2. LOGIKOS PRADMENYS

2.1$*$ Įvadinės pastabos

Matematika, kaip ir bet kuri kita mokslo sritis, visų pirma yra tam tikra kalba. Tik ši mokslo sritis iš kitų išsiskiria tuo, kad naudojama kalba yra formalizuota ir dar daugiau, vartojami sakiniai tenkina tam tikras sąlygas, apie kurias kalbėsime žemiau.

Mokslinės veiklos medžiaga yra patirties išbandyti ir mąstymo apibendrinti produktai, kuriuos vadiname sąvokomis. Sąvokos ištakos yra terminai, kuriuos mes, bendru sutarimu, suvokiama vienodai. Sąvokos struktūrą sudaro- turinys ir apimtis. Sąvokos turinį sudaro *visuma požymių, kuriais pasižymi suvokiamas objektas.* Sąvokos apimtis- tai *visuma objektų, pasižyminčių savybėmis, išvardytomis sąvokos turinyje.* Jei išplečiame sąvokos apimtį, tai sumažiname jos turinį ir atvirkščiai. Pavyzdžiui, sąvoką "trikampis" išplėskime tokiais požymiais - "kurio visos kraštinės lygios". Gauname naują, lygiakraščio trikampio sąvoką. Suprantama, kad *trikampio* sąvokos turinį sudaro daugiau objektų, negu *lygiakraščio* trikampio sąvokos turinį.

Matematinėje kalboje yra naudojamos sąvokos, kurios skirstomos į pirmines (neapibrėžiamas) ir išvestines (apibrėžiamas). Su šiomis sąvokomis esame susidūrę jau mokykloje. Prisiminkime kelias iš jų- *aibė, tiesė, taškas, plokštuma, atstumas ir t.t.*. Sąvokos, kurios nusakomos naudojant kitas sąvokas yra vadinamos išvestinėmis sąvokomis (apibrėžiamomis). Sąvokos (apibrėžiamos ar pirminės) nusakomas tam tikrais požymiais, kuriais pasižymi nagrinėjamasis objektas arba appriori laikome, kad sąvokos požymiai žinomi ir jų vardinti nereikia. Tai būdinga neapibrėžiamoms sąvokoms. Pavyzdžiui, mes *aibės* sąvokos neapibrėžiame. Tuo tarpu *kvadrato* sąvoka yra apibrėžiama. Apibrėžiamos sąvokos apimtį sudaro objektai, kurie turi savybes išvardintas sąvokos turinyje. Pastebėsime, kad keičiantis sąvokos turiniui kinta ir sąvokos apimtis ir atvirkščiai. (Pateikite pavyzdžių!) Apibrėžiamos sąvokos būtinai nusakomos remiantis jau apibrėžtomis sąvokomis. Suprantama, kad pirminių sąvokų apibrėžti negalime, nes norėdami jas apibrėžti turėtume naudoti apibrėžtas sąvokas ir taip toliau. Tad neišvengiamai susiduriame su problema- turi egzistuoti sąvokos, kurios iš anksto (pagal susitarimą) turi būti pirminės t.y. neapibrėžiamos. Apibrėždami sąvokas dažnai naudojame įvairias tekstines bei grafines priemones, kurios su pačia sąvoka susiję tik tiek, kad jos padeda suvokti ir įsisavinti naujos sąvokos turinį.

Plačiau pakalbėsime apie apibrėžiamas sąvokas. Apibrėždami sąvokas, mes jas įtraukiame į tam tikrą sąvokų grupę, kurią vadiname *giminine sąvoka* arba formuojame naują sąvokų grupę, jau esančios gimininės sąvokos sudėtyje, kurią vadiname *rūšiniu skirtumu.* Gimininė sąvoka, tai sąlyginis pavadinimas, priklausantis nuo mūsų tikslo. Toks sąvokų skirstymas ir taikomas matematikoje. Apibrėždami sąvokas, paprastai mes nurodome didesnės apimties, daugiausia sutampančių požymių turinčią gimininę sąvoką, kuri nurodo apibrėžiamosios sąvokos apimtį. Kitame apibrėžimo žingsnyje turi būti nurodomi požymiai, kuriais mes naują sąvoką išskiriame iš kitų, gimininės sąvokos turinyje esančių, sąvokų. Kitaip tariant nurodome rūšinį skirtumą.

Pavyzdžiui, jei norime apibrėžti figūrą, kuri turi tris vienodas kraštines, mes visų pirma nurodome tokios figūros gimininę sąvoką "trikampis", o po to nurodysime rūšinį skirtumą, t.y. nurodome požymius, kuriais apibrėžiamą trikampį išskiriame iš kitų, t.y. "lygios kraštinės", ir pabaigoje, trikampį, turintį lygias kraštines pavadiname, *lygiakraščiu* *trikampiu* . Gauname naują, lygiakraščio trikampio, sąvoką.

2.2 Teiginių veiksmai. Loginės formos

Matematinę kalbą sudarantys sakiniai yra arba klaidingi arba teisingi. Tokio pobūdžio sakiniai vadinami teiginiais. Pastebėsime, kad šnekamoje kalboje ne tiek jau daug yra teiginių. Visi klausiamieji, atkreipiantys dėmesį, šaukiamieji ir kt. nėra teiginiai. Pateiksime teiginio apibrėžimą, paaiškindami sąvokas 'teisingas' ir 'klaidingas'.

Pažymėkime raide S aibę, kurią sudaro visi sakiniai. Tarkime, kad funkcija $\mathcal{T}$ kokiems nors aibės S elementams priskiria aibės $\{0,1\}$ elementus, trumpai $\mathcal{T}:S \to \{0,1\}$. Aibės $D(\tau)$ elementus vadinsime teiginiais, funkciją $\mathcal{T}$ vadinsime *teisingumo funkcija,* o skaičius $\{0,1\}$ teisingumo reikšmėmis, kurios priešingos viena kitai. Pažymėkime teiginių aibę raide $T = D(\tau)$. Jeigu sakiniui $s \in T$, priskiriamas 0, t.y., ($\mathcal{T}(s) = 0$) tai sakysime, kad sakinys klaidingas, kitu atveju ($\mathcal{T}(s) = 1$) - teisingas. Vadinasi, šios funkcijos pagalba visus sakinius galime suskirstyti į dvi aibes- teiginių aibę ir sakinių, kurie neutralūs taisyklės atžvilgiu, aibes. Trumpai tariant, *teiginys yra sakinys, kuris arba klaidingas arba teisingas.* Aibėje T apibrėžkime operacijas (jungtis), kurių atžvilgiu ši aibė būtų uždara. Kitaip tariant, atlikdami teiginių veiksmus, vėl gausime teiginį.

Teiginių aibėje naudojamos tokios teiginių jungtys (operacijų ženklai): 'ne', 'arba', 'ir', 'jei..., tai', 'tada ir tik tada' , o matematiniai šių jungčių žymenys yra $\overline{(\ldots)}$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Apibrėžkime operacijas teiginių aibėje.

1. **Neigimo operacija.** *Tegu $p \in T$. Tuomet sakinį 'ne p' (žymėsime $\overline{p}$) vadinsime duotojo teiginio p neiginiu. Jo teisingumo reikšmė priešinga teiginio p teisingumo reikšmei.* Pavyzdžiui paneigę teiginį "$2 > 0$" gausime teiginį "$2 \leq 0$".

2. **Teiginių disjunkcija.** *Sakinį ' p arba q ' vadinsime teiginių p, q disjunkcija, (žymėsime $p \vee q$). Šis sakinys laikomas klaidingu tuo atveju, kai abu teiginiai p, q yra klaidingi.* Taigi, likusiais atvejais teiginys bus teisingas. Tada teiginys 'visi žmonės gailestingi' arba 'yra negailestingų žmonių' yra teisingas, kadangi abu teiginiai kartu būti neteisingi negali. Šis veiksmas kartais vadinamas logine sudėtimi.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. **Teiginių konjunkcija.** *Sakinį 'p ir q ' vadinsime teiginių konjunkcija (žymėsime $p \wedge q$). Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abu teiginiai p, q teisingi.* Vadinasi teiginys 'duotojo trikampio kampų suma ne didesnė už 180 laipsnių' ir 'duotojo trikampio

kampų suma didesnė už 180 laipsnių'- neteisingas. Šis veiksmas kartais dar vadinamas logine daugyba.

4. **Teiginių implikacija.** *Sakinį 'jei p, tai q ' vadinsime šių teiginių implikacija (žymėsime $p \Rightarrow q$). Šis sakinys laikomas klaidingu tik tuo atveju, kai p teisingas, o q klaidingas.* Vadinasi teiginys, jei 'lygiakraščio trikampio kraštinės nelygios,' tai 'lygiakraščio trikampio kampai nelygūs' yra teisingas, nes abu teiginiai klaidingi. Teiginys 'p' yra vadinamas prielaida, o 'q' išvada.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

5. **Teiginių ekvivalencija.** *Sakinį 'p tada ir tik tada kai q ' vadinsime šių teiginių ekvivalencija. Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa.* Šią operaciją žymėsime $p \Leftrightarrow q$. Kartais šis teiginys dar vadinamas logine lygybe. Pateiksime pavyzdį. Sakykime, kad teiginys q yra sakinys 'trikampis yra status', o teiginys p nusakomas sakiniu 'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'. Tuomet teiginys '$p \Leftrightarrow q-$ ' skaitytojui gerai žinoma Pitagoro teorema.

Naudojant šias logines operacijas, galime sudaryti sudėtinius teiginius.

Sakinius, sudarytus baigtinį skaičių kartų atlikus teiginių logines operacijas, nurodydant jų atlikimo tvarką skliaustais, vadinsime sudėtiniais teiginiais arba dažniau- loginėmis formomis.

Elementariuosius teiginius, sudarančius loginę formą vadinsime *propoziciniais kintamaisiais.* Tada, kai propoziciniams kintamiesiems priskiriamos konkrečios teisingumo reikšmės, tai gauname *loginės formos interpretaciją*.

Aukščiau apibrėžtos dviejų teiginių loginės operacijos vadinamos paprasčiausiomis loginėmis formomis.

Teiginys

$$\alpha(p, q, r) := \overline{((p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r))}$$

yra loginė forma priklausanti nuo elementariųjų teiginių p, q, r. Simbolį $l(\cdot) := b,\ b \in T$ naudosime tuo atveju, kai loginę formą b užrašome trumpai, nurodydami skliaustuose teiginius, kurie sudaro loginę formą b, o šiai formai suteikiame vardą l. Tai nėra lygybės ženklas, t.y. dviejų objektų sutapatinimas, o tik dešinėje pusėje esančios formos trumpinys. Sudarykime šios loginės formos teisingumo lentelę, bet prieš tai pažymėkime

$$p_1 := p \Rightarrow q,\ p_2 := p \vee r,\ p_3 := p_1 \wedge p_2,\ L := \overline{p_3}.$$

Tada

p	q	r	p_1	p_2	p_3	L
1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1

Tarkime, kad $p \in T$ yra teiginys. Sakykime, kad jis teisingas. Tada šį teiginį patogu žymėti $p^1 := p$. Jeigu teiginys p yra klaidingas, tai žymėsime šį teiginį $p^0 := p$. Taigi, visas loginės formos interpretacijas galime užrašyti tokiu būdu:

$$\alpha(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_n^{k_n}), \quad k_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n.$$

Matome, kad jei loginė forma priklauso nuo n elementariųjų teiginių, tai ši forma turi 2^n interpretacijų. Iš paskutiniosios lentelės matyti, kad nagrinėjamos loginės formos interpretacija $\alpha(p^0, q^1, r^1)$ yra klaidingas teiginys.

Dvi logines formas $\alpha(p_1, \ldots p_n)$ ir $\beta(p_1, \ldots p_n)$, kurių teisingumo reikšmės sutampa, esant bet kokiam teiginių $p_1, \ldots, p_n$ teisingumo reikšmių rinkiniui, vadinsime *logiškai ekvivalenčiomis* ir žymėsime

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \beta(p_1, \ldots, p_n).$$

Kitaip tariant, kokį bepasirinktume teiginių rinkinį su žinomomis teisingumo reikšmėmis, abiejų loginių formų interpretacijos turės tą pačią teisingumo reikšmę.

Loginę formą, kurios bet kokios interpretacijos teisingumo reikšmė lygi 1, vadinsime *tautologija*. Paprastai tautologija žymima raide $I(\ldots)$. Jeigu loginės formos teisingumo reikšmė visuomet lygi nuliui, tai ši forma vadinama loginiu nuliu. Ją žymime raide O.

Tautologija yra vadinama logikos dėsniu. Pateiksime keletą logikos dėsnių.

1. Dvigubo neigimo dėsnis: $(\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p) \equiv I(p)$;
2. Negalimo trečiojo dėsnis: $(p \vee \overline{p}) \equiv I(p)$;
3. Neprieštaravimo dėsnis: $(p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow O) \equiv I(p)$;

4. Kontrapozicijos dėsnis: $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})) \equiv I(p, q)$;
5. Silogizmo dėsnis: $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \equiv I(p, q, r)$;
6. de Morgano dėsniai:

$$(\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}) \equiv I(p, q), \quad (\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}) \equiv I(p, q);$$

7. Teisingos išvados dėsnis: jei žinoma, kad teiginys $p \Rightarrow q$ ir prielaida p yra teisingi teiginiai, tai tada išvada teisingas teiginys;
8. Klaidingos prielaidos dėsnis: jeigu teiginys $p \Rightarrow q$ yra teisingas, o jos išvada q yra klaidingas teiginys, tai sąlyga p yra klaidingas teiginys;
9. Implikacijos neigimo dėsnis: $(\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}) \equiv I(p, q)$;
10. Ekvivalencijos neigimo dėsnis: $((\overline{p \Leftrightarrow q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow q)) \equiv I(p, q)$;

Skaitytojui paliekame savarankiškai įsitikinti, kad kairėje pusėje esančios loginės formos iš tiesų yra tautologijos, t.y. visos interpretacijos yra teisingi teiginiai.

2.3 Sakiniai su kintamaisiais (predikatai)

Apibrėžimas *Sakinį, kuriame yra neapibrėžtos sąvokos (kintamieji) ir kuris tampa teiginiu šias sąvokas (kintamuosius) apibrėžus, vadinsime predikatu.* Jei sakinyje yra n nežinomųjų, tai šis predikatas vadinamas $n-$ viečiu.

Paprastumo dėlei laikykime, kad predikatas vienvietis. Pastebėsime, kad kitu atveju, visos sąvokos būtų analogiškos, tik žymėjimai taptų sudėtingesni. Pavyzdžiui, sakinys $x < 2$ yra predikatas, o sakinys $3 < 2$ jau yra teiginys, beje neteisingas. Sakinys 'natūralusis skaičius x dalo skaičių 7'yra predikatas, kadangi x nežinomas. Tačiau sakinys 'egzistuoja x natūraliųjų skaičių aibėje, kuris dalo skaičių 7' jau yra teiginys, beje teisingas. Arba 'visi natūralieji skaičiai x, dalo skaičių 7'. Tai irgi teiginys, be to neteisingas. Sakinius "*egzistuoja aibėje A elementas x, turintis savybę S*" ir "*visi aibės A elementai x turi savybę S*" vadinsime sakiniais su egzistavimo ir visuotinumo kvantoriais. Šiuos sakinius trumpai rašysime, atitinkamai, $(\exists x \in A, S)$, $(\forall x \in A, S)$. Simboliai $\exists$ ir $\forall$ vadinami egzistavimo ir visuotinumo kvantoriais. Taigi, kvantorių pagalba galime predikatus paversti teiginiais.

Pavyzdžiui, teiginį "aibėje $A = [-2, 5]$ yra skaičius, kurio modulis didesnis už 4" formalizuosime tokiu būdu: $\exists a \in A, |a| > 4$. Paneigę paskutinį teiginį gausime 'aibėje $[2, 5]$ negalime nurodyti skaičiaus, kurio modulis būtų didesnis už 4' arba 'visi aibės $a \in A$ elementai, nutolę nuo nulio atstumu ne didesniu už 4'(trumpai $\forall a \in A, |a| \leq 4$.)

Panagrinėkime teiginių, apibrėžtų kvantoriais neigimo problemą. Paneikime tokį teiginį: "Netiesa, kad visiems aibės X elementams, predikatas $P(x)$ yra teisingas teiginys." Užrašę formaliai turime,

$$\overline{(\forall x \in X, P(x))}.$$

Pastarąjį teiginį galime perrašyti tokiu būdu: "ne visiems $x \in X$, predikatas $P(x)$" yra teisingas teiginys arba "egzistuoja aibėje X elementas, su kuriuo predikatas $P(x)$ klaidingas teiginys". Perrašę formaliai turime

$$(\overline{\forall} x \in X, P(x)) \equiv (\exists x \in X, \overline{P(x)})$$

arba

$$\overline{(\forall x \in X, P(x))} \equiv (\exists x \in X, \overline{P(x)}).$$

Pastaroji lygybė vadinama visuotinumo kvantoriaus neigimo taisykle (dėsniu).

Samprotaudami visiškai analogiškai, paneikime teiginį su egzistavimo kvantoriumi. Teiginį "netiesa, kad aibėje X yra elementas x toks, kad $P(x)$ yra teisingas teiginys-" formaliai užrašę turime:

$$\overline{(\exists x \in X, P(x))}.$$

Aukščiau užrašytą teiginį galime perrašyti tokiu būdu: "nėra aibėje X elemento x, su kuriuo predikatas $P(x)$ būtų teisingas teiginys" arba "visiems aibės X elementams x, predikatas $P(x)$ neteisingas teiginys." Paskutinį teiginį laikysime teiginio su egzistavimo kvantoriumi neiginiu, taigi:

$$\overline{(\exists x \in X, P(x))} \equiv (\forall x \in X, \overline{P(x)}).$$

Remdamiesi užrašytomis taisyklėmis paneikime keletą teiginių:

$$\overline{(\forall x \in [-1,2], x \leq 0)} \equiv (\exists x \in [-1,2], x > 0),$$

arba

$$\overline{(\exists x \in [-1,2], |x-1| \geq 1)} \equiv (\forall x \in [-1,2], |x-1| < 1).$$

Kintamųjų reikšmių aibę, su kuriomis predikatas tampa teiginiu, vadinsime *predikato apibrėžimo aibe.* Predikato apibrėžimo srities elementai, su kuriais predikatas tampa teisingu teiginiu, vadinami *predikato teisingumo aibe.*

Predikato apibrėžimo aibę žymėsime simboliu $D_P(x_1, \ldots, x_n)$, o teisingumo aibę- simboliu $T_P(x_1, \ldots x_n)$. Pavyzdžiui predikato 'natūralusis skaičius x yra skaičiaus 2 kartotinis' apibrėžimo sritį sudaro visi natūralieji skaičiai, o teisingumo aibę- visi lyginiai. Predikatą, kurio apibrėžimo sritis sutampa su jo teisingumo aibe vadinsime *absoliučiai teisingu* predikatu, o jei teisingumo aibė tuščia- *absoliučiai klaidingu.*

Sakykime, kad X yra predikatų $A(x)$ ir $B(x)$ apibrėžimo aibė, o $T_A(x)$ ir $T_B(x)$ yra šių teiginių teisingumo aibės. Apibrėžkime šių teisingumo sričių veiksmus bei sudėtinių predikatų, apibrėžtų šiose srityse, operacijų teisingumo reikšmes. Pastebėsime, kad kiekvienas predikatas $A(x)$, $x \in X$ apibrėžimo aibę suskaido į du poaibius, $T_A(x) \cup \overline{T_A(x)} = X$. Antra vertus, jei turime du predikatus, apibrėžtus aibėje X, tai šių predikatų dėka apibrėžimo aibę galime suskaidyti į tokius poaibius:

$$X = (T_A(x) \setminus T_B(x)) \cup (T_B(x) \setminus T_A(x)) \cup (T_A(x) \cap T_B(x)) \cup (\overline{T_A(x) \cup T_B(x)}).$$

Nustatysime predikatų loginių operacijų teisingumo aibes. Panagrinėkime predikatų disjunkcijos problemą. Sudarome teisingumo lentelę visiems aukščiau apibrėžimo aibės poaibiams. Turime

X	$A(x)$	$B(x)$	$A(x) \vee B(x)$
$T_A(x) \setminus T_B(x)$	1	0	1
$T_A(x) \cap T_B(x)$	1	1	1
$T_B(x) \setminus T_A(x)$	0	1	1
$\overline{T_A(x) \cup T_B(x)}$	0	0	0

.

Taigi

$$T_{A(x) \vee B(x)} = T_A(x) \cup T_B(x).$$

Nustatome predikatų konjunkcijos teisingumo reikšmes bei teisingumo aibę:

X	$A(x)$	$B(x)$	$A(x) \wedge B(x)$
$T_A(x) \setminus T_B(x)$	1	0	0
$T_A(x) \cap T_B(x)$	1	1	1
$T_B(x) \setminus T_A(x)$	0	1	0
$\overline{T_A(x) \cup T_B(x)}$	0	0	0

.

Remdamiesi paskutiniąja lentele gauname, kad predikatų konjunkcijos teisingumo aibę sudaro nagrinėjamų predikatų teisingumo aibių sankirta. Taigi

$$T_{A(x) \wedge B(x)} = T_A(x) \cap T_B(x).$$

Nustatysime predikatų ekvivalencijos teisingumo aibę. Turime

X	$A(x)$	$B(x)$	$A(x) \Leftrightarrow B(x)$
$T_A(x) \setminus T_B(x)$	1	0	0
$T_A(x) \cap T_B(x)$	1	1	1
$T_B(x) \setminus T_A(x)$	0	1	0
$\overline{T_A(x) \cap T_B(x)}$	0	0	1

.

Remdamiesi paskutiniąja lentele gauname, kad ekvivalencijos teisingumo aibė yra tokių aibių sąjunga:

$$T_{A(x)\Leftrightarrow B(x)} = (T_A(x) \cap T_B(x)) \cup (\overline{T_A(x) \cap T_B(x)}).$$

Aptarsime predikatų, apibrėžtų aibėje X loginės išvados problemą. Nesunku suprasti, kad visuomet predikatų disjunkcija $A(x) \vee B(x)$ logiškai išplaukia iš predikato $A(x)$. Ir jei predikatų konjunkcija $A(x) \wedge B(x)$ yra teisinga, tai predikatas $A(x)$ $\forall x \in T_{A(x)\wedge B(x)}$ yra teisingas teiginys. Taigi, iš predikatų $A(x), B(x)$ konjunkcijos visuomet išplaukia $A(x)$. Vadinasi, predikatas $B(x)$ logiškai išplaukia iš predikato $A(x)$ tada ir tik tada, kai implikacija $A(x) \Rightarrow B(x)$ yra teisinga $\forall x \in T_A(x)$. Šiuo atveju teisingumo aibėms teisingi sąryšiai: $T_A(x) \subset T_B(x)$. Be to, jei $A(x)$ yra predikato $B(x)$ pakankama sąlyga, tai implikacija $A(x) \Rightarrow B(x)$ yra teisinga $\forall x \in X$.

Sakysime, kad predikatas $A(x)$ yra ekvivalentus predikatui $B(x)$, jei $T_A(x) = T_B(x)$. Žymėsime $A(x) \equiv B(x)$.

Parodykime, kad teiginiai $A(x) \Rightarrow B(x)$ ir $\overline{A(x)} \vee B(x)$ yra ekvivalentūs. Pakanka panagrinėti lentelę, kurioje būtų aptarti visi galimi atvejai. Turime:

X	$A(x)$	$B(x)$	$A(x) \Rightarrow B(x)$	$\overline{A(x)} \vee B(x)$
$T_A(x) \setminus T_B(x)$	1	0	0	0
$T_A(x) \cap T_B(x)$	1	1	1	1
$T_B(x) \setminus T_A(x)$	0	1	1	1
$\overline{T_A(x) \cup T_B(x)}$	0	0	1	1

.

Remdamiesi paskutiniąja lentele galime tvirtinti, kad minėtieji predikatai yra ekvivalentūs.

Labai dažnai teoremos yra formuluojamos predikatų logine išvada $A(x) \Rightarrow B(x)$. Predikatas $A(x)$ yra predikato $B(x)$ pakankama sąlyga, o predikatas $B(x)$ yra predikato $A(x)$ būtina sąlyga tik tada, kai $T_A(x) \subset T_B(x)$, kitaip tariant implikacija $A(x) \Rightarrow B(x)$ teisinga $\forall x \in T_A(x)$.

Sakysime, kad predikatai $A(x)$ ir $B(x)$ yra būtinos ir pakankamos sąlygos, jei teisingos implikacijos: $A(x) \Rightarrow B(x)$ ir $B(x) \Rightarrow A(x)$. Šiuo atveju $T_A(x) = T_B(x)$. Formuluojant teiginius su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis naudosime loginės ekvivalencijos simbolį $A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Patį teiginį su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis formuluosime tokiais žodžiais "$A(x)$ tada ir tik tada, kai $B(x)$" arba "$A(x)$ tik tada, kai $B(x)$."

Pavyzdžiui, skaičius n dalinasi iš 3 tada ir tik tada, kai skaičiaus n skaitmenų sumą dalina skaičius 3.

2.4 Teoremos. Išvadų darymo taisyklės

Aštuoniolikto amžiaus pabaigoje, kai buvo susirūpinta matematinės teorijos pagrindimu buvo sukurta ir išvystyta formalioji logikos teorija, bei įrodymų teorija. Logikos bei įrodymų teorijos tikslas, kalbant supaprastintai, sukurti teisingų samprotavimų teoriją, kuri vėliau galėtų būti taikoma įvairiose teorinėse bei praktinėse srityse, pavyzdžiui algoritmų teorijoje ir t.t.

Tad ką vadiname formalia teorija, kitaip tariant, kas sudaro mokslinės kalbos formą.

Apibrėžimas Sakysime, kad $\mathcal{T}$ yra formali teorija, jei šią struktūrą sudaro:

1) simbolių aibė (abėcėlė) $\mathcal{A}$;

2) loginių formų (sudėtinių teiginių) aibė $\mathcal{F}$;

3) aksiomų (pirminių teiginių) aibė $\mathcal{B}$;

4) sąryšių aibė $\mathcal{R}$ tokia, kad visiems sąryšiams $R \in \mathcal{R}$, $R \subset \mathcal{F}^n$. Nurodyti sąryšiai R vadinami išvadų darymo taisyklėmis.

Detalizuokime, ką vadiname išvadų darymo taisyklėmis. Tarkime, kad $F_1, \dots F_n, G \in \mathcal{F}$ ir egzistuoja sąryšis $R \in \mathcal{R}$ toks, kad $(F_1, \dots F_n, G) \in R =: \frac{F_1, \dots F_n}{G}$ tai sakysime, kad formulė G yra formulių $F_1, \dots, F_n$ išvada. Formulės F_i yra vadinamos prielaidomis, o $G-$ išvada.

Taigi, kiekviena formali teorija privalo turėti šiuos keturis atributus. Kiek plačiau pakalbėkime apie matematinę teoriją.

Jau esame minėję, kad vienus teiginius mes laikysime apriori teisingais, juos vadinsime aksiomomis, o teiginius, kurių teisingumą nustatysime samprotaudami, naudodami logikos dėsnius bei aksiomas, vadinsime teoremomis. Aksiomos, tai pirminiai teiginiai, kurių pagrindu kuriama matematinė teorija. Dar kartą pabrėžiame, kad dėl aksiomų teisingumo yra susitariama, skirtingose teorijose ta pati aksioma gali turėti skirtingas teisingumo reikšmes.

Teorema vadinsime implikaciją "$p \Rightarrow q$". Jei teorema formuluojama predikatine forma, tai teoremą galima užrašyti tokiu būdu:

$$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x).$$

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad predikatai apibrėžti realiųjų skaičių aibėje; $A(x)$: "$f(x) \neq 0$", $B_+(x)$: "$f(x) > 0$" $B_-(x)$: "$f(x) < 0$". Formuluojame teoremą.

Jei $\forall x \in [0,1], f(x) \neq 0$, tai $\exists x \in [0,1], (f(x) > 0$ arba $f(x) < 0.)$ Naudojant simbolius: $\forall x \in [0,1], A(x) \Rightarrow \exists x \in [0,1], (B_+(x) \vee B_-(x))$.

Tarkime, kad duota teorema $p \Rightarrow q$. Pradinę teoremą paprastai vadiname *tiesiogine*. Teoremos teisingumas nustatomas ją įrodant (apie tai kiek vėliau). Tuomet teoremą $q \Rightarrow p$ vadinsime *atvirkštine pradinei*. Teoremą $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$– *priešinga pradinei* teoremai, o teoremą $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$– *priešinga atvirkštinei* teoremai. Pasirodo, kad kai kurios iš šių teoremų yra ekvivalenčios. Pavyzdžiui teisinga tokia

1 Teorema Tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios, t.y.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad tai yra kontrapozicijos dėsnis!

2 Teorema *Atvirkštinė ir priešinga teoremos yra ekvivalenčios.*

Tuo atveju, kai tiesioginė teorema ir jai atvirkštinė yra teisingi teiginiai, tai sujungę šiuos teiginius ekvivalencijos operacija ($p \Leftrightarrow q$) gausime teoremą, kurią vadinsime teorema su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis.

Šių teoremų įrodymą paliekame skaitytojui. Įrodymui naudokite teisingumo lenteles.

Pagalbiniai teiginiai, kurie naudojami kitų teiginių įrodymui dažnai vadinami *lemomis*. Pastebėsime, kad lema tuo pačiu metu ir teorema!

Taigi, kas yra įrodymas? *Įrodymu vadinsime mąstymo procesą, kurio metu, naudojant argumentus (teiginius kurie yra teisingi), nustatomas teiginio teisingumas.* Yra skiriami du įrodymo metodai- *indukcinis*, kai nuo atskirų teiginių, juos apibendrinant naudojantis logikos taisyklėmis gauname bendrus teiginius ir *dedukcinis*, kai iš bendrų teiginių, naudojant išvadų darymo taisykles darome teisingas išvadas apie kažkokį atskirą teiginį.

Pilnosios indukcijos taisyklė:

$$\frac{\wedge_{i=1}^{n} F_i, F_1 \Rightarrow G, \ldots, F_n \Rightarrow G}{G}$$

Naudojant pilnosios indukcijos metodą visada gaunama teisinga išvada, kadangi yra nagrinėjami visi galimi atvejai.

Dedukcijos metodas, tai išvadų darymo būdas. Aptarkime kiek detaliau šį metodą. Dedukcijos metodą, siejantį taisykles ir logikos dėsnius patogu žymėti tokiu būdu:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \Rightarrow G =: \frac{F_1, F_2, \ldots, F_n}{G},$$

čia $F_1, F_2, \ldots, F_n$– šios taisyklės prielaidos, G– taisyklės išvada.

Teoremoms įrodyti dažniausiai naudojamos tokios išvadų darymo taisyklės:

1) išvados taisyklė:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2, F_1}{F_2};$$

2) neigimo taisyklė:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2, \overline{F_2}}{\overline{F_1}};$$

3) silogizmo taisyklė:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2, F_1 \Rightarrow F_2}{F_1 \Rightarrow F_3};$$

4) kontrapozicijos taisyklė:

$$\frac{F_1 \Rightarrow F_2,}{\overline{F_2} \Rightarrow \overline{F_1}};$$

5) išplėstinės kontrapozicijos taisyklė:

$$\frac{(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow G}{(F_1 \wedge \overline{G}) \Rightarrow \overline{F_2}} \vee \frac{(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow G}{(F_2 \wedge \overline{G}) \Rightarrow \overline{F_1}}.$$

Aptarkime kiekvieną samprotavimo taisyklę atskirai.

Tegu teiginys F_1- "keturkampis yra lygiagretainis", F_2- "įstrižainės viena kitą dalo pusiau". Tada suformuluokime išvados taisyklę: Jei keturkampis yra lygiagretainis, tai jo įstrižainės viena kitą dalo pusiau ir žinome, kad duotas keturkampis yra lygiagretainis- darome išvadą, kad jo įstrižainės viena kitą dalo pusiau.

Panagrinėkime neigimo taisyklę. Jei skaičius a yra lyginis, tai skaičius 2 dalo šį skaičių. Tarkime, kad 2 nedalo skaičiaus a, tada darome išvadą, kad a nėra lyginis.

Sakykime a, b teigiami skaičiai didesni už vienetą. Jei $a \geq b$, tai $a + 1 \geq b + 1$ ir jei $a+1 \geq b+1$ tai $a^2+1 \geq b^2+1$. Remiantis silogizmo taisykle darome išvadą, kad jei $a \geq b$, tai $a^2 + 1 \geq b^2 + 1$.

Aptarkime išplėstinės kontrapozicijos taisyklę pagrįsdami tuo pačiu dalumo iš 15 taisyklę. Teiginys F_1- skaičius n dalijasi iš 3, F_2- skaičius n dalosi iš 5, o $G-$ skaičius dalosi iš 15. Tada iš teiginio $F_1 \wedge F_2 \Rightarrow G-$ jei skaičius dalijasi iš 3 ir 5 tai jis dalosi iš 15 remiantis išplėstinės kontrapozicijos principu darome išvadą, kad yra teisingi tokie teiginiai: jei skaičius n dalosi iš 3 ir nesidalo iš 15, tai jis nesidalo iš 5 ir jei skaičius dalosi iš 5 ir nesidalo iš 15, tai jis nesidalo iš 3.

Teoremos yra įrodomos dviem būdais: *tiesioginiu* ir *netiesioginiu.* Tiesioginio įrodymo metu, naudojant argumentus parodoma, įrodoma, kad prielaidos p pakanka tam, kad įrodyti q. Teoremos įrodymą vadinsime netiesioginiu, jei teiginio $p \Rightarrow q$, teisingumas nustatomas remiantis įvairiais dėsniais. Prisiminkime, kad tiesioginė ir atvirkštinė priešingai yra ekvivalenčios teoremos. Įrodymo metu dažniausiai yra naudojami tokie argumentai (dėsniai): klaidingos prielaidos, teisingos išvados, silogizmo, kontrapozicijos ir trečiojo negalimo.

Pateiksime vieną tokio samprotavimo pavyzdį.

3 Teorema *Skaičius $\sqrt{2}$ nėra racionalus.*

$\ominus$

Naudosime netiesioginį įrodymo metodą. Pastebėsime, kad teiginys p - 'yra duotas skaičius $\sqrt{2}$ ', o teiginys $q-$ 'duotas skaičius nėra racionalus'. Tarkime priešingai, t.y.

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m},$$

čia n, m neturi bendrų daliklių (mes tvirtiname, kad $p \Rightarrow \overline{q}$). Pastebėsime, kad jei parodysime, kad šis teiginys yra neteisingas tai, remdamiesi neprieštaravimo dėsniu, gausime, kad pradinis teiginys yra teisingas.

Žinome, kad nelyginio skaičiaus kvadratas yra nelyginis, o lyginio skaičiaus kvadratas lyginis (remiamės jau mokykloje įrodytu teiginiu), tai iš prielaidos $(n/m)^2 = 2 \quad \Rightarrow n^2 = 2m^2$. Remdamiesi teisingos išvados dėsniu gaunme, kad n yra lyginis. Taigi, galime rasti skaičių (lyginio skaičiaus apibrėžimas) p, $n = 2p$. Bet tada $m = 2p^2$, taigi, m yra lyginis (lyginio skaičiaus apibrėžimas). Vadinasi, trupmenos n/m skaitiklis ir vardiklis yra lyginiai. Bet tada trupmena yra suprastinama. Taigi, gavome prieštaravimą pradinei prielaidai, kad trupmena n/m yra nesuprastinama. Tada (klaidingos išvados dėsnis), pradinė prielaida, kad $\sqrt{2}$ yra racionalus yra klaidinga. Remdamiesi neprieštaravimo dėsniu gauname teoremos įrodymą.

Uždaviniai

1. Sudarykite nurodytų teiginių neiginius, bei nustatykite tiesioginio teiginio, bei jo neiginio teisingumo reikšmes:

1) Londonas didžiausias Lietuvos miestas;
2) daugiausia gyventojų turinti valstybė yra JAV;
3) egzistuoja lygties $x^2 + 1 = 0$ šaknis;
4) jei $2 > 4$, tai ir $2^2 > 4^2$;
5) bet kokio stačiakampio įstrižainės yra statmenos;
6) skaičius 5 dalo skaičių 425;
7) egzistuoja x, kuriam teisinga nelygybė: $2x < 1$;
8) apie kiekvieną trikampį galima apibrėžti apskritimą;
9) jei trikampis status ir lygiašonis, tai šio trikampio aukštinės yra lygios;
10) keturkampis yra stačiakampis tada ir tik tada, kai jo įstrižainės yra lygios arba statmenos.

2. Sudarykite nurodytų loginių formų teisingumo lenteles:

1) $\overline{p \wedge q} \vee r$
2) $\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge (q \Rightarrow p)$
3) $(p \Rightarrow \overline{(q \vee r)}) \wedge (p \Leftrightarrow q)$
4) $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$
5) $p \Leftrightarrow (q \vee \overline{r})$

3. Patikrinkite, ar pateiktos loginės formos L_1 ir L_2 yra ekvivalenčios:

$$L_1 := \overline{p \Rightarrow r}, \quad L_2 := \overline{p} \Rightarrow \overline{r}; \tag{1)}$$

$$L_1 := (p \wedge r) \Rightarrow s, \quad L_2 := (\overline{p} \vee \overline{r}) \Rightarrow \overline{s}. \tag{2)}$$

4. Duota teorema: *Tegu* $a, b \in \mathcal{N}$. *Tada jei* $a < b$, *tai* $a + c < b + c$. Užrašykite šiai teoremai atvirkštinę, priešingą, priešingą atvirkštinei. Paneikite šią teoremą.

5. Tegu $f(x), g(x)$ yra tolydžios funkcijos. Tada:
"Jei $\exists x \in (a,b); f(x)+g(x)=0$, tai $\exists x \in [a,b]; f(x)=0 \,\text{ir}\, g(x)=0$ arba $f(x) = -g(x)$;"

a) suformuluokite šiai teoremai priešingą, atvirkštinę, priešingą atvirkštinei teoremas, paneikite šią teoremą;

b) sudarykite šios teoremos (loginės formos) teisingumo lentelę ir nurodykite teiginių teisingumo reikšmių rinkinius, kada teorema yra teisingas teiginys.

6. Įrodykite, kad tiesioginė bei priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalentūs teiginiai.

7. Paneikite teiginius:

a)
$$(\exists x \in A, P(x) \wedge \forall y, x \in A, P(x,y)) \Rightarrow ((2>5) \vee (\exists x \in A, Q(x)));$$

b) jei šiandien atliksime darbus ir laiku sugrįšime namo, tai arba žiūrėsime futbolo rungtynes arba ruošimės rytdienos kontroliniam darbui;

c)
$$L(p,q,r,s) := ((p \Leftrightarrow s) \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \Rightarrow q).$$

8. Naudodami kontra-pavyzdį įrodykite, kad suformuluota teorema yra neteisinga:
"Tarkime, kad $f, g : [0,1] \to [0,1]$ dvi tolydžios funkcijos. Jei $f(x)+g(x)=0$, tai $f(x)=g(x)=0$. "

9. Tarkime, kad natūraliųjų skaičių aibėje apibrėžti du teiginiai: $A(n)$: "skaičius n lyginis" ir $B(n)$: " skaičius n^2 lyginis". Teoremą $A(n) \Rightarrow B(n)$ įrodykite naudodami

a) išvados metodą;

b) kontrapozicijos metodą.

10. Raskite dviviečių predikatų $P_1(x,y)$ ir $P_2(x,y)$ apibrėžimo bei teisingumo aibes, jeigu

$$P_1(x,y) := \begin{cases} 3x+4y \le 12, \\ x-y \ge -1, \\ x \ge -2. \end{cases} \qquad P_2(x,y) := \begin{cases} -x+4y \le 8, \\ x+y \ge 0. \end{cases}$$

Raskite šių predikatų konjunkcijos, disjunkcijos bei ekvivalencijos teisingumo aibes.