Turinys

I. AIBĖS. SĄRYŠIAI

1.1 Aibių algebros pradmenys.

Aibe vadinsime bet kokį objektų rinkinį. Objektus sudarančius aibę vadinsime aibės elementais. Aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o elementus- mažosiomis. Priskiriant aibei elementus naudosime lygybės ženklą, elementus nurodydami tarp riestinių skliaustų. Pavyzdžiui, jei aibę sudaro elementai s, m, a, b, tai šią priklausomybę žymėsime: $A = \{s, m, a, b\}$. Simboliu $A = \{x;\ P(x)\}$ žymėsime aibę, kurią sudaro elementai, tenkinantys savybę $P(x)$. Jeigu elementas a yra aibėje A, tai simboliškai šią priklausomybę žymėsime $a \in A$ ir jei elemento b nėra aibėje B, tai žymėsime $b \notin B$. Simboliniu sakiniu $\forall x \in A \ldots$ trumpinsime tokį sakinį: "visi aibės A elementai tenkina savybę nurodytą daugtaškio vietoje", o simbolinis sakinys $\exists x \in A \ldots -$ yra sakinio "yra aibėje A bent vienas elementas tenkinantis savybę nurodytą daugtaškio vietoje", trumpinys. Jei aibės A elementai a ir b yra identiški, tik žymimi kitaip, tai norėdami pabrėžti šį faktą rašysime $a = b$. Be to, jei elementai sutampa, tai į aibės A elementų sąrašą įtrauksime tik vieną iš jų. Prisiminkime skaičių aibių žymėjimus. Simboliu $\mathcal{N}$ žymime natūraliųjų skaičių aibę, $\mathcal{N}_0-$ sveikųjų neneigiamų skaičių aibę, $\mathcal{Z}-$ sveikųjų skaičių aibę, $\mathcal{Q}-$ racionaliųjų skaičių aibę, $\mathcal{I}-$ iracionaliųjų skaičių aibę ir $\mathcal{R}-$ realiųjų skaičių aibę.

Naudodamiesi aukščiau pateiktais žymėjimais aibę galime užrašyti tokiu būdu: $A = \{x; x \in A\}$. Pavyzdžiui aibė $\{x; |x| < 1\}$ yra intervalas $(-1, 1)$. Arba $\{2n-1; n \in \mathcal{N}\}$ yra teigiamų nelyginių skaičių aibė. Aibę turinčią vieną elementą, tarkime a, galime apibrėžti taip: $A = \{a\}$. Aibę $\{x \in A; x \neq x\}$ vadinsime tuščia. Kitaip tariant aibę vadinsime tuščia, jei ji neturi elementų. Ją žymėsime simboliu $\emptyset$. Pavyzdžiui aibė $\{x \in \mathcal{R}; |x| < 0\}$ yra tuščia, kadangi nėra tokių realiųjų skaičių, kurie tenkintų nurodytą salygą.

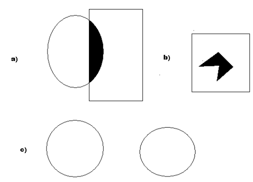
Sakysime, kad aibė A *yra aibės* B *poaibis* (žymėsime $A \subset B$), jeigu $\forall x \in A$ turime, kad $x \in B$. Tarkime, kad $A = \{1, 2, a, c, 0\}$, o $B = \{a, 0\}$. Tada aibė $B \subset A$. Aišku, kad aibė A yra aibės A poaibis. Sutarsime laikyti, kad tuščia aibė yra bet kokios aibės poaibis. Tarkime, kad aibė A yra fiksuota. Tada aibė A ir $\emptyset$ yra vadinamos netiesioginiais aibės A poaibiais. Jeigu aibėje yra n elementų, tai iš šios aibės elementų galime sudaryti 2^n šios aibės poaibių. (Pasvarstykite kodėl?)

Sakysime, kad aibės A, B *lygios* ($A = B$), jeigu $A \subset B$ ir $B \subset A$. Pavyzdžiui, aibės $A = \{1\}$ ir $B = \{x; x - 1 = 0\}$ yra lygios, nes jų elementai sutampa. Taigi, aibių lygybė priklauso ne nuo aibės užrašymo būdo, bet nuo elementų, sudarančių šias aibes.

Aibes patogu vaizduoti plokštumos sritimis kartais nurodant šiose srityse aibės elementus. Toks aibių vaizdavimo būdas yra vadinamas *Veno diagramomis*

Aibių A ir B *sankirta* (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę $\{x, x \in A \,\text{ir}\, x \in B\}$. Kitaip tariant, dviejų aibių sankirta yra aibė, kuriai priklauso šių aibių bendri elementai. Pavyzdžiui, aibių $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ir $B = \{x; x > 5,\ \ A, B \subset \mathcal{N}\}$ sankirta yra aibė $\{6\}$. Sakysime, kad aibės nesikerta, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe.

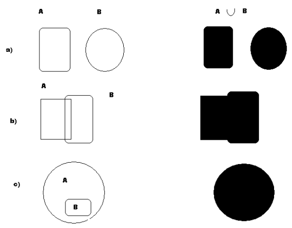
Veno diagramomis (1 pav.) iliustruojame aibių sankirtos veiksmą. a) ir b) atvejais sankirta iliustruojama juoda sritimi. c) atveju turime nesikertančias aibes, taigi rezultatas tuščia aibė.



1 pav.

Aibę $D = \{x; x \in A \text{ arba } x \in B\}$ vadinsime *aibių sąjunga*, kurią žymėsime $A \cup B$. Iliustruojame sąjungos veiksmą Veno diagramomis 2 pav.

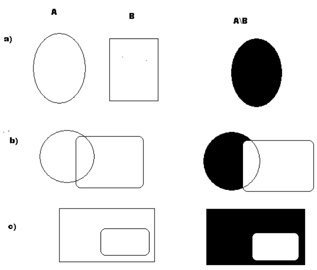
Pavyzdžiui ,aibių $\mathcal{I} \cup \mathcal{Q} = \mathcal{R}$. Tarkime, kad $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ir $B = \{x; x > 5,\ \ A, B \subset \mathcal{N}\}$. Tada $A \cup B = \mathcal{N}$.



2 pav.

Apibendrinkime šiuos veiksmus, bet kokiam aibių skaičiui. Tarkime, kad $I \subset \mathcal{N}$ kokia nors indeksų aibė ir be to, bet kokiam i galima nurodyti aibę A_i. Tada šių visų aibių sąjungą ir sankirtą galime apibrėžti tokiu būdu:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x; \exists i \in I, x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \{x; \forall i \in I, x \in A_i\}.$$



3 pav.

Aibių A ir B *skirtumu* (žymėsime $A \setminus B$), vadinsime aibę $A \setminus B = \{x; x \in A \text{ ir } x \notin B\}$. 3 pav. iliustruojame skirtumo operaciją (rezultatas juoda sritis) naudodami Veno diagramas:

Tarkime, kad visos nagrinėjamos aibės yra kokios nors vienos aibės poaibiai. Šią aibę vadinsime universalia, ir žymėsime U. Pavyzdžiui, nagrinėdami realiuosius skaičius universaliąja aibe galime laikyti aibę $\mathcal{R}$ arba nagrinėjant tik natūraliuosius skaičius universaliąja aibe kartais patogu laikyti natūraliųjų skaičių aibę nors šiuo atveju universaliąja aibe galime laikyti ir realiųjų skaičių aibę. Paprastai, nagrinėjant aibes yra nurodoma universalioji aibė. Pastebėsime, kad universaliosios aibės apibrėžimas yra sąlyginis, ir parenkamas priklausomai nuo situacijos. Beje, nėra universalios aibės, kuriai priklausytų visos aibės. Sprendžiant praktinius uždavinius, paprastai universaliosios aibės būna baigtinės.

Aibės A *papildiniu*, kurį žymėsime $\overline{A}$, vadinsime aibę $\overline{A} = \{x \in U, x \notin A\}$. Kalbant apie aibės papildinį, svarbu žinoti universaliąją aibę, kuriai priklauso nagrinėjamoji aibė, kadangi aibės papildinys yra universaliosios aibės elementų visuma, neturinti bendrų elementų su pradine aibe.

Aptarsime, kaip praktiškai būtų galima išreikšti (aprašyti) nagrinėjamas aibes bei aibių veiksmus. Tarkime, kad $U = \{u_1, \ldots, u_n\}-$ kokia nors universali aibė. Mes laikysime, kad universali aibė yra baigtinė. Tada $A \subset U$ galime aprašyti tokiu kodu:

$$C[i] = \begin{cases} 1, \text{ jei } u_i \in A, \\ 0, \text{ jei}, u_i \notin A, \end{cases}$$

$C[i]-$ $i-$ tasis dvejetainio kodo simbolis (kartais vadinamas $i-$ uoju kodo krūviu).

Tarkime, kad universalią aibę sudaro aštuoni sunumeruoti elementai, elementų prigimtis nesvarbi. Šią universalią aibę koduojame tokiu žodžiu:

11111111.

Tada kodas 10001101 reprezentuoja poaibį, kuriam priklauso universaliosios aibės pirmasis, penktasis, šeštasis ir aštuntasis elementai.

Aibių A ir B sankirtos kodas C apibrėžiamas tokiu būdu:

$$C[i] = \begin{cases} 1; \text{ jei } u_i \in A_i \text{ ir} A_j, \\ 0; \text{ kitu atveju.} \end{cases}$$

Aibių A ir B sajungos kodas C apibrėžiamas tokiu būdu:

$$C[i] = \begin{cases} 1; \text{ jei } u_i \in A_i \text{ arba } A_j, \\ 0; \text{ kitu atveju.} \end{cases}$$

Aibės A papildinio kodas apibrėžiamas tokiu būdu:

$$C[i] = \begin{cases} 1; \text{ jei } u_i \notin A, \\ 0; \text{ jei}, u_i \in A, \end{cases}$$

$C[i]-$ $i-$ tasis kodo C elementas.

Pateiksime binarinį Grėjaus kodą, kuriuo remdamiesi generuosime $n-$ elementės aibės visų poaibių aibę.

Įv: $n \geq 0-$ aibės galia
Išv: visų poaibių kodų seka
B: **array** $[1 \ldots n]$ **of** $0 \ldots 1$ (bitų mastelis)
for i **from** 1 **to** n **do**
$B[i] := 0$ (valoma kodų aibė)
end for
yield B (tuščia aibė)
for i **from** 1 **to** $2^n - 1$ **do**
$p := Q[i]$ (apibrėžiamas elementas, kuris bus prijungiamas arba pašalinamas)
$B[p] := 1 - B[p]$ (prijungiamas arba pašalinamas elementas)
yield B (eilinis poaibis)
end for
proc $Q(i)$
$q := 1; j := i$
while j lyginis **do**
$j := \frac{j}{2};\ q := q + 1$
end while
return q
end proc

Aptarkime šį algoritmą. Kai $n = 1$, tai kodų seka sudaryta iš $0, 1$. Pažymėkime ieškomą seką $B_1, \ldots, B_{2^k}$, kai $n = k$. Tada kodų seka $B_1 0, \ldots, B_{2^k} 0, B_{2^k} 1, \ldots B_1 1$ reprezentuoja aibę, turinčią $n = k + 1$ elementą. Aišku, kad paskutinėje kodų sekoje yra 2^{k+1} elementas, be to visi šie elementai yra skirtingi ir du gretimi skiriasi lygiai vienu simboliu. Būtent ši konstrukcija ir realizuojama Grėjaus algoritme. Beje, nuliniame žingsnyje $B = \emptyset$. Tegu buvo realizuota $2^k - 1$ žingsnis ir buvo gauta aibė B. Taigi, šiuo atveju $B[k+1] = B[k+2] = \ldots B[n] = 0$. 2^k žingsnyje krūvis $B[k+1]$ keičiamas iš $0 \to 1$ ir po šio veiksmo kartojama reikšmių keitimo seka $B[1 \ldots k]$ atvirkščia tvarka, kadangi $Q(2^k + m) = Q(2^k - m)$ visiems $m \in [0, 2^k - 1]$.

Tarkime, kad A, B, C bet kokios aibės. Teisingos tokios aibių veiksmų savybės:

1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;
2. $\overline{\overline{A}} = A$;
3. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$;
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
9. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Paskutiniosios dvi formulės vadinamos de Morgano dėsniais.

Patikrinkite šias aibių savybes naudodami Veno diagramas.

Pastebėsime, kad dažnai literatūroje aibės A papildinys žymimas simboliu A^c.

Realiųjų skaičių atviru intervalu vadinsime aibę

$$\{x \in \mathcal{R}, a < x < b\},$$

realūs skaičiai a, b vadinami intervalo galais. Realiųjų skaičių uždaru intervalu vadinsime aibę

$$\{x \in \mathcal{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Realiųjų skaičių pusiau atviru (pusiau uždaru) intervalu vadinsime aibes

$$\{x \in \mathcal{R}, a < x < b\}, \ \ (\{x \in \mathcal{R}, a < x < b\}),$$

atitinkamai. Tarkime, kad ∞ ir $-\infty$ yra simboliai, kuriems teisinga nelygybė: $\forall x \in \mathcal{R}; -\infty < x < \infty$. Pabrėžiame, kad simboliai $\pm\infty$ nėra realūs skaičiai. Tada visus neneigiamus realiuosius skaičius aprašome tokiu intervalu: $[0, \infty)$ o realiuosius neigiamus - $(-\infty, 0)$. Visiškai analogiškai apibrėžiami ir aibių $\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{I}, \mathcal{Q}$ intervalai.

Tarkime, kad intervalai:

$$A = [-5, 7], \ B = [0, 10], \ C = [8, 15]$$

yra universaliosios aibės $I = [-10, 20] \subset \mathcal{R}$, poaibiai. Tada šiuos intervalus galime žymėti skaičių tiesėje. Atlikime veiksmus su nurodytomis aibėmis. Pavyzdžiui

$$\overline{A} = [-10, -5) \cup (7, 20]; A \cap B = [0, 7]; \ \ B \setminus C = [0, 8).$$

Tegu

$$D = \{a, 0, d, 7\} \cup [7, 9].$$

Raskime $A \cap D$, $D \cap \overline{C}$ ir $B \cup D$. Visų pirma $A \cap D = \{0, 7\}$. Aišku, kad

$$D \cap \overline{C} = \{0, 7\} \text{ ir } B \cup D = B \cup \{a, d\}.$$

1.2 Dekarto sandauga. Atitiktis. Funkcija

Apibrėšime aibių Dekarto sandaugą.

Simbolinį reiškinį $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ vadinsime n ilgio rinkiniu. Simboliai $a_1, \ldots, a_n$ yra vadinami rinkinio elementais. Du vienodo ilgio rinkinius $(a_1, \ldots, a_n)$ ir $(b_1, \ldots, b_n)$ vadinsime lygiais, jeigu atitinkami rinkinių elementai sutampa, t.y. $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Remdamiesi pastaruoju lygybės apibrėžimu galime tvirtinti, kad elemento padėtis rinkinyje yra svarbi, kai tuo tarpu aibės elementų išdėstymas, apibrėžiant aibę, nėra svarbus. Pavyzdžiui aibės $A = \{a, b, 2\}$ ir $B\{2, a, b\}$ yra lygios, o tuo tarpu rinkiniai $(a, b, 2)$ ir $(2, a, b)$ yra skirtingi.

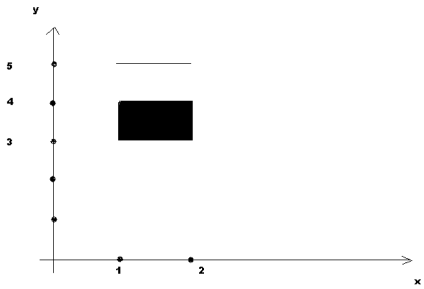
Aibių A ir B *Dekarto sandauga* vadinsime tokią porų aibę:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Kitaip tariant, aibių A ir B Dekarto sandauga vadiname visus dvielemenčius rinkinius, kuriuos galime sudaryti iš nurodytų aibių elementų, kai pirmoje vietoje rašome bet kurį, pirmojo dauginamojo elementą, o antroje, bet kurį antrojo dauginamojo elementą. Tuo atveju kai dauginamieji vienodi, tai sandaugą $A \times A = A^2$ vadiname *Dekarto kvadratu*. Jei bent vienas dauginamasis yra tuščia aibė, tai sandauga taip pat tuščia. Tarkime, kad $A = [1, 2], \ \ B = [2, 4] \cup \{5\}$. Tada

$$A \times B = \{(x, y), \ \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Pavaizduokime šią sandaugą grafiškai naudodami Dekarto koordinačių, Ox ašyje atidėję aibės A elementus, o Oy ašyje aibės B elementus. 4 pav. aibę $A \times B$ žymi tamsus stačiakampis ir atkarpa virš šio stačiakampio.



4 pav.

Pastebėsime, kad Dekarto sandaugą galime apibrėžti ir tarp bet kokio aibių skaičiaus. Mes apibrėšime baigtinio skaičiaus aibių Dekarto sandaugą. Tarkime, kad duotos aibės $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Tada šių aibių *Dekarto sandauga* vadinsime tokią, n elemenčių rinkinių, aibę:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n); a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in, A_n\}.$$

Pastebėsime, kad bendrai paėmus, $A \times B \neq B \times A$. Naudokite kontra pavyzdį.

Nurodysime aibių Dekarto sandaugos savybes:

1. $$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$

2. $$C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B);$$

3. $$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C);$$

4. $$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A);$$

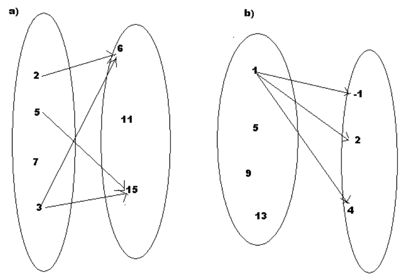
5. $$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap B) \times (B \times D).$$

Taisyklę, kuria apibrėžiame sąsajas tarp aibių elementų, vadinsime *atitiktimi*. Siejamos aibės gali būti skirtingos, bet gali ir sutapti. Pavyzdžiui, studentą laikysime aukštu, jeigu jo ūgis ne mažesnis negu $180cm$. Kitu atveju studentas bus laikomas žemu. Tarkime aibę A sudaro auditorijoje esantys studentai, o aibę B du žodžiai- { aukštas, žemas}. Taigi mes apibrėžėme atitiktį tarp aibių A ir B elementų. Arba, natūraliąjam skaičiui n priskirsime skaičių m, jeigu n dalo skaičių m. Tada apibrėžtoji atitiktis, bet kokiam skaičiui n, priskiria labai daug natūraliųjų skaičių. Skaičiui 1 pasiseka labiausiai, jam šia taisykle priskiriame visus natūraliuosius skaičius.

Tarkime, kad duotos aibės A ir B. Sakinį- "atitiktis f sieja aibės A elementus su aibės B elementais " trumpai žymėsime "$f : A \to B$." Aibę A vadinsime atitikties f *apibrėžimo aibe*, o aibę $B-$ šios atitikties *reikšmių aibe*. Jei atitikties f apibrėžimo aibė yra A, o reikšmių aibė B, tai sakysime, kad atitiktis *apibrėžta aibėje A ir įgyja reikšmes aibėje B*. Pastebėsime, kad jei atitiktis nusakyta tarp aibių, tai nebūtinai visi tų aibių elementai turi būti siejami atitiktimi. Jeigu atitiktis f sieja $a \in A$ su $b \in B$, tai žymėsime $f(a) = b$ (dažnai yra žymima afb). Šiuo atveju elementą $b \in B$ vadinsime elemento a vaizdu, o elementą a vadinsime elemento b pirmvaizdžiu atitikties f atžvilgiu. Atitikties f apibrėžimo aibės A elementų visumą, kurie turi vaizdus, vadinsime atitikties f apibrėžimo sritimi ir žymėsime $D(f)$, o reikšmių aibės B elementus, kurie turi pirmvaizdžius, vadinsime atitikties reikšmių aibe ir žymėsime $E(f)$. Pastebėsime, kad jei atitiktis apibrėžta aibėje A, tai nebūtinai visi atitikties apibrėžimo aibės elementai turi vaizdus ir nebūtinai visi reikšmių aibės elementai turi pirmvaizdžius. Tarkime, kad

$$A = \{2, 3, 5\}, \ B = \{4, 6, 7\}.$$

Tarkime, kad atitiktis f nusakyta taip: "aibės A elementas dalo aibės B elementą." Turime, kad $f(2) = 4, f(2) = 6, f(3) = 6$. Matome, kad elementas 5 neturi vaizdo, o elementas $7 \in B$ neturi pirmvaizdžio aibėje A šios atitikties atžvilgiu. Taigi $D(f) = \{2, 3\}, \quad E(f) = \{6, 4\}$.



5 pav.

Tarkime, kad atitiktis apibrėžta aibėje A ir įgyja reikšmes aibėje B. Tada porų aibę

$$G_f = \{(x, y); x \in D(f), y \in E(f), f(x) = y\}$$

vadinsime atitikties f *grafiku.* Aišku, kad atitikties grafikas yra Dekarto sandaugos $A \times B$ poaibis. Tarkime, kad aibės A taškai išdėstyti kokioje nors plokštumos dalyje, o $B-$ kitoje. Be to laikykime, kad apibrėžta aititiktis $f : A \to B$. Sujunkime aibės A elementus su aibės B elementais. Gautasis atitikties grafinis vaizdas vadinamas atitikties grafu. 5 pav. iliustruojame atitiktis grafais: a) "aibės A elementas dalo aibės B elementą" ir b) "aibės A elementas mažesnis negu aibės B elementas".

Atitikties grafą galime sudaryti ir kitu būdu. Tarkime, kad plokšumoje apibrėžta Dekarto koordinačių sistema. Ox ašyje pažymėkime atitikties apibrėžimo aibę, o ašyje Oy, šios atitikties reikšmių aibę. Tada atitikties grafą sudarys visi plokštumos taškai, kurių koordinatės $(x, y); \; x \in A, y \in B$.

Tarkime, kad duota atitiktis f. Tada atitiktį $g : B \to A$, kurios apibrėžimo sritis $D(g) = E(f)$, o $E(g) = D(f)$ vadinsime atitikčiai f *atvirkštine atitiktimi*, kurią žymėsime $g := f^{-1}$, jei $f^{-1}(b) = a$ tik tada, kai $f(a) = b$. Taigi:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}.$$

Tarkime, kad duota atitiktis f, kurios grafikas yra G_f. Tada atitiktį f_{-1} vadinsime atitikčiai f *priešinga atitiktimi*, jeigu atitikties f_{-1} grafiką sudaro taškai

$$G_{f_{-1}} = (A \times B) \setminus G_f.$$

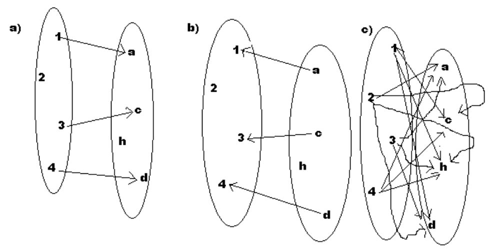
Tarkime, kad $A = \{0, 3, 7\}$, $B = \{2, 9\}$, o atitiktis f apibrėžta taip: aibės A elementai didesni už aibės B elementus. Tada turime, kad atitikties f grafikas yra toks:

$$G_f = \{(3, 2), (7, 2)\}, \; G_{f_{-1}} = \{(0, 2), (0, 9), (3, 9), (7, 9)\}.$$

Nesunku suprasti, kad atvirkštinės atitikties grafiką gausime, pradinės atitikties grafiko taškus sukeitę vietomis. Taigi, aukščiau pateiktosios atitikties f, atvirkštinės atitikties grafikas yra

$$G_{f^{-1}} = \{(2, 3), (2, 7)\}.$$

6 pav. a) atveju pavaizduotas atitikties "taisyklė priskiria skaičiams raides, priklausomai nuo to, kokia raidės eilė abėcėlėje " grafas. b) atveju vaiduojamas atvirkštinės atitikties grafas, o c)- priešingos atitikties grafas.



6 pav.

Atitiktis tai taisyklė, kuriai nekeliami jokie apribojimai, priskiriant vienos aibės elementus kitos aibės elementams.

Tarkime, kad $A, B \subset U$ yra bet kokios aibės. *Funkcija* f, apibrėžta aibėje A ir įgyjančią reikšmes aibėje B ($f : A \to B$) vadinsime taisyklę, kuria aibės A elementams priskiriama tik po vieną aibės B elementą. Aibės $D(f)$ elementai vadinami funkcijos f *argumentais*, o aibės $E(f)$ elementai vadinami funkcijos f *reikšmėmis*.

Tarkime, kad $f : A \to B$. Sakysime, kad funkcija yra totali, jei $D(f) = A$. Tarkime, kad $M \subset D(f)$. Tada funkciją $g : M \to B$, $D(g) = M$ ir $f(a) = g(a)$, $\forall a \in M$ vadinsime funkcijos f siauriniu aibėje M.

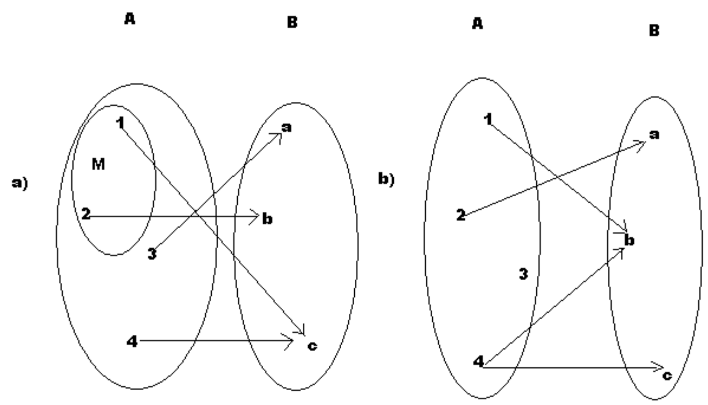
Tegu $f : A \longrightarrow B$. Sakysime, kad funkcija f yra *injektyvi* (injekcija), jei $\forall x \neq y$ teisinga nelygybė: $f(x) \neq f(y)$. Sakysime, kad funkcija f yra *siurjektyvi* (siurjekcija), jei funkcija totali ir be to $E(f) = B$. Siurjektyvią funkciją $f : A \to B$ patogu žymėti tokiu būdu: $f(A) = B$.

Sakysime, kad funkcija $f : A \to B$ yra *bijektyvi* (bijekcija), jeigu ši funkcija yra siurjektyvi ir injektyvi kartu, simboliškai: $f(A) = B$ ir bet kokiems $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ turime, kad $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Pastebėsime, kad jei funkcija nėra bijekcija, tai kartais galima šią funkciją susiaurinti (nurodyti šios funkcijos siaurinį kokiame nors poaibyje $M \subset A$) taip, kad siaurinys būtų bijekcija (žr. 7 pav. a)). Tuo tarpu 7 pav. b) atitiktis nėra funkcija.

1 Teorema *Jei funkcija $f : A \to B$ yra totali bijekcija $f(A) = B$, tai atvirkštinė funkcija egzistuoja, kuri taip pat yra totali bijekcija.*

Skaitytojui siūlome įrodyti šį teiginį.



7 pav.

Dvi aibes A, B vadinsime *ekvivalenčiomis,* jei egzistuoja totali bijekcija $f : A \to B$, tenkinanti savybę $f(A) = B$.

Aibes ekvivalenčias natūraliųjų skaičių aibei vadinsime *skaičiomis.* Aibes vadinsime *begalinėmis*, jei egzistuoja šios aibės poaibis (nesutampatis su pačia aibe) kuris ekvivalentus visai aibei. Aibė yra vadinama *kontinumo galios*, jei ši aibė ekvivalenti realiųjų skaičių aibei.

Pateiksime vieną pavyzdį.

Fiksuokime N pirmųjų natūraliųjų skaičių. Sudarykime begalines sekas

$$x = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, \ldots, \quad x_{i_j} \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Šių begalinių sekų aibę žzymėsime simboliu Σ_N.

Šią aibę vadinsime *Kodų aibe* apibrėžta $N-$ ainėje skaičiavimo sistemoje.

2 Teorema *Kodų aibė Σ yra neskaiti.*

$\ominus$

Pateiksime konstruktyvų šios teoremos įrodymą. Tarkime, kad kodų aibė apibrėžta dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, naudojant simbolius 0 ir 1. Apibrėžkime funkciją $f : \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$ tokiu būdu: $f(0) = 1, f(1) = 0$. Be to, tarkime priešingai, t.y., kad ši aibė skaiti. Vadinasi egzistuoja bijekcija $g : \mathcal{N} \longrightarrow \Sigma$. Apibrėžkime $\sigma \in \Sigma$ taip: $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \ldots$, ir čia, $\sigma_n = f((g(n))_n)$, čia $g(n)_n$ reiškia $n-$ ąjį $g(n)$ simbolį. Pastebėkime, kad g yra ”numeruojanti”, aibės Σ elementus, funkcija. Kokį numerį ši funkcija priskiria taškui σ? Pasirodo, kad nė vienam $n \in \mathcal{N}, g(n) \neq \sigma$. Pavyzdžziui, $g(3) \neq \sigma$, kadangi šių sekų tretieji simboliai skirtingi.

$\oplus$

Tarkime, kad funkcija $f : A \to B$, $|A| = n$. Paprastai funkcija yra aprašoma masyvu: **array**$[A]$ **of** B, čia $A-$ duomenys, kurie reprezentuoja aibės A elementus, B yra duomenys, reprezentuojantys reikšmių srities elementus. Jei nagrinėjami masyvai tik su natūraliaisiais indeksais, tai aibės A elementai yra numeruojami $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ir funkcija aprašoma tokiu būdu: **array**$[1 \ldots n]$**of** B

Jei aibė A yra didelė arba begalinė, tai tokių funkcijų aprašymui naudoti masyvus yra neefektyvu. Šiuo atveju funkcijoms apibrėžti yra naudojamos specialios procedūros.

1.3 Sąryšiai. Tvarkos sąryšiai

Atitiktį $f : A \to A$ vadinsime *dvinariu sąryšiu* (binariniu sąryšiu.) Dvinario sąryšio grafiko taškai sudaro aibės $A \times A$ poaibį. Beje, sąryšiui f, atvirkštinio sąryšio grafikas taip pat yra aibės A^2 poaibis. Toliau mes kalbėsime apie binarinius sąryšius, todėl ateityje juos vadinsime tiesiog sąryšiais.

Sąryšį f vadinsime *refleksyviu,* jei bet kuris aibės A elementas susietas šiuo sąryšiu, t.y $f(a) = a$. Pavyzdžiui tiesių lygiagretumo sąryšis yra refleksyvus, bet tiesių statmenumo sąryšis nėra refleksyvus.

Sąryšį f vadinsime *antirefleksyviu* aibėje A, jei bet koks aibės A elementas nėra susietas pats su savimi šiuo sąryšiu. Šią savybę turi tiesių statmenumo sąryšis. Arba sąryšis ”daugiau” realiųjų skaičių aibėje taip pat yra antirefleksyvus.

Sakysime, kad sąryšis f yra *simetrinis* aibėje A, jei bet kokiems šios aibės elementams $a, b \in A$, tokiems, kad $f(a) = b$ išplaukia, kad $f(b) = a$. Šią savybę turi skaičių lygybės, tiesių lygiagretumo, figūrų panašumo sąryšiai.

Sąryšį f, aibėje A, vadinsime *asimetriniu*, jeigu bet kokiai šios aibės elementų porai $\forall a, b \in A, f(a) = b$ išplaukia, kad $f(b) \neq a$. Nesunku suprasti, kad realiųjų skaičių aibėje sąryšiai ”daugiau”, ”mažiau” yra asimetriniai.

Sąryšį f aibėje A vadinsime *antisimetriniu*, jei iš to, kad $f(a) = b$ ir $f(b) = a$ išplaukia, kad $a = b$. Šią savybę realiųjų skaičių aibėje tenkina sąryšis ” $\leq$ ”.

Sąryšį f aibėje A vadinsime *tranzityviu*, jei bet kokiems aibės A elementams a, b, c turintiems savybę: jei $f(a) = b$ ir $f(b) = c$ išplaukia, kad ir $f(a) = c$. Šią savybę skaičių aibėje tenkina sąryšiai ” $<$ ”,” $>$ ”,” $=$ ”, lygiagretumo sąryšis tiesių aibėje. Statmenumo sąryšis tiesių aibėje nėra tranzityvus.

Sąryšį f, aibėje A, vadinsime *ekvivalentumo sąryšiu*, jeigu jis 1) simetrinis, 2) tranzityvus ir 3) refleksyvus.

Pavyzdžiui, tiesių lygiagretumo sąryšis yra ekvivalentumo sąryšis visų tiesių aibėje.

Tarkime, kad $\Theta = \{E_{i\in I}\}$ yra aibės M poaibių šeima, I kokia nors indeksų aibė. Poaibių šeimą Θ vadinsime aibės M denginiu, jeigu bet koks aibės M elementas priklauso kokiai nors šeimos Θ aibei, t.y.

$$M \subset \bigcup_{i\in I} E_i.$$

Jeigu aibės M denginį sudarančios aibės poromis nesikerta, $i \neq j$, tai $E_i \cap E_j = \emptyset$, tai šį denginį vadinsime aibės M *skaidiniu.* Šiuo atveju, kiekvienas aibės elementas priklauso tik vienai aibei E_i. Pasirodo, kad teisingas toks tvirtinimas:

3 Teorema *Kiekvienas ekvivalentumo sąryšis aibėje M apibrėžia šios aibės skaidinį, neturintį tuščių elementų ir atvirkščiai, kiekvienas aibės M skaidinys, neturintis tuščių elementų, yra ekvivalentumo sąryšis aibėje M.*

Šio teiginio neįrodysime, tik pateiksime algoritmą, kurio dėka turint ekvivaletumo sąryšį, apibrėžtą aibėje M, galima gauti aibės M skaidinį, neturintį tuščių elementų.

Įv: aibė M ir ekvivalentumo sąryšis šioje aibėje.
Išv: aibės M skaidinys Θ.
$U := M; \Theta := \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
select $a \in U$ (imame bet kokį aibė aibės M elementą)
$A := Eq(a, M, \equiv)$ (konstruojame ekvivalentumo klasę)
$U := U \setminus A$ (pašaliname klasę iš aibės)
$\Theta := \Theta \cup \{A\}$ (aibę prijungiame prie skaidinio)
end while

Funkcija Eq konstruoja ekvivalentumo klasę.
Įv: elementas a iš aibės M ir ekvivalentumo sąryšis šioje aibėje.
Išv: elementų šeima, sudaranti ekvivalentumo klasę A.
for $b \in M$ **do**
if $b \equiv a$ **then**
yield b
end if
end for
return A.

Tarkime, kad $f : A \to B$ yra funkcija. Visiems $b \in E(f)$ apibrėžkime

$$D_b = \{a \in D(f); f(a) = b\}.$$

Nesunku suprasti, kad $D_{b_1} \cap D_{b_2} = \emptyset$ ir $\cup_{b\in E(f)} D_b = D(f)$. Be to, $\forall b \in E(f),\ D_b \neq \emptyset$. Taigi, aibių šeima $D_b,\ b \in E(f)$ yra funkcijos f apibrėžimo srities skaidinys, kuriame nėra tuščių aibių. Vadinasi, remdamiesi paskutiniąja 2 Teorema galime teigti, kad šis skaidinys apibrėžia ekvivalentumo sąryšį aibėje $D(f)$.

Tarkime, kad $f : A \to A$ yra binarinis sąryšis. Jei sąryšis f sieja elementus a ir b, t.y. $f(a) = b$, tai sakysime, kad elementas b "eina po " elemento a. Tegu aibės A elementas c eina po elemento a, o elementas b eina po elemento c. Tada sakysime, kad elementas c yra tarp elementų a ir b. Sakysime, kad aibės A elementas b eina "*tiesiog po*" elemento b jei tarp šių elementų negalime nurodyti trečiojo, šios aibės elemento. Jeigu bet kokiam aibės A elementui (išskyrus pirmąjį) galime nurodyti elementą, einantį "tiesiog po", tai sakysime, kad aibėje A apibrėžtas sąryšis "eina tiesiog po." Jei elementas b "eina tiesiog po" elemento a, tai simboliškai žymėsime $a \prec b$. Elementus a ir b susietus saryšiu "eina tiesiog po" vadinsime gretimais aibės A elementais. Tarkime, kad $A = \{2, a, 3, b\}$. Tarkime, kad ši aibė tiesiškai sutvarkyta tokiu būdu:

$$f(a) = \ 2, f(3) = 2, f(3) = a, f(2) = b, f(b) = a, f(3) = b.$$

Apibrėžtas sąryšis yra griežtos tvarkos sąryšis. Be to elementai $2, a$; $a, 3$; $3, b$ yra gretimi.

Antisimetrinį ir tranzityvų saryšį $f : A \to A$ vadinsime *tvarkos sąryšiu* aibėje A. Aibę, kurioje apibrėžtas tvarkos sąryšis, vadiname sutvarkyta. Pastebėsime, kad tvarkos sąryšio apibrėžimo aibė nebūtinai sutampa su aibe, kurioje šis sąryšis nagrinėjamas. Sutvarkytos aibės elementą, kuris neina po jokio kito aibės elemento, tvarkos sąryšio atžvilgiu, vadinsime *pirmuoju aibės elementu.* Antirefleksyvų tvarkos sąryšį aibėje A vadinsime *griežtos tvarkos sąryšiu*, o refleksyvų tvarkos sąryšį f aibėje A vadinsime *negriežtos tvarkos sąryšiu.*

Pavyzdžiui, sąryšis "daugiau" ($>$) realiųjų skaičių aibėje yra griežtos tvarkos sąryšis, o sąryšis "mažiau lygu ($\leq$)" yra negriežtos tvarkos sąryšis toje pat aibėje.

Sakysime, kad aibė A yra *tiesiškai sutvarkyta*, jei šioje aibėje apibrėžtas griežtos arba negriežtos tvarkos sąryšis turintys savybę: $\forall a, b \in A, f(a) = b \vee f(b) = a$. Jei aibė sutvarkyta, bet ne tiesiškai sutvarkyta, tai ši aibė bus vadinama *dalinai sutvarkyta* (iš dalies sutvarkyta) aibe.

Sakysime, kad elementas $x \in X$ yra *minimalus* šios aibės elementas, sąryšio f atžvilgiu, jeigu neegzistuoja elemento $y \in X,\ y \neq x$ tenkinančio sąryšį: yfx (pastebėsime, kad šis sąryšis nebūtinai yra tvarkos ryšis.)

Pavyzdžiui skaičius 1 yra realiųjų skaičių aibės $X = [1, 4]$ minimalus elementas sąryšio $<$ atžvilgiu. Tuo tarpu aibė $(2, 9]$ minimalaus elemento neturi.

4 Teorema *Kiekvienoje netuščioje ir baigtinėje iš dalies sutvarkytoje aibėje M egzistuoja minimalus elementas.*

$\ominus$

Šioje teoremoje simboliu f žymėsime tvarkos sąryšį nagrinėjamoje aibėje. Tarkime priešingai, kad tokio elemento nėra. Tada

$$\forall x \in M, \exists y \in M, yfx.$$

Kitaip tariant, galima nurodyti aibės M skirtingų elementų seką $\{u_i\}$ tenkinančią sąryšius $\forall i, u_{i+1} f u_i$. Kadangi aibė M yra baigtinė, tai egzistuoja indeksai $i, j; i < j$ tokie, kad $u_i = u_j$. Remiantis tranzityvumo savybe gauname, kad

$$u_j f \ldots f u_{i+1} f u_i, \ \text{ taigi } \ u_j = u_i f u_{i+1}.$$

Vadinasi $u_{i+1} f u_i$. Taigi, $u_{i+1} = u_i$.

$\oplus$

5 Teorema *Bet kokia baigtinė aibė, kuri yra iš dalies sutvarkyta, gali būti pilnai sutvarkyta.*

Šio teiginio neįrodysime.

Pateiksime algoritmą, kurį realizavus iš dalies sutvarkytą aibę galime paversti tiesiškai sutvarkyta aibe.

Įv: iš dalies sutvarkyta aibė U.
Išv: tiesiškai sutvarkyta aibė W.
while $U \neq \emptyset$ **do**
$m := M(U)$(funkcija M grąžina minimalų elementą)
yield m
$U := U \setminus \{m\}$
end while

Procedūra, generuojanti objektus operatoriumi **yield** apibrėžia tiesinį sutvarkymą galutinėje aibėje. Tiesinės tvarkos sąryšiu gauname seką, kurioje objektai generuojami procedūros darbo metu.

1.4 Aibių reiškimas sutvarkytais sąrašais

Jei universali aibė labai didelė, o poaibis žymiai mažesnis, tai reikšti elementus binariniais kodais nėra labai efektyvu (atminties atžvilgiu). Šiuo atveju efektyviau aibėje apibrėžti tvarkos sąryšį, kitaip tariant, elementus pateikti sutvarkytu *sąrašu.* Šiuo atveju, kiekvienas sąrašo elementas pateikiamas naudojant du laukus: *informacinį* lauką bei nuorodą į elementą, tiksliau kalbant arba lauko pradžią, kartais pabaigą nurodančius elementus. Visas sąrašas pradedamas nuoroda į pirmąjį elementą.

elem =**record**
$i : info$; (informacinis laukas)
$n :\uparrow$ elem (nuoroda į kitą elementą)

end record

Šiuo atveju operacija $\in$ yra $O(n)$ sudėtingumo, o operacijos $\cup, \cap, \subset$ yra $O(mn)$ sudėtingumo eilės, m, n yra aibių, tarp kurių atliekami veiksmai elementų skaičius. Jeigu sąrašuose visi elementai yra išdėstyti lauko didėjimo kryptimi, tai šiuo atveju visų operacijų sudėtingumo eilės vienodo ir lygios $O(n)$. Aibių veiksmams atlikti naudosime sutvarkytus sąrašus.

Pateiksime algoritmą, kuriuo remiantis nustatoma ar viena aibė yra kitos aibės poaibis.

Įv: aibės A, B kurios pateikiamos nuorodomis a, b atitinkamai.

Išv: 1, jei $A \subset B$ ir 0 kitu atveju.

$pa := a; pb := b$
while $pa \neq$ **nil** ir $pb \neq$ **nil do**
if $pa.i < pb.i$ **then**
return 0 (aibės A elemento nėra aibėje B
else if $pa.i > pb.i$ **then**
$pb := pb.n$ (aibės A elementas galbūt yra aibėje B)
else
$pa := pa.n$ (čia $pa.i = pb.i$)
$pb := pb.n$ (aibės A elementas yra aibėje B)
end if
end while
return $pa =$ **nil**

Aptarkime šį algoritmą. Kiekviename žingsnyje galima viena iš trijų situacijų: nagrinėjamas aibės A elementas yra mažesnis, lygus arba didesnis negu aibės B nagrinėjamas elementas. Pirmu atveju, aibės A elementas nepriklauso B elementui, taigi algoritmą galime baigti. Antru atveju, tikriname aibės B elementus, tikėdamiesi, kad rasime sutampantį elementą. Trečiuoju atveju randami sutampatis elementai. Baigiant pagrindinį ciklą galimi du atvejai: $pa =$ **nil** arba $pa \neq$**nil.** Pirmuoju atveju gauname, kad visiems aibės A elementams radome sutampančius elementus aibėje B. Antru atveju- aibė B baigėsi anksčiau, t.y. ne visiems aibės A elementams radome lygius atitikmenis.

Aptarsime aibių, pateiktų sutvarkytais sąrašai, sąjungos skaičiavimo algoritmą.

Įv: aibės A, B, kurios pateikiamos nuorodomis a, b atitinkamai.

Išv: sąjunga $C = A \cup B$ su nuoroda c.

$pa := a; pb := b; c :=$**nil**, $e :=$**nil**.
while $pa \neq$ **nil** ir $pb \neq$ **nil do**
if $pa.i < pb.i$**then**
$d := pa.i; pa := pa.n$ (prijungiamas aibės A elementas)
else if $pa.i > pb.i$ **then**
$d := pb.i; pb := pb.n$ (prijungiamas aibės B elementas)
else
$d := pa.i$ (čia $pa.i := pb.i$ (galima imti bet kurį elementą)
$pa := pa.n; pb := pb.n$
end if
$Append(a, e, d)$ (prijungiamas elementas d sąrašo c pabaigoje)
end while
$p :=$**nil**
if$pa :\neq$**nil then**
$p := pa$ (prie rezultato reikia prijungti visus A elementus)
end if
if$pb :\neq$**nil then**
$p := pb$ (prie rezultato reikia prijungti visus B elementus)
end if
while $p \neq$**nil do**
$Append(c, e, p.i)$
$p := p.n$
end while

Funkcija (procedūra) $Append(c, e, d)$ prie sąrašo c pabaigos e prijungia elementą d.

Aprašykime šią funkciją.

Įv: nuoroda c nurodantis sąrašo pirmąjį elementą, nuoroda $e-$ sąrašo paskutinijį elementą, pridedamas elementas d.

Išv: nuoroda c, nuoroda $e-$ paskutinis sąrašo elementas

$q := new(elem)$; $q.i := d$; $q.n :=$**nil** (naujas sąrašo elementas)

if$c =$ **nil then**

$c := q$

else

$e.n := q$

end if

$e := q$

Aptarkime šį algoritmą.

Pradžioje iškvietę funkciją *Append* turi c, e išvalytus laukus. Po pirmojo žingsnio nuoroda c nurodo pirmąjį sąrašo elementą, o rodiklis $e-$ į paskutinijį (šis elementas po pirmojo žingsnio lygus pirmąjam). Jei nuorodos c ir e nėra tuščios ir nurodo į sąrašo pradžią ir pabaigą, tai po eilinio žingsnio (iškvietimo) šias reikšmes išsaugo.

Aptarsime dviejų aibių, pateiktų sutvarkytais sąrašais, sankirtos algoritmą.

Įv: aibės A, B, kurios pateikiamos nuorodomis a, b atitinkamai.

Išv: sąjunga $C = A \cap B$ su nuoroda c.

$pa := a; pb := b; c :=$**nil**, $e :=$**nil**.

while $pa \neq$ **nil** ir $pb \neq$;

if $pa.i < pb.i$**then**

$pa := pa.n$ (aibės A elementas nepriklauso sankirtai)

else if $pa.i > pb.i$ **then**

$pb := pb.n$ (aibės B elementas nepriklauso sankirtai)

else

(čia $pa.i := pb.i$ (elementas priklauso sankirtai)

$Append(c, e, pa.i)$ $pa := pa.n$; $pb := pb.n$

end if

end while

Uždaviniai

1. Tarkime, kad universali aibė $I = [-30, 30]-$ yra realiųjų skaičių intervalas. Sak-k-me, kad $A = \{-5, 2, 6, 15\}$, $B = (-5, 15)-$ realiųjų skaičių intervalas, $C = \{2, 3, 6\} \vee (7, 11]$.

a) Raskite šių aibių papildinius.

b) Nurodykite aibių elementus: $(A \cap B)^c, (C^c \cup B) \setminus A, A \cap C$.

2. Raskite aibės $\{a, b, 1, 2\}$ visus poaibius. Tarkime, kad aibėje yra 20 elementų. Kiek skirtingų poaibių galima sudaryti iš minėtos aibės elementų?

3. Užrašykite nelygybių

$$x^2 - 9 \leq 0, |x| - 2 > 0, x^2 - 3|x| + 2 > 0$$

sprendinių aibių sankirtą, sąjungą, pirmosios ir trečiosiosios nelygybių sprendinių aibių skirtumą . Kaip atrodo trečiosios nelygybės sprendinių aibės papildinys?

4. Ar teisingi teiginiai: Jei $A \setminus B = \emptyset$ tai $A \subset B$. Jei $A \setminus B = A$ tai $B = \emptyset$.

5. Įrodykite, kad $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

6. Įrodykite, kad $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

7. Raskite aibių $A = \{1, 2, a, 3\}$ ir $B = \{2, b, 3, 0\}$ Dekarto sandaugą $A \times B$ ir $B \times A$. Raskite aibes $(A \times B) \setminus (B \times A)$.

8. Įrodykite aibių veiksmų savybes 1-9.

9. Tarkime, kad sąryšis $f : A \to B$ apibrėžtas tokiu būdu: aibės $A = \{2, 8, 10\}$ elementas mažesnis už aibės $B = \{7, 9, 11\}$ elementą. Raskite šios atitikties apibrėžimo bei reikšmių aibes. Nurodykite šios atitikties grafiko taškus. Raskite priešingąją bei atvirkštinę atitiktis. Iliustruokite šias atitiktis grafais.

10. Tarkime, kad atitiktis apibrėžta grafiku:

$$G_R = \{(1, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6)(1, 3)\}.$$

Raskite šiai atitikčiai atvirkštinę bei priešingąją atitiktis.

11. Įrodykite Dekarto sandaugos savybes 1- 5.

12. Parodykite, kad natūraliųjų skaičių aibė ir natūraliųjų lyginių skaičių aibės yra ekvivalenčios. Nurodykite bijekciją, siejančių šių aibių elementus.

13. Kodu vadiname bet kokią vienetų ir nulių seką (kiek norimai ilgą). Parodykite, kad ši sekų aibė nėra ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei.

14. Kurios iš pateiktų funkcijų $y = f(x)$ yra: siurjekcija, injekcija, bijekcija?

$$1)\ \ y = \sin x, x \in \mathcal{R}, y \in [-1, 1] \quad 2)\ \ y = \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}], y \in [-1, 1]$$

$$3)\ \ y = \sin x, x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y \in [-1, 1]$$

$$4)\ \ y = \sin x, x \in [-1, 1], y \in [-1, 1].$$

15. Nustatykite, kurie iš pateiktų binarinių sąryšių apibrėžtų realiųjų skaičių aibėje yra simetriniai, tranzityvūs, refleksyvūs:

$$" \leq ",\ \ " = ",\ \ " > ".$$