Uždaviniai Ekonometrijos II pratyboms gruodžio 6 dienai

Teiginys 1 *Tegu Y_t yra martingalinių skirtumų seka, ir $\overline{Y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t$. Tegu*

i) $EY_t^2 = \sigma_t^2 > 0$ *ir* $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2 \to \sigma^2$.

ii) $E|Y_t|^r < \infty$, *tam tikram $r > 2$ ir visiems t.*

iii) $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.

Tada $\sqrt{T}\overline{Y}_T \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$.

Pastaba. Punktą ii) sprendžiant uždavinius galima ignoruoti

Teiginys 2 *Tegu turime atsitiktinių vektorių seką $\boldsymbol{Z}_t = (Z_{1t}, Z_{2t})'$. Jeigu kiekvienam $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)'$ $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{Z}_t \to N(0, \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda})$, kai $T \to \infty$ kokiai nors matricai $\boldsymbol{Q}$, tai $\boldsymbol{Z}_t \to N(0, \boldsymbol{Q})$, kai $T \to \infty$.*

1. Tegu ε_t yra vienodai pasisiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Pasinaudojant teiginiu 1 rasti ribinį $\overline{Y}_t$ pasiskirstymą, kai
   (a) $Y_t = \varepsilon_t$,
   (b) $Y_t = t\varepsilon_t$.

2. Pasinaudojant teiginiu 2 parodyti

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum \varepsilon_t \\ T^{-3/2}\sum t\varepsilon_t \end{bmatrix} \to N(0, \sigma^2 \boldsymbol{Q}),$$

   čia

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

3. Tegu turime regresiją

$$y_t = \alpha + \delta t + \varepsilon_t,\ t = 1, \dots, T$$

   Naudojantis tuo, kad

$$\begin{bmatrix} \widehat{\alpha} - \alpha \\ \widehat{\delta} - \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum \varepsilon_t \\ \sum t\varepsilon_t \end{bmatrix}$$

   Parodyti, kad

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}(\widehat{\alpha} - \alpha) \\ T^{3/2}(\widehat{\delta} - \delta) \end{bmatrix} \to N(0, \sigma^2 \boldsymbol{Q}^{-1})$$