Uždaviniai Ekonometrijos II pratyboms spalio 18 dienai

1. Tegu $X_1, \ldots, X_n$, atsitiktiniai dydžiai su baigtiniu antru momentu. Pažymėkime $\mathrm{sp}\{X_1, \ldots, X_n\}$ - visų $X_1, \ldots, X_n$ tiesinių kombinacijų aibę: $\{\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$. Pažymėkime $\overline{\mathrm{sp}}\{X_1, \ldots, X_n\}$ aibės $\mathrm{sp}\{X_1, \ldots, X_n\}$ uždarinį. Atsitiktinio dydžio X projekcija į $\overline{\mathrm{sp}}\{X_1, \ldots, X_n\}$ vadiname atsitiktinį dydį $Y = P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_n\}} X = \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_n X_n$ tenkinantį sąlygą
$$E(X - Y)^2 \to \min$$
   (a) Parodykite, kad bet kokiems atsitiktiniams dydžiams (su baigtiniu antru momentu):
   $$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_n\}}(\alpha X + \beta Y) = \alpha P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_n\}} X + \beta P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_n\}} Y$$
   (b) Parodykite, kad
   $$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_n\}} X_i = X_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$
   (c) Parodykite, kad jei Z nepriklauso nuo $X_1, \ldots, X_n$ ir $EZ = 0$, tai
   $$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_n\}} Z = 0.$$
   (d) Parodyti, kad stacionariam procesui $\{X_t\}$
   $$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_n\}} X_{n+1} = \beta_1 X_n + \beta_2 X_{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} X_2$$
   $$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_n\}} X_1 = \beta_1 X_2 + \beta_2 X_3 + \cdots + \beta_{n-1} X_n$$

2. Dalinės autokoreliacijos funkcija stacionariai sekai $\{X_t\}$ apibrėžiama taip:
$$\alpha(k) = \mathrm{Corr}(X_{k+1} - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_{k+1}, X_1 - P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_2,\ldots,X_k\}} X_1), \ k \geq 2$$
$$\alpha(1) = \rho(1).$$
   (a) Suskaičiuoti $\alpha(2)$ bet kokiai stacionariai sekai.
   (b) Parodyti, kad $AR(p)$ procesui, $\alpha(n) = 0$, kai $n > p$.

3. Tegu
$$P_{\overline{\mathrm{sp}}\{X_1,\ldots,X_m\}} X_{m+1} = \alpha_1 X_m + \cdots + \alpha_m X_1$$
   (a) Parodyti, kad koeficientai α_i tenkina lygtis
   $$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(m-1) \\ r(1) & r(0) & \ldots & r(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r(m-1) & r(m-2) & \ldots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(m) \end{bmatrix}$$
   (b) Parodyti, kad $\alpha_m = \alpha(m)$.