Uždaviniai Ekonometrijos II pratyboms spalio 11 dienai

1. Tegu turime kauzalų $ARMA(p,q)$ procesą su $p \leq q$. Parodyti, kad kauzalaus išdėstymo koeficientai ψ_j tenkina tokias lygtis:

$$\begin{cases} \psi_k - \sum_{i=1}^{\min(p,k)} \phi_i \psi_{k-i} = \theta_k, \text{ kai } k \leq q, \\ \psi_k - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \psi_{k-i} = 0, \text{kai } k > q. \end{cases} \tag{1}$$

2. Pasinaudodami tuo, kad (1) lygties sprendinys yra

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{p} C_i d_i^{-k}, \tag{2}$$

čia C_i - konstantos, d_i charakteristinio polinomo $\phi(z) = 1 - \phi z - \dots \phi_p z^p$ šaknys, raskite proceso

$$X_t - 0.7X_{t-1} + 0.1X_{t-2} = Z_t + 0.5Z_{t-1}$$

kauzalaus sprendinio koeficientus ψ_j. (*Raskite polinomo šaknis ir suraskite konstantas iš pirmų lygčių. Formulė* (2) *teisinga, tik, kai visos šaknys skirtingos ir realios*)

3. Pasinaudodami kovariacinės generuojančios funkcijos išraiška

$$g(z) = \sigma^2 \frac{\theta(z)\theta(z^{-1})}{\phi(z)\phi(z^{-1})}$$

raskite proceso $MA(2)$ kovariacinę funkciją.

4. Parodyti, kad kauzalaus $ARMA(p,q)$ proceso kovariacinė funkcija tenkina tokias lygtis:

$$\begin{cases} r(k) - \sum_{i=1}^{p} \phi_i r(k-i) = \sum_{i=k}^{q-k} \psi_i \theta_{k+i}, \text{ kai } 0 \leq k \leq q, \\ r(k) - \sum_{i=1}^{p} \phi_i r(k-i) = 0, \text{kai } k > q. \end{cases} \tag{3}$$

5. Pasinaudoję (3) lygtimis raskite proceso iš 2 užduoties kovariacinės funkcijos reikšmę taške 4.