Uždaviniai Ekonometrijos II pratyboms gruodžio 13 dienai

Teiginys 1 *Tegu ε_i, $i = 1, \ldots, T$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su baigtine dispersija σ^2. Tegu $y_i = \sum_{j=1} \varepsilon_i$ ir tegu*

$$X_T(r) = \begin{cases} 0, & \text{kai } 0 \le r < 1/T, \\ y_1/T, & \text{kai } 1/T \le r < 2/T, \\ \vdots & \\ y_T/T, & \text{kai } r = 1. \end{cases}$$

Tada $\sqrt{T} X_T(\cdot)/\sigma \xrightarrow{D} W(\cdot)$, kai $T \to \infty$, čia W yra Brauno judesys.

Teiginys 2 *Tegu g yra tolydi funkcija. Tada jei $X_T(\cdot) \xrightarrow[T\to\infty]{D} X(\cdot)$, tai $g(X_T(\cdot)) \xrightarrow[T\to\infty]{D} g(X(\cdot))$*

1. Tegu ε_t yra vienodai pasisiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Naudojantis teiginiais 1 ir 2 parodyti, kad

   (a) $T^{-1} \sum_{i=1}^{T} y_{t-1}\varepsilon_t \xrightarrow{D} (1/2)\sigma^2[(W(1))^2 - 1]$

   (b)
   $$T^{-3/2} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \xrightarrow{D} \sigma \int_0^1 W(r)dr$$

   (c)
   $$T^{-2} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 \xrightarrow{D} \sigma \int_0^1 W(r)^2 dr$$

2. Tegu turime regresiją $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$. Parodyti, kad jei tikrojo ρ reikšmė yra 1, tai
   $$T(\widehat{\rho} - 1) = \frac{1/T \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\varepsilon_t}{1/T^2 \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2},$$
   čia $\widehat{\rho}$ yra ρ mažiausių kvadratų įvertis.

3. Tegu turime regresiją
   $$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$
   Parodyti, kad

   (a)
   $$\begin{bmatrix} T^{1/2}\widehat{\alpha} \\ T(\widehat{\rho} - 1) \end{bmatrix} \xrightarrow{D} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int_0^1 W(r)dr \\ \int_0^1 W(r)dr & \int_0^1 W(r)^2 dr \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W(1) \\ 1/2[(W(1))^2 - 1] \end{bmatrix}$$
   tarus, kad tikrosios α ir ρ reikšmės yra 0 ir 1.

   (b)
   $$\begin{bmatrix} T^{1/2}(\widehat{\alpha} - \alpha) \\ T^{3/2}(\widehat{\rho} - 1) \end{bmatrix} \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2 \boldsymbol{Q}^{-1})$$
   tarus, kad $\rho = 1$ ir $\alpha \neq 0$. Čia
   $$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$