IV. SKAIČIAVIMO SISTEMOS

Nagrinėdami natūraliuosius skaičius mes visiškai nenaudojome skaičiaus aprašymo būdo (apart pavyzdžių). Tiesa, aibės $\mathcal{N}_0$ pirmąjį elementą (kuris neina po jokio) pažymėjome simboliu 0, o aibės $\mathcal{N}$ pirmąjį elementą pažymėjome 1. Beje, $0' = 1$. Nesunku suprasti, kad lygiai taip pat sėkmingai minėtuosius elementus galėjome žymėti ir kitais simboliais. Ir akivaizdu, kad nuo to visiškai nepriklauso natūraliųjų skaičių savybės. Natūraliųjų skaičių aibėje apibrėžę sąryšius $<, >, \leq, \geq$ mes nesunkiai galime įsitikinti, kad šių tvarkos sąryšių atžvilgiu aibę galime tiesiškai sutvarkyti. Kaip ir anksčiau sutarkime, kad jei a *eina tiesiog po* b, $(b \prec a)$ tai tada $b' = a$. Naudodamiesi šiuo žymėjimu, natūraliuosius skaičius, galime žymėti eilės tvarka (sąryšio $\prec$ atžvilgiu) tokiu būdu:

$1 \prec 1' \prec (1')' \prec ((1')')' \prec (((1')')')' \prec ((((1')')')')' \dots .$

Natūraliųjų skaičių aibę $\mathcal{N}_a = 1, 1', (1')', \dots, 1^{'\cdots'}$ (a brūkšnelių) arba naudojant įprastus arabiškus simbolius $1, 2, \dots, a$ (nuo pirmojo natūraliojo skaičiaus iki a) vadinsime a ilgio natūraliųjų skaičių atkarpa.

Bijekciją, kuria aibės A elementams priskiriame natūraliųjų skaičių intervalą $\mathcal{N}_a$ vadinsime aibės A elementų *skaičiavimu.* Šiuo atveju sakysime, kad aibėje A yra a elementų. Nesunku suprasti, kad priskirti aibės A elementams natūraliuosius skaičius galime ne vieninteliu būdu. (Siūlome skaitytojui pačiam tuo įsitikinti.) Atkreipsime dėmesį į dar vieną savybę, kurią įgyja aibės A elementai, kai juos skaičiuojame. Skaičiuodami aibės A elementus, mes kiekvienam elementui priskiriame po vienintelį natūralųjį skaičių, lyg ir juos sutapatindami. Bet toks sutapatinimas leidžia tiesiškai sutvarkyti ir aibės A elementus, priskiriant jiems tokią elementų tvarką, kurią turi natūralieji skaičiai. Šį tvarkos sąryšį vadinsime *numeravimu,* o natūraliuosius skaičius, kuriais numeruojame aibės elementus vadinsime kelintiniais, t.y. pirmas, antras ir t.t. .

4.1* Nepozicinės skaičiavimo sistemos

Skaičių užrašymo bei skaitymo būdas vadinamas skaičiavimo sistema. Skaičiavimo sistemos skirstomos į pozicines ir nepozicines. Skaičiavimo sistema, kurioje kiekvieno simbolio sudarančio skaičių padėtis skaičiaus struktūroje yra svarbi priklauso vadinama pozicine skaičiavimo sistema. Priešingu atveju skaičiavimo sistema vadinama nepozicine. Tikrąją šių paaiškinimų prasmę bus galima suprasti tada, kai panagrinėsime šias sistemas.

Skaičiams, kaip ir žodžiams sudaryti reikia tam tikrų simbolių. Vieną skaičių sudarymo galimybę esame pateikę. Bet nurodytas skaičių aprašymo būdas labai nepatogus ir griozdiškas. Viena iš labiausiai vykusių senųjų civilizacijų skaičiavimo sistemų yra taip vadinama *Romėniškoji skaičiavimo sistema.* Ši sistema yra nepozicinė.

Romėniškoje skaičiavimo sistemoje skaičiai sudaromi naudojant septynis simboliu: I, V, X, L, C, D, M, kurie reiškia tokių vienetų skaičių: $1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000$, atitinkamai. Beje, šiuo atveju, supaprastindami situaciją, vienetų skaičių žymime mums įprastais dešimtainiais skaičiais.

Nurodysime keletą taisyklių, kuriomis remiantis yra sudaromi šie skaičiai. Be to sutarkime, formuluočių trumpumo dėlei, sakyti "simbolis a yra didesnis už simbolį b (atitinkamai mažesnis)" jei simbolio a atstovaujamas vienetų skaičius didesnis už simbolio b vienetų skaičių. Pavyzdžiui, V yra didesnis už I arba L mažesnis už C.

1 taisyklė. Sudarant skaičių paeiliui rašomi ne daugiau trijų vienodų simbolių. Greta esančių vienodų simbolių skaitinės reikšmės yra sudedamos.

Pavyzdžiui, II, XXX, CC. Šie simboliai atitinka tokius skaičius: $2, 30, 200$.

2 taisyklė. Jei prieš didesnį simbolį parašytas mažesnis, tai tuomet iš didesniojo simbolio skaitinės reikšmės atimama mažesniojo simbolio skaitinė reikšmė. Beje, prieš didesnį simbolį rašoma ne daugiau vienas mažesnis simbolis.

Pavyzdžiui, IV, XC, CM. Ši simboliai atitinka tokius skaičius: 4, $90, 900$.

3 taisyklė. Jei po didesnio simbolio parašytas mažesnis, tai šių simbolių skaitinės reikšmės yra sudedamos.

Pavyzdžiui, $VII, LXXX, DC$. Atitinkami skaičiai: $7, 80, 600$.

Beje, ši nepozicinė skaičiavimo sistema turi ir pozicinės skaičiavimo sistemos bruožų, būtent, ji yra adityvinė. Tai reiškia, kad skaičiaus ..., šimtai, dešimtys, vienetai rašomi ir skaitomi iš kairės į dešinę, o šių skyrių reikšmės yra sudedamos.

Visų pirma aptarsime, kaip šioje skaičiavimo sistemoje yra apibrėžiami vienetai. Taigi, nuo 1 iki 9 skaičiai sudaromi tokiu būdu:

$$I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.$$

Dešimtys nuo 10 iki 90 sudaromos analogišku būdu:

$$X, XX, XXX, XL, L, LX, LXX, LXXX, XC.$$

Šimtai nuo 100 iki 900 sudaromi taip:

$$C, CC, CCC, CD, D, DC, DCC, DCCC, CM.$$

Tūkstančiai nuo 1000 iki 3000 sudaromi pagal tokias pat taisykles, t.y.

$$M, MM, MMM.$$

Kiti tūkstančiai sudaromi tokiu būdu. Yra rašomas tūkstančių vienetų skaičius, o apačioje nurodomas indeksas M. Pavyzdžiui, $4000, 10000$, 30000 ir t.t. žymėsime taip IV_M, X_M, XXX_M.

Jei norime sudaryti skaičių, kuriame yra tūkstančių, šimtų, dešimčių ir vienetų skyriai, mes rašome šiuos skyrius paeiliui iš dešinės į kairę. Skyriai, kurių nėra, tiesiog praleidžiami.

Pavyzdžiui, užrašykime skaičius $45, 89, 238, 784, 2003, 12314, 78423$, 156987 romėniškoje skaičiavimo sistemoje. Turime XLV, $LXXXIX$, $CCXXXVIII$, $DCCLXXXIV$, $MMIII$, $XII_MCCCXIV$, $LXXVIII_MCDXXIII$, $CLVI_MCMLXXXVII$.

Manome, kad skaitytojas pastebėjo, jog gana patogu skaičius užrašyti šioje skaičiavimo sistemoje, bet šioje sistemoje labai nepatogu atlikti veiksmus. Todėl natūralu, kad naudojant šią skaičiavimo sistemą, tenka sudaryti veiksmų lenteles, be kurių neįmanoma atlikti veiksmų, nebent juos visus žinotume mintinai.

4.2 Pozicinės skaičiavimo sistemos

Pozicinės skaičiavimo sistemos nuo nepozicinių skiriasi tuo, kad skaičiams sudaryti naudojamų simbolių skaitinės reikšmės priklauso nuo padėties, kurią jis užima skaičiuje. Bet apie viską iš eilės.

Sakysime, kad skaičiavimo sistema yra $n-$ ainė, jeigu skaičiams sudaryti yra naudojama n skirtingų simbolių. Šie simboliai yra vadinami skaitmenimis. n yra vadinamas skaičiavimo sistemos pagrindu. Suprantama, simboliai kuriais žymime skaičius, gali būti labai įvairūs, tačiau mes, prisilaikydami tradicijos, naudosime įprastus simbolius.

Dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, skaičiams sudaryti, naudojami tokie skaitmenys $0, 1$.

Trejetainėje skaičiavimo sistemoje, skaičiams sudaryti, naudojami tokie skaitmenys $0, 1, 2$.

Ketvirtainėje skaičiavimo sistemoje, skaičiams sudaryti, naudojami tokie skaitmenys $0, 1, 2, 3$, ir taip toliau. Žemiau pateiktoje lentelėje pirmame stulpelyje nurodome skaičiavimo sistemos pagrindą, o antrame pateikiame šioje sistemoje vartojamus skaitmenis eilės tvarka.

Beje, visose šiose sistemose skaitmenys užrašyti didėjimo tvarka.

Kalbėdami apie įvairias skaičiavimo sistemas mes naudosime dešimtainės skaičiavimo sistemos terminologiją apibrėždami kitų skaičiavimo sistemų pagrindą sudarančių vienetų skaičių. Pavyzdžiui, sakydami kad sistema yra tryliktainė, mes naudojame sąvoką trylika pabrėždami, kad šioje sistemoje yra trylika vienaženklių skaitmenų, jeigu juos numeruotume dešimtainės skaičiavimo sistemos skaitmenimis.

Kokia bebūtų skaičiavimo sistema, skaičiai sudaromi, skaitomi bei rašomi remiantis tokiomis pat taisyklėmis. Visų pirma aptarsime skaičių sudarymo principus. Tarkime, kad skaičiavimo sistemos pagrindas turi p dešimtainių vienetų arba trumpai sakysime, kad sistemos pagrindas p. Vadinasi skaičiams sudaryti yra naudojama p skaitmenų, salyginai tarkime, kad tai žinomi simboliai, prasidedantys 0 ir pasibaigiantys simboliu q. Kaip jau esame minėję, šie simboliai vadinami skaitmenimis, be to jie atlieka ir šios skaičiavimo sistemos vienaženklių skaičių funkciją. Skaičių vadinsime $n-$ *ženkliu*, jeigu jo pirmasis skaitmuo (iš kairės į dešinę) nelygus nuliui, o šio skaičiaus sudėtyje yra n skaitmenų. Taigi, $p-$ ainėje skaičiavimo sistemoje yra p vienaženklių skaičių. Dviženklius skaičius sudarome, jungdami visus galimus skaitmenis į grupes po du, išskyrus atvejį, kai pirmoje vietoje yra nulis. Skaičiaus dydis priklauso nuo pirmojo (vyriausiojo) skaitmens dydumo. Jei šie skaitmenys lygūs, tada lyginame antruosius skaitmenis. Taigi, dviženkliai skaičiai prasideda mažiausiu dviženkliu skaičiumi 10. Toliau eilės tvarka $11, 12, \dots 1q$. Kadangi q yra didžiausias skaitmuo, tai sekantį skaičių gausime padidinę pirmąjį skaitmenį vienetu, t.y $20, 21, \dots, 2q, 30, 31, \dots,$ ir taip toliau. Pats didžiausias dviženklis skaičius bus qq. Kadangi visos dviejų simbolių galimybės buvo išnaudotos, skaičius sudaryti galime naudodami trijų skaitmenų kombinacijas. Jei lyginame du skaičius, tai didesnis tas, kurio kairiau esantis skaitmuo yra didesnis. Taigi, pats mažiausias triženklis skaičius yra 100, o pats didžiausias- qqq. Vadinasi, sudarydami $n-$ženklius skaičius mes naudojame visas galimas $n-$ simbolių kombinacijas, kaip jau minėjome, išskyrus atvejį, kai 0 yra pirmoje (kairiausioje) pozicijoje. Tad pats mažiausias $n-$ ženklis skaičius yra $100\dots0$ (vienetas ir $n-1$ nulis) o pats didžiausias $qqq\dots q$ (simboliai q kartojasi n kartų.)

Pagrindas!skaitmenys
2!0, 1
3!0, 1, 2
4!0, 1, 2, 3
5!0, 1, 2, 3, 4
6!0, 1, 2, 3, 5
7!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
9!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
10!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
11!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A
12!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B
13!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C
14!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D
15!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E
16!0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
...! ....

Pateiksime skaičių sudarymo pavyzdžių.
$p = 2$. Tada skaičių seka yra tokia:
$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, \dots,.$
$p = 6$. Tada skaičių seka yra tokia:
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, \dots,.$
$p = 13$. Tada skaičių seka yra tokia:
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 1C, 20, \dots,.$

Aptarę, skaičių sudarymo principus, nurodysime šių skaičių skaitymo taisykles. Daugiaženkliai skaičiai yra skirstomi į skyrius bei klases, suteikiant jiems pavadinimus. Apie tai kiek plačiau.

Skyriai visose pozicinėse skaičiavimo sistemose numeruojami eilės tvarka iš dešinės į kairę. Trys skyriai sudaro vieną klasę. Pirmojo klasės skyriaus ir klasės pavadinimai sutampa. Pirmasis skyrius yra vadinamas *vienetų* skyriumi, antrasis- *dešimčių*, trečiasis- *šimtų,* (šie trys skyriai sudaro vienetų klasę),

ketvirtasis- *tūkstančių,* penktasis- *dešimčių tūkstančių,* šeštasis- *šimtų tūkstančių,* (šie trys skyriai sudaro tūkstančių klasę),

septintasis- *milijonų,* aštuntasis- *dešimčių milijonų,* devintasis- *šimtų milijonų,* (šie trys skyriai sudaro milijonų klasę),

dešimtasis- *milijardų,* vienuoliktasis- *dešimčių milijardų* dvyliktasis- *šimtų milijardų,* (šie trys skyriai sudaro milijardų klasę).

Toliau išvardinsime tik klasių pavadinimus, nes tikimės skaitytojas suprato, kokiu būdu sudaromi skyrių vardai, kai žinomas klasės vardas. Taigi, po milijardų skyriaus, eilės tvarka, yra *trilijonų, kvadrilijonų, kvintilijonų, sekstilijonų, septilijonų, oktalijonų, nonalijonų, decilijonų,* klasės.

Žinoma, norint perskaityti daugiaženklį skaičių, reikia jį iš dešinės į kairę suskirtyti į grupes po tris ir skaitant skaičių pradedame vardinti klasę ir joje esančių skyrių vienetus iš kairės į dešinę. Pats kairiausias skaitmuo yra vadinamas *aukščiausiojo skyriaus vienetu*, o dešiniausias- *žemiausiojo skyriaus vienetu.* Skaitmuo, esantis skyriuje, pažymi to skyriaus vienetų skaičių. Jei skyriuje parašytas nulis, tai skaičiuje nėra to skyriaus vienetų ir šis skyrius neskaitomas.

Pavyzdžiui, perskaitykime skaičių:

$$2.401.357.842.356.899.541.021.204.357.$$

Taškais mes suskirstėme skaičių į skyrius. Skaitome skaičių vardindami skyrius: du septilijonai, keturi šimtai vienas sekstilijonas, aštuoni šimtai keturiasdešimt kvintilijonų, trys šimtai penkiasdešimt šeši kvadrilijonai, aštuoni šimtai devyniasdešimt devyni trilijonai, penki šimtai keturiasdešimt vienas milijardas, dvidešimt vienas milijonas, du šimtai keturi tūkstančiai, trys šimtai penkiasdešimt šeši.

4.3 Skaičiaus standartinė forma

$n-$ženklio sveikojo neneigiamo skaičiaus išraiška $p-$ ainėje skaičiavimo sistemoje vadiname simbolį

$$\overline{(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)}_p =$$

$$(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p, \tag{1}$$

čia $a_n \neq 0$, $a_i, i = 0, 1, \ldots, n-$ $p-$ ainės skaičiavimo sistemos skaitmenys, o dėmenys $a_0, a_1 10, \ldots, a_{n-1} 10^{n-1}$, $a_n 10^n$ vadinami skyrių vienetai. Labai svarbu, kad skaitytojas suprastų, kad šiuo atveju 10 yra $p-$ tainės skaičiavimo sistemos dešimtis, t.y. kiekybiškai ji reiškia $p-$ vienetų (o p kad ir kaip nenorėtume turime omenyje dešimtainį skaičių). Beje, tai dera su jau nagrinėtais skaičių sudarymo principais. Brūkšnys rašomas tam, kad skaitmenų nepainiotume su skaičių $a_0, \ldots, a_n$ sandauga. Kai skaičius rašome konkrečiais skaitmenimis, tai brūkšnio viršuje nerašome. Iš $p-$ ainio skaičiaus apibrėžimo išplaukia, kad kiekvieno skyriaus vienetas 10 kartų didesnis už prieš jį esančio skyriaus vienetą. Ateityje, jei atskirai nebus paminėta laikysime, kad nagrinėjame skaičių užrašytą $p-$ainėje skaičiavimo sistemoje. Be to kaip ir anksčiau. Pastebėsime, kad pirmojo skyriaus vienetas yra lygus $10^0 = 1$. Akivaizdu, kad

$$\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{psk.} = 1 \cdot 10_p = 10_p,$$

$$\overbrace{10_p + 10_p + \cdots + 10_p}^{psk.} = 10_p \cdot 10_p = 10_p^2,$$

$$\overbrace{10_p^2 + 10_p^2 + \cdots + 10_p^2}^{psk.} = 10_p \cdot 10_p^2 = 10_p^3, \ldots$$

$$\overbrace{10_p^{n-1} + 10_p^{n-1} + \cdots + 10_p^{n-1}}^{psk.} = 10_p \cdot 10_p^{n-1} = 10_p^n.$$

Simboliu (psk) trumpiname frazę: p skaitmenų.

Skaičių užrašytą (1) formule vadinsime sisteminiu skaičiumi, o (1) formulę, *standartine skaičiaus forma.*

Tarkime, kad sistemos pagrindas yra p ir ateityje mes nagrinėsime skaičių veiksmus, kai sistemos pagrindas yra laisvai pasirinktas, bet fiksuotas. Todėl skaičiavimo pagrindo nenurodysime , jei nekils neaiškumų.

1 Teorema *Bet kurio skyriaus vienetas yra didesnis už kiekvieną skaičių, sudarytą iš žemesnių skyrių vienetų, t.y.*

$$10^n > a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0. \tag{2}$$

Skaičius nagrinėjamas $p-$ainėje skaičiavimo sistemoje.

$\ominus$

Nesunku suprasti, kad

$$10 = (10 - 1) + 1,\ 10^2 = 10 \cdot 10 = (10 - 1)10 + 10,\ \cdots$$

$$10^{k-1} = (10 - 1)10^{k-2} + 10^{k-2}, 10^k = (10 - 1)10^{k-1} + 10^{k-1}.$$

Sudėję paskutiniąsias lygybes panariui ir sutraukę panašiuosius narius gauname:

$$10^k = (10 - 1)10^{k-1} + (10 - 1)10^{k-2} + \cdots + (10 - 1)10 + (10 - 1) + 1.$$

Iš paskutiniosios lygybės, ir sąryšio daugiau, išplaukia (2) lygybė.

$\oplus$

2 Teorema *Tarkime, kad skaičiai a ir b užrašyti standartine forma. Tada didesnis tas skaičius, kurio skaitmenų skaičius didesnis.*

$\ominus$

Tarkime, kad

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p,$$

$$b = (b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \ldots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0)_p.$$

Tarkime, kad $n > m$. Vadinasi, naudodamiesi 1 Teorema galime tvirtinti, kad

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0) \geq 10^{m+1} > b.$$

$\oplus$

3 Teorema Tarkime, kad du skaičiai a, b turi vienodą skaitmenų skaičių. Tada didesnis yra tas skaičius, kurio didesnis aukščiausiojo nesutampančio skyriaus skaitmuo.

$\ominus$

Tarkime, kad $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ ir $b = \overline{b_n \ldots b_2 b_1 b_0}$. Be to sakykime, kad $a_n = b_n \ldots a_{k-1} = b_{k-1}$, ir $a_k > b_k$. Tada, remdamiesi 1 Teorema gauname, kad

$$a_k 10^k + \ldots + a_1 10 + a_0 > b_k 10^k + \ldots + b_1 10 + b_0.$$

Antra vertus, remiantis prielaida gauname, kad

$$a_n 10^n + \ldots + a_{k+1}10^{k+1} = b_n 10^n + \ldots + b_{k+1}10^{k+1}.$$

Pridėję paskutiniąją lygybę prie (4) nelygybės gausime, kad

$$a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0} > b = \overline{b_n \ldots b_2 b_1 b_0}.$$

$\oplus$

4 Teorema *Kiekvienas natūralusis skaičius a vieninteliu būdu užrašomas skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas $p > 1$ tokiu būdu:*

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p,$$

čia $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ sveiki neneigiami skaičiai, mažesni už 10_p.

$\ominus$

Tarkime, kad aibei A priklauso visi tie skaičiai a, kurie gali būti užrašyti (1) formule. Įrodysime šį teiginį naudodami matematinės indukcijos metodą.

Parodykime, kad pirmąjam natūraliąjam skaičiui $a = 1$ lygybė teisinga. Matome, kad $1 = 10^0 \cdot 1$. Taigi, $1 \in A$. Tarkime, kad $1 \leq b \in A$. Parodysime, kad ir sekančiam skaičiui $b + 1$ ši formulė teisinga. Remdamiesi prielaida turime, kad

$$b = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p.$$

Tada
$$b+1 == (a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p + 1.$$
Panagrinėkime paskutiniąją lygybę. Visų pirma tarkime, kad $a_0 + 1 < 10$. Tuomet iš karto gauname, kad $b+1 \in A$. Jei $a_0 + 1 = 10$, tai skaičius

$$b+1 = (a_n 10^n + \cdots + (a_1+1)10 + 0)_p.$$

Taigi, gauname kad ir šiuo atveju $b \in A$. Vadinasi, aibė $A = \mathcal{N}$.

Parodysime, kad ši išraiška yra vienintelė. Tarkime priešingai, t.y. egzistuoja dvi skaičiaus a kanoninės išraiškos:

$$a == (a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p$$

$$a = (b_m10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0)_p.$$

Visų pirma pastebėsime, kad $m = n$, kadangi priešingu atveju, naudodamiesi 1 Teorema gautume, kad $a \neq a$. Taigi, $m = n$. Remdamiesi prielaida, kad skaičiai nėra lygūs gauname, kad egzistuoja skyrius, kurio skaitmenys nesutampa, tarkime, kad tai $k-$ asis skyrius. Vadinasi šių skyrių skaitmenys $a_k \neq b_k$. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a_k > b_k$. Bet tuomet remdamiesi 1 Teorema vėlgi gauname, kad $a \neq a$. Gauname prieštaravimą. Vadinasi mūsų prielaida buvo klaidinga, išplaukia, kad egzistuoja vienintelė skaičiaus standartinė forma $p-$ ainėje skaičiavimo sistemoje.

$\oplus$

4.4 Veiksmai $p-$ tainėje skaičiavimo sistemoje.

Sudėtis.

Mes nagrinėsime skaičių sudėtį $p-$ ainėje skaičiavimo sistemoje. Vadinasi, bet kokio skaičiaus $a = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ skaitmenys yra $p-$ ainėje skaičiavimo sistemos naudojami simboliai, turintys savybę $a_i < 10$. Pastebėsime, kad sudėdami du šios sistemos vienaženklius skaičius mes gausime: arba kitą tos sistemos vienaženklį skaičių, arba dviženklį šios sistemos skaičių mažesnį už 20.

Tarkime a ir b du sisteminiai skaičiai:

$$a = (a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p,$$

$$b = (b_n10^n + b_{n-1}10^{n-1} + \ldots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0)_p.$$

Raskime šių skaičių sumą. Naudodamiesi sudėties asociatyvumo bei komutatyvumo ir daugybos distributyvumo (sudėties atžvilgiu) dėsniais, galime šių skaičių sumą perrašyti taip:
$$a + b = ((a_n + b_n)10^n + \ldots + (a_1 + b_1)10 + a_0 + b_0)_p. \quad (3)$$
Anksčiau jau esame padarę pastabą, kad $a_i + b_i = c_i < 10$ arba $10 \le a_i + b_i = \overline{1c_i} = 10 + c_i$ yra dviženklis skaičius.

Jeigu $a_i + b_i = c_i < 10$, tai (3) reiškinio skliautuose esančius dėmenis keičiame dydžiu c_i, o jei suma dviženklis skaičius, tai ties 10^i skyriumi rašome skaitmenį c_i, o likusią dešimtį daugindami iš 10^i gausime 10^{i+1}, o tai reiškia, kad aukštesniojo skyriaus vieneto skaitmenį padidiname vienetu, kitaip tariant, tai kas buvo mintyje, pridedame prie kaimyninio skyriaus. Taigi, norint sudėti du sisteminius skaičius, mums tereikia mokėti sudėti skaitmenis prie atitinkamų skyrių. Tai gerai žinomas skaitytojui sudėties stulpeliu algoritmas. Aprašykime šį algoritmą.

Norėdami sudėti du sisteminius skaičius bet kokioje skaičiavimo sistemoje, mes rašome du skaičius taip, kad to paties skyriaus vienetai sutaptų. Beje, jei vienas skaičius turi daugiau skaitmenų negu kitas, tai tuomet mažesniojo skaičiaus aukštesniuosius skyrius papildome nuliais.

Sudėtį pradedame nuo mažiausiojo skyriaus. Jei sudėtų skaitmenų suma mažesnė už 10, tai ją rašome po brūkšniu, vienetų skyriuje ir pereiname prie sekančių skyrių skaitmenų sumos.

Jeigu skaitmenų suma didesnė arba lygi 10, tai tuomet sudarę dviženklį skaičių $10 + c_i = a_i + b_i$ *po brūkšniu rašome skaitmenį* c_i *vienetų skyriuje, o prie sekančio aukštesniojo skyriaus skaitmenų sumos pridedame vienetą,* $a_{i+1}+b_{i+1}+1$. *Su paskutiniąja suma elgiamės visiškai analogiškai. Veiksmus atliekame tol, kol sudedame visus skaitmenis iki paties aukščiausio skyriaus.*

Pavyzdžiui, sudėkime skaičius tryliktainėje skaičiavimo sistemoje, jei $a = A525$, $b = B5B9$. Turime, kad

$$A525 + B5B9 = 18B11.$$

Atimtis.

Tarkime, kad duoti du skaičiai skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas yra p:

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p;$$

ir

$$b = (b_n 10^n + b_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0)_p,$$

be to pareikalaukime, kad

$$a_n \geq b_n,\ a_{n-1} \geq b_{n-1},\ \ldots a_0 \geq b_0. \tag{4}$$

(Kaip ir anksčiau, skaičiavimo pagrindą praleisime.) Tada skaičių a ir b *skirtumu* vadinsime natūralųjį skaičių c, kuris skaičiuojamas tokiu būdu:

$$c = a - b = (a_n - b_n)10^n + \ldots + (a_1 - b_1)10 + a_0 - b_0. \tag{5}$$

Suskaičiavę vienaženklių skaičių skirtumus randame skaičių c.

Tarkime, kad (4) sąlyga nėra tenkinama, t.y. egzistuoja skaitmuo, tarkime su indeksu k, toks kad $a_k < b_k$. Taigi šiuo atveju skirtumas sveikųjų neneigiamų skaičių aibėje neapibrėžtas, nes turinys mažesnis už atėminį. Tada iš aukštesniojo $k+2$ skyriaus vienas vienetas yra perkeliamas į $k+1-$ąjį skyrių (kitaip tariant mes "pasiskoliname") ir naudodami sudėties lentelę apskaičiuojame skirtumą a_k+p-b_k. Jeigu $k+2-$antrojo skyriaus skaitmuo yra lygus nuliui, tai šiuo atveju "skoliame " iš sekančio $k+3$ skyriaus, o vienas šio skyriaus vienetas perkeliamas į $k+2$ skyrių. Tada turime, kad $a_k+10>b_k$ ir $c_k=a_k+10-b_k$. Suformuluokime skaičių

$$a=(a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_210^2+a_110+a_0)_p$$

ir

$$b=(b_m10^m+b_{m-1}10^{m-1}+\ldots+b_210^2+b_110+b_0)_p$$

atimties algoritmą.

1. *Atėminį rašome po turiniu taip, kad atitinkamų skyrių vienetai būtų vienas po kitu, iš kairės pusės prirašydami "-" ženklą, o po atėminiu brėžiame brūkšnį.*

2. *Jeigu turinio vienetų skaitmuo ne mažesnis už atėminio vienetų skaitmenį, tai jų skirtumą rašome atitinkamų vienetų skyriuje.*

3. *Jeigu atėminio vienetų skaitmuo didesnis už turinio vienetų skaitmenį, t.y.* $a_0<b_0$, *o* $a_1\neq 0$, *tai skaitmenį* a_1 *mažiname vienetu, o tą vienetą pridėję prie* a_0, *gauname dviženklį skaičių* $10+a_0>b_0$, *iš kurio atimame skaičių* b_0. *Gautą skirtumą rašome atitinkame vienetų skyriuje po brūkšniu ir skaičiuojame sekančių, į kairę, skyrių vienetų skirtumą.*

4. *Jei atėminio vienetų skaitmuo yra didesnis už turinio vienetų skaitmenį, o turinio kelių iš eilės aukštesnių skyrių vienetų skaičius lygus nuliui, tai imame, iš kairės, pirmąjį skyrių kurio vienetų skaičius nelygus nuliui ir sumažiname jį vienetu, o visus žemesnius skyrius, kurių vienetų skaičius buvo lygus nuliui, padidiname* $(10-1)_p$ *vienetu. Turinio skyriaus vienetą, iš kurio atimame, padidinę 10 vienetų gauname dviženklį skaičių* $10+a_0$, *iš kurio atėmę* b_0, *rezultatą užrašome po brūkšniu vienetų skyriuje. Toliau skaičiuojame gretimo, iš kairės, skyriaus vienetų skirtumą, samprotaudami analogiškai.*

5. *Atimties operacija baigiama, kai apskaičiuojamas aukščiausio skyriaus vienetų skirtumas.*

Pastaba. Atimtis, kaip paprastai tikrinama sudėties pagalba. (Kaip?). Dar kartą pabrėžiama, sudėties operacija atliekama $p-$ ainėje skaičiavimo sistemoje, tad naudojamas simbolis 10$-$ yra $p-$ ainės skaičiavimo sistemos dešimtis, kuri nieko bendro neturi su mums įprasta dešimtimi, nebent kai $p-$ yra mums įprasta dešimtainė sistema.

Pavyzdžiui $238_p-164_8=51_8$, $AC004_{15}-97326_{15}=4BDD_{15}$.

Daugyba.

1. *Dviejų vienaženklių skaičių sandauga skaičiuojama naudojantis daugybos lentelėmis.*

2. *Dauginti skaičių iš skyriaus vieneto, reikia prirašyti prie dauginio iš dešinės tiek nulių, kiek jų yra daugiklyje (skyriaus vienete).*

Tarkime, kad duoti skaičiai

$$a=(a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_210^2+a_110+a_0),$$

ir

$$b=10^k$$

sistemoje, kurios pagrindas yra p. Tada

$$ab = (a_n a_{n-1} \dots a_0 \overbrace{0 \dots 0}^{k})_p.$$

Pavyzdžiui, $1AC86 \cdot 10^3 = 1AC86000$.

3. *Dauginant du skaičius, kurių visų skyrių, išskyrus aukščiausius, vienetų skaičiai lygūs nuliui, reikia sudauginti aukščiausių skyrių vienetus ir prie gautos sandaugos prirašyti iš dešinės tiek nulių, kiek jų yra dauginyje ir daugiklyje kartu.*

Tarkime, kad

$$a = a_n 10^n + 0 \cdots 10^{n-1} + \dots + 0 \cdots 10 + 0$$

$$b = b_k 10^k + 0 \cdots 10^{n-1} + \dots + 0 \cdots 10 + 0.$$

Tada

$$a \cdot b = \overline{c}0 \dots 0,$$

čia $c = a_n \cdot b_k$ ir nulių skaičius skaičių a ir b sandaugoje lygus $n + k$.

Aptarsime, kaip reikia dauginti daugiaženklį skaičių iš vienaženklio.

4. *Daugiaženklio ir vienaženklio skaičių daugyba yra pagrįsta dėmenų sumos ir dauginamojo vienaženklio skaičiaus daugybos taisykle.*

Tarkime, kad

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0); \quad b = b_0.$$

Tada

$$a \cdot b = (a_n 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0) b_0 =$$

$$= (a_n b_0) 10^n + (a_{n-1} b_0) \cdot 10^{n-1} + \dots + (a_1 b_0) \cdot 10 + (a_0 b_0). \tag{2}$$

Sandaugas $a_k b_0$, $(k = 0, 1, \dots, n)$ randame naudodami daugybos lenteles. Šios sandaugos yra vienaženkliai arba dviženkliai skaičiai. Jei sandauga, tarkime $a_k b_0 = c_k$ yra vienaženklis skaičius, tai (2) reiškinyje 10^k skyriuje bus c_k vienetų, o jeigu dviženklis, tai

$$(a_k b_0) 10^k = (d_{k+1} 10 + t_k) 10^k = d_{k+1} 10^{k+1} + t_k 10^k.$$

Beje, paskutinioji lygybė apima ir pirmąjį atvejį, kuris gaunamas, kai $d_{k+1} = 0$. Taigi, pačiu bendriausiu atveju turime

$$(a_0 b_0) = d_1 10 + t_0$$

$$(a_1 b_0) 10 = d_2 10^2 + t_1 10$$

....

$$(a_{n-1} b_0) 10^{n-1} = d_n 10^n + t_{n-1} 10^{n-1},$$

$$(a_n b_0)10^n = d_{n+1}10^{n+1} + t_n 10^n.$$

Įrašę šias lygybes į (2) reiškinį gauname

$$a \cdot b_0 = d_{n+1}10^{n+1} + (d_n + t_n)10^n + \ldots + (d_1 + t_1)10 + (t_0).$$

Pažymėję $c_0 = t_0, c_{n+1} = d_{n+1}, c_i = d_i + t_i;\ i = 1 \ldots n$, ir apskaičiavę šias sumas gauname, kad

$$a \cdot b = \overline{(c_{n+1} c_n \ldots c_1 c_0)}.$$

5. *Daugiaženklių skaičių daugyba yra pagrįsta skaičiaus iš kelių dėmenų sumos taisykle.*

Tarkime, kad

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p,$$

$$b = (b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \ldots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0)_p.$$

Tada

$$a \cdot b = (a_n b_m)10^{n+m} + (a_n b_{m-1} + an - 1b_m)10^{n+m-1} +$$

$$\ldots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)10 + (a_0 b_0).$$

Apskaičiavę skliaustuose esančias sumų sandaugas (skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas p,) gausime ieškomąją sandaugą.

Aptarsime daugybos algoritmą.

Tarkime, kad skaičiai duoti (3) lygybėmis.

1. *Daugiklį rašome po dauginiu, iš kairės pusės prirašome* " $\times$ " *ženklą ir po daugikliu brėžiame brūkšnį.*

2. Dauginio ir daugiklio vieneto b_0 sandaugą rašome po brūkšniu.

3. *Dauginio ir daugiklio aukštesniojo skyriaus vieneto* b_1 *sandaugą rašome po pirmąja sandauga* ab_0 *perkėlę ją per vieną skyrių į kairę*

4. *Toliau iš eilės dauginame dauginio ir daugiklio sekančių skyrių vienetus ir rezultatus rašome po, prieš tai buvusia sandauga, perkeldami ją per vieną skyrių į kairę.*

5. *Kai atliekame paskutiniąją sandauga* $a \cdot b_m$, *gautąsias visas* $m + 1$ *sandaugas sudedame.*

Pavyzdžiui, $234_6 \cdot 432_6 = 155212$.

Dalyba.

Kaip paprastai laikome, kad skaičiavimo sistemos pagrindas yra p. Tarkime, kad skaičiai a ir b yra vienaženkliai, be to skaičius b dalo skaičių a. Vadinasi $\exists k \in \{0, 1, \ldots, q\}$, $(q = 10_p - 1)$ toks, kad teisinga lygybė $a = kb$ arba $a : b = k$. Kitaip tariant, skaičius b dalo skaičių a be liekanos. Dalybos teisingumą tikriname naudodami daugybos operaciją. k, kaip jau žinome, yra vadinamas dalmeniu. Taigi, daliklio ir dalmens sandauga turi būti lygi daliniui. Vienaženklių skaičių dalyba kartais vadinama lenteline dalyba, kadangi šiai operacijai atlikti pakanka žinoti daugybos lentelę.

Tarkime, kad dalinys yra dviženklis, o daliklis vienaženklis, skaičiai. Tada, dalmuo gali būti vienaženklis arba dviženklis skaičius.

Tarkime, kad $a = a_1 10 + a_0$, o daliklis yra b ir $a_1 < b$. Tada dalindami skaičių $\overline{a_1 a_0}$ iš skaičiaus b mes ieškome pačios didžiausios sandaugos kb, neviršijančios skaičiaus a, t.y.

$$a = kb.$$

Šiuo atveju dalmuo k yra vienaženklis skaičius nedidesnis už skaičių b.(Kodėl?) Jeigu dalinio antrojo skyriaus skaitmuo didesnis už daliklį, tai rezultatas bus dviženklis skaičius. Tarkime, kad $a = a_1 10 + a_0$ ir b tokie, kad $a_1 \geq b$. Daugybos lentelėje randame skaičių k_1, kuriam teisingas sąryšis $a_1 = bk_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b$. Liekaną r_1 dauginame iš 10 ir pridedame prie skaitmens a_0. Tada gautą skaičių $r_1 10 + a_0$ vėl dalijame iš skaičiaus b. Gauname lygybę $r_1 + 10 = bk_0 + r_0,\ 0 \leq r_0 < b$. Surašę šiuos sąryšius į pradinę lygybę gauname:

$$a = a_1 10 + a_0 = (bk_1 + r_1)10 + a_0 = bk_1 10 + k_1 10 + a_0 = bk_1 10 + bk_0 + r_0 =$$

$$b(k_1 10 + k_0) + r_0.$$

Taigi, $a = bk + r,\ + \leq r < b,\ \ k = \overline{k_1 k_0}$.

Tarkime, kad skaičius a yra daugiaženklis, o daliklis vienaženklis. Be to sakykime, kad $a_n \geq b_0$. Dalome skaičių a_n iš b_0 su liekana:

$$a_n = k_n b_0 + r_n,\ 0 \leq r_n < b_n.$$

Tada teisinga lygybė:

$$a = (k_n b_0 + r_n)10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

arba

$$a - (k_n b_0)10^n = r_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Kadangi $r_n < b_0$, tai dalindami dviženklį skaičių $r_n 10 + a_{n-1}$ iš b_0 gauname

$$r_n 10 + a_{n-1} = k_{n-1} b_0 + r_{n-1},\ 0 \leq r_{n-1} < b_0,\ 0 \leq k_{n-1} < 10.$$

Todėl teisinga lygybė

$$a - (k_n b_0)10^n - k_{n-1} b_0 10^{n-1} = r_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Tęsdami šį procesą gausime, kad

$$a - b_0(k_n 10^n + k_{n-1}10^{n-1} + \ldots + k_1 10 + k_0) = r_0.$$

Tada
$$a = b_0(k_n 10^n + k_{n-1}10^{n-1} + \ldots + k_1 10 + k_0) + r_0.$$
Pažymėję skliaustuose esančią sandaugų sumą raide k gauname daugiaženklio skaičiaus dalybos iš vienaženklio, su liekana, taisyklę. Šiuo atveju
$$a = kb_0 + r_0.$$
Jeigu $a_n < b_0$, tai dalybą pradedame iš karto nuo dviženklio skaičiaus $a_n 10 + a_{n-1}$. Tada dalmenyje bus vienu skaitmeniu mažiau.

Aukščiau atliktą tyrimą apibendrinkime tokia

Išvada *Dalmens skaitmenų skaičius lygus dalinio ir daliklio skaitmenų skaičiaus skirtumui arba vienetu už jį didesnis.*

Siūlome tai įrodyti skaitytojui.

Aptarsime dalybos procedūrą bendru atveju, suformuluodami dalybos algoritmą.

Tarkime, kad
$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p$$
$$b = (b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \ldots + b_2 10^2 + b_1 10 + b_0)_p.$$
1. *Tegu $a > b$ ir abu skaičiai yra vienaženkliai. Tada dalmuo k yra randamas naudojantis daugybos lentele.*

2. Sakykime, kad $a > b$ ir n¿m. Šiuo atveju brėžiame dalybos kampu ženklą, kurio kairėje pusėje rašome dalinį, o dešinėje daliklį. Po to ieškome dalmens ir liekanos. Tai realiuojame tokiu būdu.

3. Dalinyje iš kairės pusės atskiriame tiek skaitmenų, kiek jų yra daliklyje, jeigu dalinio atskirtųjų skaitmenų sudarytas skaičius yra ne mažesnis už daliklį ir atskiriame vienu skaitmeniu daugiau negu daliklyje kitu atveju. Daugindami daliklį b iš skaičių $1, 2, \ldots p-1$, randame didžiausią skaičiaus b kartotinį $k_n \in \{1, \ldots, p-1\}$ tokį, kad $k_n b$ neviršytų atskirtųjų skaitmenų sudaryto skaičiaus, dalinyje. Šį skaičių rašome po brūkšnių, esančiu po skaičiumi b. Tuo tarpu sandaugą $k_n b$ rašome po daliniu a taip, kad skaičiaus $k_n b$ žemiausiojo skyriaus vienetai būtų užrašyti po išskirtojo skaičiaus, dalinyje, žemiausiojo skyriaus vienetais. Po skaičiumi $k_n \cdot b$ brėžiame brūkšnį ir po juo rašome išskirtojo skaičiaus ir $k_n \cdot b$ skirtumą r_n (dalybos liekaną).

4. Prie gautojo skirtumo, iš dešinės, prirašome dalinio skaitmenį a_{n-r-1}. Gautą skaičių lyginame su dalikliu b. Jeigu gautasis skaičius ne mažesnis už b, tai kartojame 3. dalies algoritmą. Jeigu gautas skaičius mažesnis negu b, tai prie jau esamo skaičiaus prirašome sekantį (žemesnio skyriaus) dalinio skaitmenį ir grįžtame prie 3. algoritmo pradžios, o kitu atveju kartojame 4. algoritmą. Tarkime, kad buvo nukelta s skaitmenų, kol turėjome kartoti 3. algoritmą. Tada prie skaitmens k_n yra prirašomas $s-1$ nulis.

5. Dalybą baigiame, kai nukėlę dalinio žemiausiojo skyriaus vienetą gauname skaičių, mažesnį už b. Dar kartą pakartoję 3. algoritmą gauname paskutinį kartotinumą k_0, bei šį kartotinumą atitinkančią liekaną r_0. Tada,
$$a = b \cdot \overline{(k_n k_{n-1} \ldots k_1 k_0)_p} + r_0 = b \cdot k + r_0.$$

Tada skaičių a ir b dalmuo lygus k, o dalybos liekana yra r_0.

4.5 Skaičiavimo sistemos pagrindo keitimas.

Tarkime, kad duotas skaičius

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p.$$

Kaip atrodys šis skaičius skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas yra q. Aptarsime algoritmus, kuriais naudodamiesi, galėsime atsakyti į šį klausimą.

Sakykime, kad pradinis ir ieškomasis pagrindai susieti lygybe $p < q$. Bet tada visi skaičiaus a skaitmenys tiek pirmoje skaičiavimo sistemoje, tiek ieškomoje turi tą pačią prasmę, t.y. reiškia tą patį vienetų skaičių. Be to 10_p yra vienaženklis skaičius, tarkime q_0, skaičiavimo sistemoje kurios pagrindas yra q. Pradinį skaičių perrašykime taip:

$$a = (a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0)_p$$

$$= (a_n q_0^n + a_{n-1}q_0^{n-1} + \ldots + a_1 q_0 + a_0)_q.$$

Atlikę aritmetinius veiksmus, paskutiniąjame reiškinyje, gausime skaičių skaičiavimo sistemoje, kurios pagrindas q. Pavyzdžiui, skaičių užrašytą penketainėje skaičiavimo sistemoje $p = 5$, perrašykime skaičiavimo sistemoje $q_0 = 8$. Tada

$$234_5 = (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4)_5 = (2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4)_8 =$$

$$(2 \cdot 31 + 17 + 4)_8 = (62 + 23)_8 = (105)_8.$$

Tada, kai $q < p$ mes elgiamės panašiai, t.y. visų pirma užsirašome skaičiaus a standartinę formą, o po to visus skaičiaus a skaitmenis, bei pagrindo vienetų skaičių perrašome naujosios skaičiavimo sistemos skaitmenimis. Pavyzdžiui, skaičių užrašytą vienuoliktainėje skaičiavimo sistemoje perrašykime septynetainėje skaičiavimo sistemoje:

$$2A_{11} = (2 \cdot 10 + A)_{11} = (2 \cdot 13 + 14)_7 = (26 + 14)_7 = (43)_7.$$

Pateiksime ir kitą būdą, kurį galima naudoti keičiant skaičiavimo sistemos pagrindą.

Norint skaičių a , užrašytą $q-$ainėje skaičiavimo sistemoje, perrašyti $p-$ainėje skaičiavimo sistemoje, reikia *$q-$ainėje skaičiavimo sistemoje užrašytą skaičiaus išraišką, dalinti iš $p-$ ainės skaičiavimo sistemos pagrindo, perrašyto $q-$ ainės skaičiavimo sistemos skaičiumi, tokiu būdu:* visų pirma dalijame a iš p, perrašyto $q-$ ainėje skaičiavimo sistemoje;

$$a = k_0 p + r_0, 0 \leq r_0 \leq p, k_0 < a.$$

Tarkime, kad $k_0 > p$. Tada dalijame k_0 iš p :

$$k_0 = k_1 p + r_1, 0 \leq r_1 < p, k_1 < k_0.$$

Jeigu $k_1 > p$, tai toliau dalijame iš p :

$$k_1 = k_2 p + r_2, 0 \leq r_2 < p, k_2 < k_1.$$

Ir taip toliau. Šis procesas yra baigtinis, kadangi seka $a, k_1, k_2, \ldots$ griežtai mažėja, vadinasi egzistuoja dalmuo k_n, kad $k_n < p$. Taigi

$$k_{n-2} = k_{n-1} p + r_{n-1}, 0 \leq r_{n-1} < p, k_{n-1} > p;$$

$$k_{n-1} = k_n p + r_n, 0 \leq r_n < p, k_n < p.$$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia

$$a = k_n p^{n+1} + r_n p^n + r_{n-1} p^{n-1} + \ldots + r_2 p^2 + r_1 p + r_0.$$

Pastebėsime, kad visi $r_i, (i = 1, \ldots, n)$ ir k_n yra mažesni už p, taigi jie yra $p-$ ainės skaičiavimo sistemos skaitmenys. Paskutinėje lygybėje vietoje p parašę 10, gausime pradinio skaičiaus kanoninę išraišką $p-$ ainėje skaičiavimo sistemoje. Pavyzdžiui, dešimtainį skaičių 5406 perrašykime aštuonetainėje skaičiavimo sistemoje. Remdamiesi aukščiau aprašytu dalybos algoritmu gauname tokią lygybių seką

$$5406 = 675 \cdot 8 + 6, \quad 675 = 84 \cdot 8 + 3, \quad 84 = 10 \cdot 8 + 4,$$
$$10 = 1 \cdot 8 + 2.$$

Tada $5406_{10} = 12436_8$.

Uždaviniai

1. Pateiktus skaičius užrašykite romėniškoje skaičiavimo sistemoje:

$$56, \ 249, \ 785, \ 982, \ 3487, \ 48736, \ 875941.$$

Kaip atrodo pateiktieji skaičiai dešimtainėje skaičiavimo sistemoje:

$$CCXXIV, \ DVI, \ CMXLVII, \ XXXII_M DCCXCIII,$$

$$CXLVIII_M LXVI, \ CM_M XCIX.$$

2. Atlikite veiksmus 9−ainėje, 11− ainėje bei 15− ainėje skaičiavimo sistemose, atitinkamai:

$$(245 + 658) \cdot 67 - 42789.$$

3. Padalinkite su liekana skaičius nurodytose skaičiavimo sistemose:

$$45896 : 42_{12}, \ 10110011 : 11_2; \ 2013223 : 12_4, \ A9F8CD4 : BA_{16}.$$

4. Raskite skaičių $BD4$ ir $98A$ bendrą didžiausią daliklį ir bendrą mažiausią kartotinį 14− ainėje ir 15− ainėje skaičiavimo sistemose.

5. Atlikite veiksmus:

$$((548976 - 48927) \cdot 423) : 24$$

12− ainėje ir 13− ainėje skaičiavimo sistemose.

6. Pakeiskite nurodytų skaičių skaičiavimo sistemos pagrindą.

$$a) \ (268)_9 \to (\ldots)_{12} \to (\ldots)_2 \to (\ldots)_6.$$

$$b) \ (DC)_{15} \to (\ldots)_7 \to (\ldots)_{10}.$$