to X}$ vadinama *tapatingu atvaizdavimu* aibėje X. Įrodyti teiginius:

   (a) jei $X \subset Y \subset Z$, tai kompozicija $I_{Y\to Z} \circ I_{X\to Y} = I_{X\to Z}$.
   (b) jei $f : X \to Y$ yra funkcija, tai $f = f \circ I_{X\to X} = I_{Y\to Y} \circ f$.
   (c) jei funkcija $f : X \to Y$ yra bijekcija, tai $f \circ f^{-1} = I_{Y\to Y}$ ir $f^{-1} \circ f = I_{X\to X}$.