I. ĮVADAS

1.1 Aibės. Aibių veiksmai.

Aibe vadinsime, bet kokį objektų rinkinį. Objektai sudarantys minėtąjį rinkinį vadinami aibės elementais. Ateityje aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o jos elementus mažosiomis.

Sakysime, kad aibė A yra aibės B poaibis (žymėsime $A \subset B$), jeigu visiems $x \in A$ išplaukia, kad $x \in B$. Sakysime, kad aibė A yra lygi aibei B, jei $A \subset B$ ir $B \subset A$. Aibių A ir B sankirta (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę $C = \{x, x \in A \wedge x \in B\}$. Aibę $D = \{x, x \in A \vee x \in B\}$ vadinsime aibių sąjunga, kurią žymėsime $A \cup B$. Sakysime, kad aibės nesikerta, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe. Aibių A ir B skirtumu, kurią žymėsime $A \setminus B$, vadinsime aibę $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$. Aibės A papildiniu, kurią žymėsime A^c, vadinsime aibę $A^c = \{x, x \notin A\}$. Tarkime, kad A kokia nors aibė. Bet kokią aibių šeimą vadinsime *klase* (kodėl ne aibe?) ir žymėsime didžiąja, rašytine, lotyniškosios abėcėlės raide, pavyzdžiui, $\mathcal{A}$.

Tarkime $\mathcal{N}-$ natūraliųjų skaičių aibė. Tada, bet kokį šios aibės poaibį $\Lambda \subset \mathcal{N}$, vadinsime indeksų aibe. Tarkime, kad apibrėžta funkcija $f : \Lambda \to \mathcal{A}$. Tada aibę $\{X_\lambda \in \mathcal{A}, \lambda \in \Lambda\}$ vadinsime klasės $\mathcal{A}$ elementų seka, jeigu aibė Λ begalinė, ir elementų rinkiniu, jeigu aibė Λ baigtinė.

Apibrėžkime:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{x; \exists \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\}$$

ir

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \{x; \forall \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\}.$$

Aibių veiksmų savybės

1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.
2. $A \nabla B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. $\left(A^c\right)^c = A$.
4. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Tarkime, kad Λ indeksų aibė ir $\forall \lambda \in \Lambda, D_\lambda \subset \mathcal{D}$, čia $\mathcal{D}$ kokia nors aibės D poaibių klasė. Teisingi tokie teiginiai:

$$8. \quad D \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D \setminus D_\lambda.$$

$$9. \quad D \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} D \setminus D_\lambda.$$

Sakykime, kad $\{A_n\}$ kokia nors klasės $\mathcal{A}$ elementų seka.

Apibrėžimas Elementų, kurie priklauso begaliniam aibių A_n skaičiui, aibę vadinsime limit superior arba viršutine aibių sekos $\{A_n\}$ riba, kurią žymėsime $\limsup A_n$. Kitaip tariant, egzistuoja aibė $\Lambda \subset \mathcal{N}$ tokia, kad visiems $\lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda$.

Sakysime, kad aibių seka A_n yra monotoniškai mažėjanti, jei

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset \ldots.$$

Analogiškai, sakysime, kad aibių seka yra monotoniškai didėjanti, jei

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_n \subset \ldots.$$

Apibrėžimas *Tarkime A, B bet kokios aibės. Taisyklę f, kuria remiantis aibės A elementams priskiriami aibės B elementai vadinsime atvaizdžiu, apibrėžtu aibėje A ir įgyjančių reikšmes aibėje B. Žymėsime $f : A \to B$. Elementui $a \in A$ priskiriamą elementą $b \in B$ žymėsime $f(a)$ arba $b = f(a)$. Sakysime, kad $f(a)$ yra elemento a vaizdas, o a yra elemento $b = f(a)$ pirmvaizdis.*

Atvaizdžio f pirmvaizdžių aibė paprastai žymima $D(f)$ ir vadinama atvaizdžio apibrėžimo sritimi. Atvaizdžio reikšmių sritis $E(f)$ yra aibės B poaibis, kurios visi elementai turi pirmvaizdžius, $E(f) = \{f(x); x \in A\}$. Mes žymėsime šią aibę $E(f)$.

Tarkime, kad atvaizdis $f : A \longrightarrow B$. Tada atvaizdį $f^{-1} : B \longrightarrow A$ vadinsime atvaizdžiui f atvirkštiniu atvaizdžiu, jeigu $f^{-1}(y) = x$ tada ir tik tada , kai $f(x) = y$. Pastebėsime, kad pirmojo skyrelio pradžioje pateiktas funkcijos apibrėžimas tėra atskiras atvaizdžio atvejis. Aibę $G(f) := \{(x, y); x \in D(f); y \in E(f)\}$ vadinsime atvaizdžio grafiku.

Sakome, kad atvaizdis $f : X \to Y$ yra *siurjekcija*, jeigu $D(f)$=X ir $E(f)$=Y. Jeigu $f : X \to Y$ yra siurjekcija, tai tada žymėsime, $f(X)$=Y.

Sakome, kad atvaizdis $f : X \to Y$ yra *injekcija*, jeigu skirtingi pirmvaizdžiai turi skirtingus vaizdus ir atvirkščiai. Sakome, kad atvaizdis $f : X \to Y$ yra *bijekcija*, jeigu jis yra injekcija ir siurjekcija kartu. Pastarasis atvaizdis dar vadinamas abipus *vienareikšme atitiktimi*.

Nesunku matyti, kad tarp atvaizdžių ir jų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis. T.y. skirtingi atvaizdžiai apibrėžia skirtingus grafikus ir atvirkščiai. Dėl šios priežasties, ateityje, šias sąvokas dažnai tapatinsime, jei tai nesudarys painiavos, kadangi skaitytojas, manome, atkreipė dėmesį į tai, kad atvaizdis ir jo grafikas yra skirtingos sąvokos.

Atvaizdžių savybės

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Jeigu atvaizdis yra bijekcija, tai

3. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$.

1.2 Metrinės erdvės

Tarkime, kad E netuščia aibė. Jos elementus vadinsime taškais.

Tarkime, kad $\mathcal{R}$ realiųjų skaičių aibė.

Apibrėžimas *Funkciją $\rho : E \times E \to \mathcal{R}$, kuri su bet kokia pora $(x, y) \in E \times E$ tenkina reikalavimus*

1) $0 \leq \rho(x, y) < \infty$,

2) $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$,

3) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$,

4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \quad x, y, z \in X$,

vadinsime metrika apibrėžta aibėje E.

Vėliau gana dažnai teks naudoti nelygybę:

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y),$$

kurios įrodymą paliekame skaitytojui.

Apibrėžimas *Tarkime, kad aibėje E apibrėžta metrika ρ. Tada porą (E, ρ) vadinsime metrine erdve. Metrikos reikšmę, bet kokiai erdvės taškų porai, vadinsime atstumu tarp erdvės taškų. Metrikos apibrėžimą, erdvėje, vadinsime erdvės metrizavimu.*

Apibrėžimas *Sakykime, kad (E_1, ρ_1) ir (E_2, ρ_2) dvi metrinės erdvės. Tuomet bijekciją $f : E_1 \longrightarrow E_2$, vadinsime erdvių izometrija (trumpumo dėlei tiesiog izometrija), jeigu bet kokiai erdvės E_1 elementų porai x, y teisinga lygybė:*

$$\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y)).$$

Pastebėkime, kad šiuo atveju atvirkštinis atvaizdis taip pat yra erdvių izometrija. Metrines erdves, tarp kurių galime apibrėžti izometriją, vadinsime izometrinėmis.

Taigi, jei erdvės izometrinės, tai erdvių elementų metrinės savybės nepriklauso nuo erdvės, kurioje jas nagrinėjame (pradinėje ar jai izometrinėje). Dar daugiau, jeigu (E, ρ) metrinė erdvė, o $f : E \longrightarrow E'$, tai mes galime 'pasigaminti' erdvę, izometrinę pradinei, apibrėžę atstumą tarp dviejų elementų erdvėje E', tokiu būdu: $\rho(x', y') = \rho(x, y)$, čia $x' = f(x), y' = f(y)$.

1.3 Aplinkos

Mes nagrinėjame metrinių erdvių savybes, todėl aplinkos, bei atviros aibės sąvokas apibrėšime remdamiesi metrikos apibrėžimu.

Apibrėžimas *Metrinės erdvės E aibę $B(a, r) = \{x \in E; \rho(a, x) < r\}$ vadinsime atviru rutuliu (ateityje tiesiog rutuliu), su centru taške a, o aibę $\overline{B}(a, r) = \{x \in E; \rho(a, x) \leq r\}$ - uždaru rutuliu. Aibė $S(a, r) = \{x \in E; \rho(a, x) = r\}$ vadinama sfera, kurios centras taške a. Bet kokį atvirą rutulį, kuriam priklauso taškas x_0, vadinsime šio taško aplinka.*

Apibrėžimas *Tašką a vadiname vidiniu aibės A tašku, jeigu egzistuoja atviras rutulys $B(a, r) \subset A$, kuriam priklauso šis taškas.*

Apibrėžimas *Aibę vadinsime atvira, jeigu visi jos taškai yra vidiniai.* Aibės A vidinių taškų aibę, žymėsime A° ir vadinsime aibės vidumi. Aišku, kad $A^\circ \subset A$. Be to, aibės vidus yra didžiausia atvira aibė, kuri yra duotosios aibės poaibis.

Aibę $A' \subset B$ vadinsime uždara, jeigu jos papildinys, iki aibės B, yra atvira aibė.

Pavyzdžiui, bet koks uždaras rutulys yra uždara aibė. Intervalai $[a, +\infty), (-\infty, a]$ yra uždaros aibės realiųjų skaičių aibėje. Beje, intervalas $[a, b)$ yra nei uždaras nei atviras realiųjų skaičių aibėje.

Tarkime, kad (E, ρ) - metrinė erdvė. Sakysime, kad aibė $A \subset E$ yra aprėžta, jeigu egzistuoja rutulys $B(a, r)$ toks, kad $A \subset B(a, r)$. Netuščios aibės A skersmeniu vadinsime aibės $\overline{\mathcal{R}}$ elementą:

$$\delta(A) := \sup_{x,y \in A} \rho(x, y).$$

Iš skersmens apibrėžimo išplaukia, kad $\delta(A) \in [0, +\infty]$. Naudodami skersmens apibrėžimą galime kiek kitaip charakterizuoti aibės aprėžtumo sąvoką. Taigi, jei aibės skersmuo baigtinis skaičius, tai aibė aprėžta ir jei jos skersmens reikšmė lygi $+\infty$, tai aibė neaprėžta.

Apibrėžimas *Atstumu tarp aibės $A \subset E$ ir taško $x \in E$ vadiname skaičių*

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} \rho(x, y).$$

Beje, jeigu taškas $x \notin B(a, r)$, tai $d(x, B(a, r)) \geq \rho(a, x) - r$.

Tarkime, kad A yra erdvės (E, ρ) aibė. Tašką $x \in E$ vadinsime šios aibės ribiniu tašku, jeigu bet kokia šio taško aplinka kertasi su A. Kitaip tariant, šio taško aplinkoje yra bent vienas aibės A taškas (gal būt ir jis pats). Visų aibės A ribinių taškų aibė yra vadinama jos *uždariniu* ir žymima A^u. Teigdami, kad $x \notin A^u$ kartu tvirtiname, jog $x \in (E \setminus A)^0$. Taigi, uždarinys - uždara aibė. Nesunku suprasti, kad $A^0 \subset A^u$. Kokia bebūtų aibė A, A^u yra mažiausia uždara aibė tenkinanti savybę: $A \subset A^u$. Taigi, uždaras aibes galime charakterizuoti ir taip: aibė uždara tada ir tik tada, kai $A = A^u$. Verta pastebėti ir tokią, metrinės erdvės savybę - taškas x priklauso aibės A uždariniui tada ir tik tada, kai $d(x, A) = 0$.

1.4 Tolydieji atvaizdžiai

Apibrėžimas *Aibių šeimą $\{A_l; l \in L, A_l \in E\}$, vadinsime aibės A denginiu, jeigu $A \subset \cup_{l \in L} A_l$.*

Tarkime, kad aibė

$$A \neq \emptyset.$$

Tada šios aibės denginį, tenkinantį savybes: $A_i \cap A_j \emptyset, i \neq j$ vadinsime aibės skaidiniu.

Tarkime, kad (E, ρ), ir (E', ρ') dvi metrinės erdvės.

Apibrėžimas *Atvaizdį $f : E \longrightarrow E'$ vadinsime tolydžiu taške $a \in E$, jeigu bet kokiai taško $f(a) \in E'$ aplinkai $V_{f(a)}$ galime nurodyti taško a aplinką $V_a \subset E$ tokią, kad $f(V_a) \subset V_{f(a)}$.*

Sakoma, kad atvaizdis f *tolydus aibėje* A, jeigu jis tolydus, bet kokiame šios aibės taške, trumpai tai žymėsime $f \in \mathcal{C}(A)$.

Žemiau pateiktoje teoremoje nurodomos būtinos ir pakankamos sąlygos, metrikos terminais, kad atvaizdis būtų tolydus taške.

1 Teorema Tam, kad atvaizdis $f : E \longrightarrow E'$ būtų tolydus taške $a \in E$, būtina ir pakanka, kad visiems $\epsilon > 0$ egzistuotų $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ toks, kad $\rho'(f(a), f(x)) < \epsilon$, kai $\rho(a, x) < \delta$.

Sakykime, kad $f : E \longrightarrow E'$. Tada tokie tvirtinimai yra lygiaverčiai:

1) atvaizdis f tolydus aibėje E ;

2) bet kokiai atvirai aibei $A' \subset E, f^{-1}(A')$ yra atviras aibės E poaibis;

3) bet kokiai uždarai aibei $B \subset E, f^{-1}(B)$ uždaras aibės E poaibis;

4) bet kokiai aibei $A \subset E, f(A^u) \subset (f(A))^u$.

Pavyzdys. Funkcija $f(x) = 1/x$ nėra tolydi aibėje $[0, 1] \subset \mathcal{R}$, kadangi uždaros aibės $[1, \infty)$ pirmvaizdis $(0, 1]$ nėra uždara aibė.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei atvaizdis tolydus, tai atviros aibės vaizdas nebūtinai atvira aibė. Panagrinėkime gerai žinomą funkciją $f(x) = x^2$. Yra žinoma, kad pastaroji funkcija tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje. Nesunku matyti, kad atviros aibės $(-1, 1)$ vaizdas yra intervalas $[0, 1)$ kuris nei atvira, nei uždara realiųjų skaičių aibė.

Tarkime, kad E, F, G metrinės erdvės, ir $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$. Jeigu f tolydus taške $a \in E$, o g tolydus taške $f(a)$, tai atvaizdis $h : E \longrightarrow G$, kuris apibrėžiamas formule $h = g(f(x))$ ir žymimas $h = g \circ f$, yra tolydus taške a. Atvaizdį h vadinsime atvaizdžių f ir g kompozicija.

Atvaizdis yra funkcijos apibendrinimas, todėl visos atvaizdžių sąvokos yra analogiškai formuluojamos ir funkcijoms.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad jei $A \subset E$ yra netuščia, tai $f(x)=d(x, A)$ yra tolydi funkcija.

Tegu $\mathcal{N}$ - natūraliųjų skaičių aibė, (E, ρ) - metrinė erdvė. Tada erdvės E *elementų seka* vadinsime aibę $\{f(n), n \in \mathcal{N}\}$, čia $f : \mathcal{N} \longrightarrow E$ yra funkcija. Kitaip tariant, bet kokią sunumeruotą metrinės erdvės elementų, begalinę aibę, vadinsime seka. Naudosime įprastą sekos žymėjimą: $\{x_n\} : =\{x_n \in E; n \in \mathcal{N}\}$.

Sakysime, kad $a \in E$ yra sekos $\{x_n\}$ *riba*, kai n neaprėžtai auga, jeigu, bet kokiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti natūralųjį skaičių n_0, kad kai tik $n > n_0$, tai $\rho(x_n, a) < \epsilon$. Žymėsime, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Beje, naudodami sekos ribos apibrėžimą taipogi galime tikrinti funkcijos tolydumą, t.y. funkcija tolydi taške a, jeigu bet kokiai sekai $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$.

Elementų seką $\{x_n\} \subset E$ vadinsime Koši seka, jei visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti n_0, kad visiems $m, n > n_0$ teisinga nelygybė $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Apibrėžimas Metrinę erdvę E vadinsime pilna, jeigu bet kuri šios erdvės Koši seka turi ribą, priklausančią šiai erdvei.

Elementų seką $\{x_n\} \subset E$ vadinsime Koši seka, jei visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti n_0, kad visiems $m, n > n_0$ teisinga nelygybė $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Nesunku parodyti, kad bet kuri konverguojanti seka yra ir Koši seka. Deja, atvirštinis teiginys, bendrai paėmus, neteisingas. Tačiau paminėsime ypač mums svarbią aplinkybę, t.y., jei seka yra Koši seka ir be to papildomai žinome šios sekos kokią nors ribinę reikšmę, tai tada ir pradinė seka turi ribą. Dar daugiau, sekos riba sutampa su minėtuoju ribiniu tašku.

Apibrėžimas *Metrinę erdvę E vadinsime pilna, jeigu bet kuri šios erdvės Koši seka turi ribą, priklausančią šiai erdvei.*

Pavyzdys. Aibė $\mathcal{R}$ yra pilna metrinė erdvė. Tai išplaukia iš Heinės - Borelio lemos.

Beje, racionaliųjų skaičių aibė nėra pilna. Kodėl?

Jei seka turi ribą, tai ji vienintelė (įrodykite !). Taigi jei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}a \in \overline{F}$ ir tartume, kad Koši seka turi ribą $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}b \in F$, tai remdamiesi ribos vienetinumu gauname, kad $a{=}b$, o iš pastarosios lygybės gauname, kad $\overline{F}{=}F \Rightarrow F$ uždara aibė.

$\oplus$

Kodėl tokios svarbios pilnos metrinės erdvės, kodėl jas išskiriame iš kitų? Iš aukščiau padarytų pastabų tikimės, skaitytojas pastebėjo, jog tam, kad įrodytume sekos konvergavimą metrinėje erdvėje, pakanka įrodyti kad nagrinėjama seka yra Koši seka. Be to, naudojant Koši kriterijų nereikia iš anksto žinoti ribinės reikšmės, kurią paprastai būna sunku nurodyti. Pilnumas šios ribos egzistavimą užtikrina. 1.3 pav. pateikta Koši sekos, konverguojančios į aibę A, aštuoni nariai.

Jeigu metrinės erdvės ekvivalenčios (metriškai ekv.), tai šiuo atveju pakanka seką nagrinėti vienoje iš erdvių, t.y., jei seka yra Koši seka vienoje erdvėje, tai šią savybę turi ir antroje, kadangi konvergavimas yra metrinė savybė.

1.5 Pratęsimo teorema. Kompaktai. Fraktalų metrinė erdvė

2 Teorema *Sakykime, kad f, g du tolydūs atvaizdžiai apibrėžti metrinėje erdvėje E su reikšmėmis metrinėje erdvėje (E', ρ'). Tada aibė $A = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ yra uždara erdvėje E.*

$\ominus$

Tarkime, kad f ir g du tolydūs atvaizdžiai, apibrėžti aibėje E, įgyjantys reikšmes aibėje E'. Tuomet, jeigu $f(x) = g(x)$, visiems $x \in A$ ir aibė A tiršta erdvėje E, tai $f \equiv g$ erdvėje E. Pastarasis pastebėjimas išplaukia iš to, kad $\{x; f(x) = g(x)\}$ yra uždara, taigi, jos uždarinys sutampa su visa erdve.

Pastebėsime, kad jeigu f, g tolydūs atvaizdžiai, tai aibė $\{x \in E; f(x) \leq g(x)\}$ taipogi uždara.

Apibrėžimas *Metrinę erdvę E vadinsime kompaktu, jeigu iš bet kokio jos atvirų aibių denginio $\{U_l, l \in L\}$ galime išskirti baigtinį pošeimį, kuris taip pat dengia erdvę E.*

Pastarasis apibrėžimas remiasi topologinėmis erdvės savybėmis. Pateiksime kitą kompakto apibrėžimą, naudodamiesi metrinėmis erdvės savybėmis. Sakykime (E, ρ) metrinė erdvė.

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinės erdvės aibė $S \subset E$ yra kompaktiška, jeigu iš bet kokios elementų sekos $\{x_n \subset S\}$ galime išskirti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, kurio riba priklauso aibei S.*

Jeigu metrinė erdvė turi šią savybę, tai minimą erdvę vadinsime kompaktu.

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinė erdvė E visiškai aprėžta, jeigu visiems $\epsilon > 0$ egzistuoja baigtinė aibė $F \subset E$ turinti savybę: $d(x, F) < \epsilon, x \in E$.* Baigtinė aibė F turinti minėtąją savybę dar vadinama *ϵ- tinklu*. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad visiškai aprėžta pilna metrinė erdvė yra kompaktiška ir atvirkščiai (įrodykite!). Beje, visiškas aprėžtumas yra erdvės metrinė savybė.

1.6 Transformacijos

Apibrėžimas *Tarkime, kad* (X, ρ) *metrinė erdvė. Tuomet funkciją* $f : X \longrightarrow X$ *vadinsime erdvės transformacija į save pačią.*

Erdvės transformaciją $f : X \longrightarrow X$ vadinsime *tapačiąja*, jeigu visiems $x \in X$, $f(x) = x$. Ateityje tapačiąją transformaciją žymėsime $f^{\circ}(x) = x$.

Tarkime, kad $f : X \longrightarrow X$. Tada transformacijų seką

$$f^{(\circ)}(x) = x, f^{(1)}(x) = f(x), f^{(2)}(x) = f(f(x)), \dots, f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), \dots$$

vadinsime *iteracine transformacijų seka*. $n-$ ąją iteraciją vadinsime $n-$ uoju iteracijos (sekos) nariu. Jeigu transformacija apverčiama (kokios sąlygos turi būti išpildytos!), tai tada *atvirkštinę transformacijų seką* apibrėžiame tokiu būdu:

$$f^{(-1)}(x) = f^{-1}(x), \dots f^{(-m)}(x) = (f^{(m)})^{-1}(x),\ m = 1, 2, \dots.$$

Apibrėžimas *Stačiakampę realiųjų skaičių lentelę, kurioje* m *eilučių bei* n *stulpelių vadinsime* $m \times n$ *eilės matrica ir žymėsime,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricą vadinsime *kvadratine*, jeigu jos eilučių ir stulpelių skaičius sutampa.

Sakysime, kad dvi matricos lygios, jeigu yra tos pat eilės ir atitinkami jų elementai lygūs. Matricas žymėsime arba didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, arba simboliais $A = (a_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Beje, kai žinome kokios eilės matricas nagrinėjame, arba kai eilė nesvarbi, tai indeksų i, j kitimo aibės nenurodysime.

Tos pat eilės matricų aibėje apibrėšime daugybos iš skaičiaus, bei sudėties operacijas. Tarkime, kad $r \in \mathcal{R}$. Tada skaičiaus ir matricos sandauga yra tokia matrica :

$$r(a_{ij}) = (ra_{ij}).$$

Matricų (a_{ij}) ir (b_{ij}) suma vadinsime matricą

$$(a_{ij} + b_{ij}).$$

Matricą O vadinsime *nuline*, jeigu visi jos elementai lygūs nuliui.

Sakysime, kad transformacija neišsigimusi, jeigu jos matricos determinantas nelygus nuliui. Ateityje nagrinėsime tik neišsigimusias transformacijas.

Apibrėžimas *Transformaciją* $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ *vadinsime afinine, jei*

$$f(x_1, \dots, x_n) = (u_1, \dots, u_n)$$

tada ir tik tada, kai egzistuoja kvadratinė $n-os$ eilės matrica A tokia, kad

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Paminėsime kelias afininių transformacijų savybes. Visų pirma tai, kad bet kokia afininė transformacija lygiagrečias tieses atvaizduoja į lygiagrečias tieses. Kitaip tariant lygiagretainį atvaizduoja į lygiagretainį, nors bendru atveju ir kitokį. Tačiau afininė transformacija išlaiko atkarpų santykį. Taigi, bet koks trijų taškų santykis nepriklauso nuo afininės transformacijos. Ši savybė labai svarbi, kadangi ji iš esmės naudojama transformacijai apibrėžti. Transformacija nusakyta, jeigu trys vektoriai nesantys vienoje tiesėje atvaizduojami vėl į tris vektorius nesančius vienoje tiesėje. Raskime transformaciją, kuri taškus A, B, C, nesančius vienoje tiesėje, atvaizduoja į taškus A', B', C'. Vietoje kintamųjų įrašę taškų koordinates, gauname šešias lygtis su šešiais nežinomaisiais - $a_1, a_2, b_1, b_2, x_0, y_0$. Išsprendę šią lygčių sistemą ir rasime transformacijos plokštumoje, kuri atvaizduoja taškus A, B, C į taškus A', B', C', matricą. Iš pastarosios savybės galime padaryti išvadą, kad $n-$kampis taip pat atvaizduojamas į $n-$kampį. Jau esame minėję, kad lygiagretainis atvaizduojamas į lygiagretainį, bet to paties pasakyti apie stačiakampį bendru atveju negalime. Taigi, afininių transformacijų kompozicija - afininė transformacija. Ši savybė būdinga ir bendroms afininėns transformacijoms, žinoma neišsigimusioms. Be to afininei transformacijai atvirkštinė taip pat afininė.

Apibendrindami padarysime tokią išvadą: figūros afininė transformacija yra arba jos judesys arba suspaudimas bei ištęsimas arba šių transformacijų kompozicija. Kiekvieną afininę transformaciją galime suskirstyti į dvi transformacijas 1) kai ortogonalinį reperį transformuojame į kitą ortogonalinį reperį nekeisdami reperio vektorių ilgių - šiuo atveju gauname judesį ir 2) kai transformuoto vektoriaus krypčių nekeičiame, o pakeičiame tik jų ilgius, gauname suspaudimą arba ištęsimą. Apie transformacijos spaudžiamąjį arba tempiamąjį pobūdį galima spręsti iš jos determinanto reikšmės. Jeigu determinanto absoliutinė skaitinė reikšmė didesnė už vienetą, tai vaizdo plotas didesnis už pirmvaizdžio plotą, jeigu determinanto absoliutinė reikšmė mažesnė už vienetą tai vaizdo plotas mažesnis. Vaizduojama figūra apverčiama, jei determinanto reikšmė neigiama.

Erdvės afininės transformacijos turi analogiškas savybes kaip ir plokštumos, todėl atskirai jų nenagrinėsime, palikdami tai skaitytojui, tik paminėsime, kad afininė transformacija apibrėžta erdvėje, jeigu duotieji keturi taškai nesantys vienoje plokštumoje atvaizduojami į keturius taškus nesančius taip pat vienoje plokštumoje. T.y. šiuo atveju transformacijos matricos determinantas bus nelygus nuliui.

Aptarkime dar vieną afininės transformacijos atvejį - homotetiją. *Homotetija* vadinama tokia plokštumos arba erdvės transformacija, kai vienas taškas (sakykime O) lieka vietoje, o bet kuris kitas taškas A atvaizduojamas į tašką A' esantį tiesėje OA tokiu būdu, kad $\overrightarrow{OA}' = k\overrightarrow{OA}$; čia k pastovus skaičius. Taškas O vadinamas homotetijos centru, k homotetijos koeficientu. Jeigu $k > 0$ tai taškas A' yra iš tos pat pusės nuo taško O, tokia homotetija vadinama tiesiogine, kai $k < 0$ - tai priešingose pusės, ji vadinama atvirkščiąja.

Atkreipsime dėmesį, kad homotetija, tiesė atvaizduojama į jai lygiagrečią tiesę. Homotetinės figūros paprastai vadinamos *panašiomis*.

Kompiuterinei grafikai ypatingai svarbus yra plokštumos atvejis tai pateiksime šios transformacijos matricinę formą. Afininės transformacijos, plokštumoje, matricą visuomet galima užrašyti taip:

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} r_1 \cos\xi_1 & r_2 \sin\xi_2 \\ r_1 \sin\xi_1 & r_2 \cos\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ b_1 x + b_2 y \end{pmatrix},$$

kur (r_1, ξ_1) taško (a_1, b_1) polinės koordinatės, o $(r_2, \xi_2 + \frac{\pi}{2})$ taško (a_2, b_2) polinės koordinatės. Skaičiai r_1, r_2 vadinami sąspūdžio koeficientais, ξ_1, ξ_2 posūkio kampais. Žemiau pateiktame paveikslėlyje demonstruojamos afininės transformacijos $W(x,y)$ galimybės:

Siūlome skaitytojui panagrinėti paskutiniąjį reiškinį ir nustatyti, kokias sąlygas turi tenkinti dydžiai r_1, r_2, ξ_1, ξ_2, kad transformacija būtų judesys, homotetija, arba suspaudžiančioji (ištempiančioji).

Norėtume atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad jei transformacija, tris taškus nesančius vienoje tiesėje, atvaizduoja į taškus, kurie yra vienoje tiesėje, tai ši transformacija yra išsigimusi, t.y. jos determinantas lygus nuliui.

Tarkime, kad reikia rasti trasformaciją, kuri tris plokštumos taškus

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$$

atvaizduotų į pasirinktus tris taškus $(x'_1, x'_2), (y'_1, y'_2), (z'_1, z'_2)$.

Sudarome sistemas, transformacijos koeficientams rasti

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + e = x'_1, \\ ay_1 + by_2 + e = y'_1, \\ az_1 + bz_2 + e = z'_1, \end{cases} \quad \begin{cases} cx_1 + dx_2 + f = x'_2, \\ cy_1 + dy_2 + f = y'_2, \\ cz_1 + cz_2 + f = z'_2. \end{cases}$$

Išsprendę šias dvi sistemas randame transformaciją, kuri atlieka nurodytą veiksmą.

3 Teorema *Tarkime kad afininė transformacija W atvaizduoja plokštumos sritį S, kurios plotas P_s į sritį S', kurios plotas $P_{s'}$. Tada teisinga lygybė:*

$$P_{s'} = |detW| P_s.$$

Šio skyrelio pabaigoje atkreipsime dėmesį į tai, kad remdamiesi afininės transformacijos determinanto reikšme galime nustatyti vaizdo santykį su pirmvaizdžiu, būtent vaizdas spaudžiamas (plotas mažėja), jei determinanto reikšmė mažesnė negu 1, plečiamas- jei determinanto reikšmė didesnė negu 1. Jei determinantas neigiamas- vaizdas apverčiamas.

1.7 Bendrosios koordinačių keitimo formulės

Kuomet nagrinėjame laisvai pasirinktą metrinę erdvė, tai apie taškų padėtį erdvėje nelabai ką tegalime pasakyti. Tiesa, metrika sudaro galimybes nustatyti taškų tarpusavio padėtį, tačiau jei atstumas tarp kurių nors taškų vienodas, faktiškai šie skaičiai nieko nepasako apie taškų tarpusavio padėtį. Šis trūkumas pašalinamas apibrėžus koordinačių sistemą erdvėje.

Koordinačių sistema erdvėje vadinsime bijektyvią erdvės X transformaciją θ į kokią nors erdvę $X_k \subset \mathcal{R}^k, (\theta : X \longrightarrow X_k)$. Kitaip tariant, bet kokiam metrinės erdvės elementui priskiriame $k-$matį vektorių. Metrinės erdvės elemento koordinatėmis vadiname jo vaizdo koordinates. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad metrinė erdvė X ir jos vaizdas X_k yra homeomorfinės, todėl šias erdves homeomorfizmo atžvilgiu galime sutapatinti.

Pavyzdžiui erdvėje $X = [0, 1]$ bet kokio taško koordinates galime nusakyti taip: $\theta(x) = x$. Tuo tarpu kompleksinių skaičių erdvėje galime naudoti jau mums žinomą Dekarto koordinačių sistemą. Auksčiau esame nagrinėje erdvę $\overline{\mathcal{C}}$. Šioje erdvėje galime naudoti sferos taškų koordinates kurios, savo ruožtu, nusakomos tokiu būdu:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\alpha \\ y = r\sin\beta\cos\alpha \\ z = r\cos\alpha. \end{cases}$$

Kadangi Rymano sfera ir išplėstinė plokštuma homeomorfinės, tai suprantama, Rymano sferos taško koordinatę galime laikyti jį atitinkančio išplėstinės plokštumos taško koordinate aukščiau užrašytoje sistemoje paėmę $r = 1$. Taigi, šiuo atveju taško $\infty \in \overline{\mathcal{C}}$ koordinatės yra lygios $(0, 0, 1)$.

Manome, kad skaitytojas supranta, kad toje pat erdvėje galima apibrėžti ne vieną koordinačių sistemą. O kiek gi koordinačių sistemų galime apibrėžti fiksuotoje erdvėje? Ar galime suformuluoti koordinačių keitimo problemą bendru atveju? Panagrinėkime šį klausimą.

Tarkime, kad $g : X_k \longrightarrow X_k$ kuri nors erdvės, kurioje apibrėžta koordinačių sistema, bijektyvi transformacija. Vadinasi, $X_k = g(X_k)$. Jeigu transformacija g netapačioji, tai $\exists x' \in g(X_k)$ kad $x' \neq x$. Tad šis atvejis netrivialus. Tarkime X_0- fiksuotas erdvės taškas. Sakykime, kad x jo koordinatė pradinėje koordinačių sistemoje, o x' jo koordinatė naujoje koordinačių sistemoje, kitaip tariant $x' = g(x)$. Sakykime, kad $f : X \longrightarrow X-$ kita bijektyvi erdvės transformacija į save. Tuomet ši transformacija naujoje bazėje bus žymima $f'(x')$. Pastebėsime, kad $g(f(x)) = f'(x')$. Taigi

$$f' : g(X) \longrightarrow g(X)$$

arba, $g \circ f(x) = f'(x')$. Bet $x' = g(x)$, todėl $x = g^{-1}(x')$. Tada tašką x transformacija f veikia tokiu būdu:

$$f(x) = f \circ g^{-1}(x'), \Longrightarrow g \circ f(x) = f'(x') = g \circ f \circ g^{-1}(x).$$

Iš pastarųjų lygybių išplaukia tokios lygybės:

$$f(x) = (g^{-1} \circ f' \circ g)(x),\ f'(x') = (g \circ f \circ g^{-1})(x').$$

Priminsime, kad $g-$ koordinačių sistemos transformacija.

1.8 Specialūs tiesinių transformacijų atvejai

Apibrėžimas *Transformaciją $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ apibrėžtą sąryšiu $Y = AX$, čia A yra kvadratinė $n-$ os eilės matrica, X, Y yra vektorinės erdvės $\mathcal{R}^n$ vektoriai stulpeliai, vadinsime tiesine transformacija. Matrica A bus vadinama tiesinės transformacijos matrica.*

Transformaciją A vadinsime *nuline*, jeigu šios transformacijos matrica nulinė. Tapačiosios transformacijos matrica yra vienetinė. Sakysime, kad trasformacija yra išsigimusi, jeigu šios transformacijos matricos determinantas yra lygus nuliui.

Panagrinėkime trasformacijas dvimatėje bei trimatėje erdvėse.

1. Atspindžio transformacijos

Apibrėžimas Tiesinę transformaciją vadinsime *atspindžio transformacija*, jeigu bet kokiam vektoriui ši transformacija priskiria vektorių, simetrišką tiesės arba plokštumos atžvilgiu.

Tarkime, kad tiesinės transformacijos matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada ši matrica vaizduoja simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu. 3.5 skyrelyje esame apibrėžę transformacijų, kurios simetriškai atvaizduoja koordinatinių ašių atžvilgiu, matricas.

Dabar nurodysime matricas, kurios vaizduoja simetriškai koordinatinių plokštumų atžvilgiu.

Atspindį xy plokštumos atžvilgiu atlieka trasformacija, kurios matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

xz plokštumos atžvilgiu-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

yz plokštumos atžvilgiu-

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ortogonaliosios projekcijos

Apibrėžimas *Transformaciją vadinsime ortogonaliąja, jeigu bet kokiam vektoriui ši trasformacija priskiria šio vektoriaus ortogonaliąją projekciją tiesėje arba plokštumoje.*

Transformacijos, atliekančios ortogonaliąją projekciją į:

xy plokštumą matrica yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

xz plokštumą-

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

yz plokštumą-

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nesunku suprasti, kad projektuojant į koordinatines ašis Ox, Oy, Oz teks naudoti transformacijas, kurių matricos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

atitinkamai.

3. Posūkiai

Apibrėžimas Posūkiu plokštumoje xy, kampu θ, vadinsime tiesinę transformaciją f_θ, kuri kiekvieną vektorių šioje plokštumoje pasuka kampu θ, prieš laikrodžio rodyklę.

Taigi, transformacijos f_θ, matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas Tarkime, kad l yra tiesė trimatėje erdvėje, ir šiai tiesei priklauso taškas $(0,0,0)$. Tarkime, kad $\overrightarrow{u}$ yra vektorius tiesėje l. Tada posūkiu vektoriaus $\overrightarrow{u}$ kryptimi vadinsime posūkį, kuris atliekamas naudojant dešinės rankos taisyklę(kuris atliekamas sukant bet kokį vektorių dešinės rankos sulenktų pirštų kryptimi, kai nykštys nukreiptas vektoriaus $\overrightarrow{u}$ kryptimi).

Transformacijos, kurios atlieka posūkius, kampu θ, apie koordinatines ašis x, y, z apibrėžtos matricomis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 1 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

atitinkamai.

4. Spaudimas ir tempimas

Apibrėžimas Tegu $X \in \mathcal{R}^n$ ir $k > 0$. Tada transformaciją $f(X) = kX$ vadinsime *suspaudimu*, jeigu $k < 1$ ir ištempimu, jei $k > 1$.

Šios transformacijos matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Aukščiau išdėstyta medžiaga sudaro prielaidas praktinių uždavinių sprendimui. Sprendžiant praktinius uždavinius paprastai tenka nuosekliai taikyti vieną po kitos transformacijas, perkeliant objektus erdvėje.

Susipažinkime su transformacijų kompozicijos sąvoka.

Apibrėžimas *Tarkime, kad f ir g yra dvi transformacijos, apibrėžtos erdvėje $\mathcal{R}^n$ įgyjančios reikšmes šioje pat erdvėje. Tada transformaciją*

$$(f \circ g)(X) = f(g(X))$$

vadinsime tiesinių transformacijų f ir g kompozicija.

Pastebėsime, kad jei transformacijos f matrica yra F, o transformacijos g matrica yra G, tai kompozicijos $f \circ g$ matrica yra FG, o šios matricos determinantas yra lygus šių matricų determinantų sandaugai.

Pateiksime algoritmą, kaip galima rasti transformacijos, kuri atlieka erdvės $\mathcal{R}^3$ posūkį, kampu ϕ vektoriaus $u = (a, b, c)$ kryptimi, matricą.

1. Papildome vektorių u iki erdvės $\mathcal{R}^3$ bazės u, v, w;
2. Ortonormuojame šią bazę- naują ortonormuotą bazę žymėsime u_0, v_0, w_0;
3. Sudarome matricą

$$C = (u_0^T | v_0^T | w_0^T)$$

;

4. Randame ieškomosios transformacijos matricą A :

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\phi) & \sin(-\phi) \\ 0 & -\sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} C^T$$

1.9 Kvarterionai. Kvarterionų aritmetika

Mes aptarėme, kokiu būdu kompleksinių skaičių algebra yra naudojama plokštumos taškų transformacijoms. Analogišką problemą galima spręsti ir trimatėje erdvėje, naudojant kvarterionus.

Tarkime, kad $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ yra objektai, turintys savybę; $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Be to, tarkime, kad $a, b, c, d \in \mathcal{R}$. Tada simbolį

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} =: a + \alpha = \mathcal{K}.$$

vadinsime *kvarterionu*. Realius skaičius a, b, c, d vadinsime kvarteriono komponentėmis. Komponentė a vadinama kvarteriono skaliarine dalimi, o vektorius α, kvarteriono vektorine dalimi. Sakysime, kad du kvartenionai yra lygūs, jeigu atitinkamos kvartenionų komponentės yra lygios.

Pažymėkime:

$$\mathcal{K}_n = a_n + ib_n + jc_n + kd_n := a_n + \alpha_n, \quad n \in \mathcal{N},$$

a_n yra kvarteriono skaliarinė dalis, o $\alpha_n = ib_n + jc_n + kd_n$ yra kvarteriono vektorinė dalis. Kvarterioną, kurio skaliarinė dalis lygi nuliui vadinsime *grynuoju kvarterionu* ir žymėsime $\mathcal{K}_n^0$. Grynąjį kvarterijoną, kurio vektorinė dalis yra nulinis vektorius, žymėsime simboliu $\mathcal{O}$, o kvarterijoną, kurio vektorinė dalis yra nulinis vektorius, o skaliarinė dalis yra lygi 1, vadinamas vienetu kvarterionų aibėje ir žymimas $\mathcal{I}$.

Apibrėžkime kvarterionų aritmetinius veiksmus.

Tarkime, kad a yra realusis skaičius, o $\mathcal{K}_1$ kvarterionas. Tada kvarteriono ir realaus skaičiaus sandauga vadinsime kvarterioną:

$$a\mathcal{K}_1 = aa_1 + iab_1 + jac_1 + kad_1.$$

Tegu $a, b \in \mathcal{R}$. Pateiksime keletą svarbesnių šių veiksmų savybių. Ši operacija tenkina tokias savybes:

1. $a\mathcal{K} = \mathcal{K}a$;
2. $(a+b)\mathcal{K} = a\mathcal{K} + b\mathcal{K}$;
3. $(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)a = \mathcal{K}_1 a + k_2 a$

Kvarterionų $\mathcal{K}_1$ ir $\mathcal{K}_2$ suma vadinsime kvarterioną:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 := a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Kvarterionų $\mathcal{K}_1$ ir $\mathcal{K}_2$ skirtumu vadinsime tokią šių kvarterionų sumą:

$$\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2 := \mathcal{K}_1 + (-1)\mathcal{K}_2.$$

Kvarterionų suma tenkina tokias savybes:

1. $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_1$;
2. $(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) + \mathcal{K}_3 = \mathcal{K}_1 + (\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3)$

Tegu α_1 ir α_2 dvi kvarterionų vektorinės dalys. Tada simboliais $\alpha_1 \circ \alpha_2$ bei $\alpha_1 \times \alpha_2$ žymėsime šių vektorių skaliarinę ir vektorinę sandaugas atitinkamai. Priminsime, kad

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2, \quad \text{ir} \quad \alpha_1 \times \alpha_2 = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2).$$

Tada, kvarterionų $\mathcal{K}_1^0$ ir $\mathcal{K}_2^0$ sandauga vadinsime kvarterioną:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^0 * \mathcal{K}_2^0 := -\mathcal{K}_1^0 \circ \mathcal{K}_2^0 + \mathcal{K}_1^0 \times \mathcal{K}_2^0.$$

Bendruoju atveju sandauga apibrėžiama tokiu būdu:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 := a_1 a_2 - \alpha_1 \circ \alpha_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 + \alpha_1 \times \alpha_2.$$

Kvarterionų sandauga tenkina tokias savybes:

1. $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 \neq \mathcal{K}_2 * \mathcal{K}_1$;
2. $\mathcal{K} * (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) = \mathcal{K} * \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} * \mathcal{K}_2$;

3. $(\mathcal{K} * \mathcal{K}_1) * \mathcal{K}_2 = \mathcal{K} * (\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2)$.
4. $(a_1 + \mathcal{K}_1) * (a_2 + \mathcal{K}_2) = a_1 a_2 + a_1 \mathcal{K}_2 + a_2 \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$.
Kvarterioną $\overline{\mathcal{K}} = a - \alpha$ vadinsime kvarterionui $\mathcal{K}$ *jungtiniu kvarterionu.*
Pastebėsime, kad

$$\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}} = (a + \alpha)(a - \alpha) = a^2 + a\alpha - a\alpha + (u, u) + \mathcal{O} =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Kvarteriono ilgiu (moduliu) vadinsime tokį skaičių:

$$|\mathcal{K}| = \sqrt{\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Kvarterioną $\mathcal{K}^{-1}$ vadinsime kvarterionui $\mathcal{K} = a + \alpha$ atvirkštiniu kvarterionu, jei $\mathcal{K} * \mathcal{K}^{-1} = 1$.

Apibrėžkime kvarterioną tokiu būdu:

$$\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{K}} \frac{1}{\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}}}.$$

Pasirodo, kad $\mathcal{K}'$ yra kvarterionui $\mathcal{K}$ atvirkštinis kvarterionas. Skaitytojui siūlome įrodyti, kad

$$\mathcal{K}^{-1} = \frac{\overline{\mathcal{K}}}{\mathcal{K} * \overline{\mathcal{K}}}.$$

1.10 Kvarterionai ir posūkiai trimatėje erdvėje

Teorema *Tarkime, kad α yra koks nors trimatės erdvės vektorius, o K yra nenulinis kvarterionas. Tada reiškinys*

$$\mathcal{K}^{-1} * \alpha * \mathcal{K}$$

yra vektorius.

Kitaip tariant funkcija $f_{\mathcal{K}} : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$, $f(\alpha) = \mathcal{K}^{-1} * \alpha * \mathcal{K}$, $\quad \mathcal{K} \neq 0$, yra tiesinė transformacija vektorinėje erdvėje $\mathcal{R}^3$.

Skaitytojui siūlome įsitikinti šio teiginio teisingumu.

Pastebėsime, kad $\forall \alpha, \mathcal{K} \neq 0, \quad f_{\mathcal{K}}(\alpha) = f_{a\mathcal{K}}(\alpha),\ a \in \mathcal{R}$. Dėl šios priežasties, galime nagrinėti normuotus kvarterionus. Ateityje laikysime, kad $|\mathcal{K}| = 1$. Pasirodo, kad jei $|\mathcal{K}| = 1$, tai tiesinė transformacija $f_{\mathcal{K}}$ yra ortogonali. Ortogonaliosios transformacijos nekeičia koordinačių sistemos orientacijos. Taigi

$$\mathbf{i}' = \mathcal{K}^{-1} * \mathbf{i} * \mathcal{K}; \;\; \mathbf{j}' = \mathcal{K}^{-1} * \mathbf{j} * \mathcal{K}; \;\; \mathbf{k}' = \mathcal{K}^{-1} * \mathbf{k} * \mathcal{K}.$$

Skaitytojui siūlome parodyti, kad $\mathbf{i}' \times \mathbf{j}' = -\mathbf{j}' \times \mathbf{i}' = \mathbf{k}'$, $\;\mathbf{j}' \times \mathbf{k}' = -\mathbf{k}' \times \mathbf{j}' = \mathbf{i}'$, $\;\mathbf{k}' \times \mathbf{i}' = -\mathbf{i}' \times \mathbf{k}' = \mathbf{j}'$.

Kaip atrodys šie veiksmai, jei operacijos ženklą $\times$ pakeisime ženklu $*$?

Sakysime, kad kvarterionas yra vienetinis (vienetinis kvarterionas literatūroje dažnai vadinamas unimoduliariniu.) Priminsime, kad $\mathcal{K} = a + \alpha$. Kadangi kvarterionas $\mathcal{K}$ yra unimoduliarinis, tai remdamiesi ilgio apibrėžimu gauname, kad

$$a^2 + b^2 + c^2 + c^2 = 1.$$

Bet $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Taigi, $a^2 + |\alpha|^2 = 1$. Turime, kad dviejų skaičių kvadratų suma lygi 1. Remdamiesi trigonometrinių funkcijų apibrėžimu darome išvadą, kad egzistuoja kampas θ toks, kad $\sin\theta = |\alpha|$ ir $\cos\theta = a$.

Matome, kad $\mathcal{K} = \cos\theta + \frac{\alpha}{|\alpha|}\sin\theta$.

Pažymėkime $\alpha_0 = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ ir be to tegu β_0, bet koks vienetinis vektorius, statmenas vektoriui α_0. Apibrėžkime vektorių $\gamma_0 = \alpha_0 \times \beta_0$. Pastebėsime, kad $\gamma_0 = \alpha_0 * \beta_0$.

Trimatėje erdvėje generuojame ortonormuotą bazę, kurios vektoriai α_0, β_0, γ_0. Panagrinėkime, kokiu būdu veikia transformacija

$$f_{\mathcal{K}}(u) = \mathcal{K}^{-1} * u * \mathcal{K}$$

šiuos bazinius vektorius.

Skaičiuojame:

$$f_{\mathcal{K}}(\alpha_0) = \mathcal{K}^{-1} * \alpha_0 * \mathcal{K} = (\cos\theta - \sin\alpha_0\theta) * \alpha_0 * (\cos\theta + \alpha_0\sin\theta) = \alpha_0.$$

Taigi, vektorius α_0 yra nejudamas šios transformacijos taškas.

Panagrinėkime, kaip yra transformuojamas vektorius β_0. Skaičiuojame

$$f_{\mathcal{K}}(\beta_0) = \mathcal{K}^{-1} * \beta_0 * \mathcal{K} = (\cos\theta - \sin\alpha_0\theta) * \beta_0 * (\cos\theta + \alpha_0\sin\theta) = \beta_0\cos(2\theta) - \gamma_0\sin(2\theta).$$

Visiškai analogiškai

$$f_{\mathcal{K}}(\gamma_0) = \mathcal{K}^{-1} * \gamma_0 * \mathcal{K} = (\cos\theta - \sin\alpha_0\theta) * \gamma_0 * (\cos\theta + \alpha_0\sin\theta) = \gamma_0\cos(2\theta) + \beta_0\sin(2\theta).$$

Matome, kad šios transformacijos matrica yra tokia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Taigi, ši transformacija atlieka erdvės posūkį kampu -2θ apie vektorių α_0.

Trumpai apibendrinkime gautą rezultatą. Tarkime, kad erdvės vektorių δ, suksime kampu φ apie vektorių α. Tai galime atlikti transformacija $f_{\mathcal{K}}(\delta) = \mathcal{K}^{-1} * \delta * \mathcal{K}$;

čia

$$\mathcal{K} = \cos(-\frac{\varphi}{2}) + \frac{\alpha}{|\alpha|}\sin(-\frac{\varphi}{2}).$$

Ir atvirkščiai, jei turime unitarųjį kvarterijoną

$$\mathcal{K}_0 = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k},$$

tai transformacija $f_{\mathcal{K}_0}(x) = \mathcal{K}_0^{-1} * x * \mathcal{K}_0$ atlieka erdvės posūkį apie vektorių $\alpha = (b, c, d)$ kampu $-\varphi = 2\arccos a$.

1.11 Jungiosios erdvės ir jungiosios aibės

Apibrėžimas *Sakysime, kad metrinė erdvė yra jungi, jeigu tik dvi šios erdvės aibės - pati erdvė ir tuščia aibė yra tuo pat metu atviros ir uždaros aibės.*

Perfrazuokime šį apibrėžimą kiek kitaip. Metrinė erdvė yra jungi, jeigu šioje erdvėje neegzistuoja netuščių atvirų aibių tokia pora, $A, B \subset E, A \neq E, B \neq E$, kad $A \cup B = E$ ir $A \cap B = \emptyset$.

Jeigu erdvėje tik vienas elementas, tai tada erdvė jungi. Sakome, kad metrinė erdvė E yra lokaliai jungi, jeigu visiems $x \in E$ egzistuoja fundamentali taško x aplinkų šeima tokia, kad bet kuri šios šeimos aibė yra jungi.

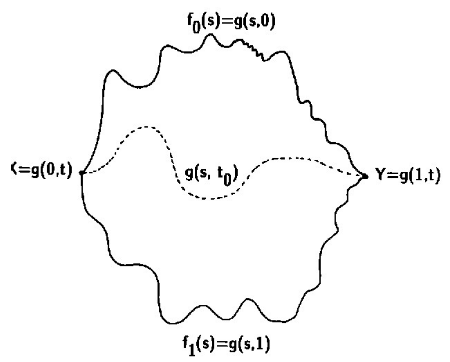
Sakysime, kad aibė $D \subset E$ yra jungi, jeigu neegzistuoja netuščių atvirų aibių pora nesutampanti su D tokia, kad $A \cup B = D$, $A \cap B = \emptyset$.

Aibę S vadinsime visiškai nejungia, jeigu jos jungūs, netušti poaibiai yra tik pavieniai taškai.

Tarkime, kad $S \subset E$ koks nors metrinės erdvės poaibis. Sakysime, kad S yra trajektorijomis jungi, jeigu egzistuoja tolydi funkcija $f : [0,1] \longrightarrow S$ tokia, kad visiems $x, y \in S, f(0) = x, f(y) = y$. Kitaip tariant, bet kokius šios aibės taškus galime sujungti tolydžia trajektorija. Aukščiau esame minėję, kad tarp funkcijų ir funkcijų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis, todėl ateityje funkciją f tiesiog vadinsime trajektorija, jungiančia aibės S taškus.

Tuo atveju, kai tokia funkcija neegzistuoja, tai sakysime, kad aibė nėra trajektorijomis jungi.

Sakoma, kad aibė S yra vienajungė, jeigu bet kokiems šios aibės taškams ir bet kokioms trajektorijoms jungiančioms šiuos taškus, galime nurodyti tolydžią funkciją, kuri apibrėžta vienos kreivės taškuose, o reikšmes įgyja kitos kreivės taškuose. Tokią funkciją vadinsime deformacija (tolydžia deformacija).



1 pav.

Sakykime, kad $x, y \in S$. Be to dvi tolydžios kreivės f_0, f_1 jungia šiuos taškus t.y. $f_0(0) = f_1(0) = x$ ir $f_0(1) = f_1(1) = y$. Tuomet tolydžią deformaciją galime apibrėžti taip:

$g = g(x,y)$; $g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow S$ tokia, kad

$$\begin{cases} g(s,0) = f_0(s), s \in [0,1]; \\ g(s,1) = f_1(s), s \in [0,1]; \\ g(0,t) = x, t \in [0,1]; \\ g(1,t) = y, t \in [0,1]. \end{cases}$$

Sakysime, kad du taškai x, y yra susiję, jeigu nagrinėjamoje aibėje bet kokios dvi trajektorijos f_0 ir f_1, jungiančios minėtuosius taškus, priklauso kokios nors deformacijos $g(s,t)$ reikšmių aibei (žr. 1 pav.).

Nevienajungė aibė, yra vadinama *daugiajunge* aibe.

1.12 Niutono metodas

Šiame skyrelyje skaitytojui priminsime metodą, kurio dėka galima apytiksliai rasti lygčių šaknis.

Tarkime, kad $y = f(x)$ yra realaus kintamojo funkcija ir bet to $f(z) = 0$ ir $f'(z) \neq 0$. Sakykime, kad $x \in (z - \delta, z + \delta)$. Tada

$$-f(x) - (z - x)f'(x) = \int_x^z (f'(s) - f'(x))\mathrm{ds}.$$

Dar daugiau,

$$\Big(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\Big) - z = \frac{1}{f'(x)} \int_x^z (f'(s) - f'(x))\mathrm{ds}. \qquad (2)$$

Sakykime, kad jei $y \in (z - \mu, z + \mu)$ tada $|f'(y)| \geq \rho > 0$.

Remdamiesi vidurinių reikšmių teorema gauname, kad $|f'(y_1) - f'(y_2)| \leq \rho|y_1 - y_2|$, $\mu \leq \frac{\rho}{\delta}$.

(2) lygybėje pažymėję $x_s := x$ bei

$$x_n := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

gauname, kad

$|x_n - z| \leq \frac{\delta}{2\rho}|x_s - z|^2$. Bet $|x_s - z| < \mu$, taigi

$$|x_n - z| < \frac{\mu}{2}.$$

Vadinasi

$$x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

yra korektiškai apibrėžta. Dar daugiau, kiekviename žingsnyje atstumas nuo naujojo sekos nario iki funkcijos nulio mažėja greičiau negu dvigubai. Tiesa, šis metodas negarantuoja, kad bus konverguojama į artimiausią funkcijos nulį. Beje, jei funkcijos nulyje $f'(z) = 0$, tai Niutono metodas netinka šaknies paieškai.

Šį metodą galima apibendrinti vektorinio arba kompleksinio kintamojo argumentų atveju.

Ateityje be lygties šaknų paieškos problemos mums teks susidurti ir su taškų, kurie konverguoja į nustatytą šaknį, paieškos problema. Pasirodo, kaip jau ir esame minėję, taškas konveguoja į vieną ar kitą šaknį nepriklausomai nuo atstumo.

Pateiksime keletą teiginių kurie sudaro prielaidas apibrėžti šaknų traukos sritis.

Pažymėkime

$$B = \{x; |x| \leq 1\}.$$

Be to $y = f(x)$ yra realaus argumento funkcija tenkinanti sąlygas:

$$f'(x) \neq 0, \quad |f'(x)| \geq \frac{1}{k}, \ \ |f''(x)| \leq k, \ x \in B.$$

Sakykime, kad $k \geq 2^{0.75}$ ir $c = \frac{8}{3}\ln k$. Be to, $f(0) \leq \frac{1}{ke^{\frac{3c}{2}}}$, ir $k \leq e^{\frac{3c}{8}}$ ir

$$\frac{1}{e^{-(\frac{c}{2})} - 1} \leq 1.$$

Tada Niutono iteracinė seka konverguoja prie taško z, $f(z) = 0$ ir

$$|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{e^{c(1.5)^n}}.$$

Ši teorema turi prasmę, kai nulis $z \in B$.

Kaip išvestinė skaičiuojama apytiksliai? Skaičiuojant apytiksliai, paprastai išvestinė yra keičiama kirstine:

$$f'_{ap} = \frac{f(x_c) - f'(x_-)}{x_c - x_-}.$$

Taigi, kiekviename žingsnyje mes dvi argumento reikšmes susiejame susiejame su dviem funkcijos reikšmėmis. Pastebėsime, kad jei $f'(z) = 0$ tai Niutono metodo nulių paieškai taikyti negalima.

Panagrinėkime Niutono metodo taikymą vektorinio argumento funkcijos atveju. Tarkime, kad funkcijos nulis yra taškas z. Be to tarkime, kad $x \in B(z, \rho)$. Pazymėkime $v_x = z - x$ ir tegu

$$u(t) = f(x + tv_x).$$

Beje, $u(1) = f(z)$, ir $z(0) = f(x)$. Diferencijuodami šią funkciją t atžvilgiu gauname, kad

$$z'(t) = f'(x + tv_x)v_x.$$

Tada

$$-f(x) = f(z) - f(x) = \int_0^1 f'(x + tv_x)v_x \mathrm{d}t.$$

Vadinasi

$$-f(x) - v_x f'(x) = -f(x) - f'(x)(z - x) = \int_0^1 (f'(x + tv_x) - f'(x))v_x \mathrm{d}t.$$

Laikydami, kad $|f'(x)| \neq 0$ gauname

$$(x - |f'(x)|^{-1} f(x)) - z = |f'(x)|^{-1} = \int_0^1 (f'(x + tv_x) - f'(x))v_x \mathrm{d}t.$$

Tarkime, kad $\|(f'(x))\| \leq \mu$ and

$$\|f'(y_1) - f'(y_2)\| \leq \delta \|y_1 - y_2\|$$

visiems $y_1, y_2, y \in B(z, \delta)$.

Tarkime, kad $\rho \leq \mu/\delta$.

Pažymėję

$$x_n = x_s - \frac{f(x_s)}{f'(x_s)}$$

gauname, kad

$$\|x_n - z\| \leq \frac{\delta}{\mu} \int_0^1 t\|v_x\|\|v_x\| \mathrm{d}t = \frac{\delta}{2\mu} \|x_s - z\|^2.$$

Toliau naudojame tuos pačius argumentus kaip ir vieno kintamojo atveju.

1.13 Fraktalų metrinė erdvė.

Sakykime, kad (E, ρ) pilna metrinė erdvė. Pažymėkime

$$H(E) = \{C \subset E, C \neq \emptyset, C - \text{kompaktiška aibė}\}.$$

Kitaip tariant, $H(E)$ yra metrinės erdvės netuščių, kompaktiškų aibių klasė.

4 Teorema *Jeigu $X, Y \in H(E)$, tai tada ir $X \cup Y \in H(E)$.*

Pastebėsime, kad jeigu $X, Y \in H(X)$, tai nebūtinai $X \cap Y \in H(E)$. Pastarojo tvirtinimo teisingumas išplaukia iš to, kad dviejų kompaktiškų aibių sankirta gali būti tuščia. Bet tuščia aibė nepriklauso aibei $H(E)$.

Priminsime, kad atstumu tarp erdvės elemento $x \in E$ ir aibės $A \subset E$ laikome tokį skaičių

$$d(x, A) = \inf(\rho(x, y); y \in A), \tag{1}$$

čia ρ yra erdvės E metrika.

5 Teorema Atstumas, apibrėžtas (1) lygybe, yra tolydi funkcija aibėje E, jei aibė $A \neq \emptyset$.

Pastarąjį teiginį siūlome įrodyti skaitytojui.

Tarkime, kad $B \in H(X)$. Kyla pagrįstas klausimas - ar ši apatinė riba yra pasiekiama? Kitaip tariant ar aibėje $H(E)$ atstumas d korektiškai apibrėžtas. Pažymėkime $f(y) = \rho(x, y)$, $P = P(x) = \inf\{f(y); y \in B, x \in E\}$. Matome, kad $f(y) \geq 0$. Sakykim, kad $y_0 \in B$ ir $\rho(x, y_0) = P$. Kadangi aibė B kompaktiška, tai egzistuoja realiųjų skaičių seka, $\{y_n; n \in \mathcal{N}\} \subset B$ tokia, kad $|f(y_n) - P| < 1/n$, visiems n. Bet kompaktiškos aibės elementų seka $\{y_n\}$ turi konverguojantį posekį $\{y_{n_k}\}$, kad $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \in B$. Naudodamiesi tuo, kad $f(y)$ tolydi gauname, $f(y_0) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Taigi, tikslus apatinis rėžis egzistuoja ir priklauso aibei B.

Sakykime, kad $A, B \subset H(E)$. Tada aibių funkciją

$$d(A, B) = \max\{\rho(x, B) : x \in A\},$$

vadinsime atstumu tarp aibių A ir B. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pastaroji aibių funkcija nėra simetriška kintamųjų atžvilgiu, t.y. $d(A, B) \neq d(B, A)$. Jeigu $B \subset C$, tai $d(X, C) \leq d(X, B)$, bet kokiai aibei $X \subset H(E)$. Pažymėkime $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ir $a \vee b = \max\{a, b\}$.

6 Teorema *Jeigu* $A, B, C, \subset H(E)$, *tai* $d(A \cup B, C) = d(A, C) \vee d(B, C)$.

$\ominus$

Sakykime, kad $A, B \subset H(E)$. Aibių A ir B Hausdorfo atstumu vadinsime aibių funkciją $h : H(E) \times H(E) \longrightarrow \mathcal{R}$,

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

Tarkime, kad (X, ρ) kokia nors metrinė erdvė. Tada porą

$$(H(X), h)$$

vadinsime fraktalų metrine erdve.

1.14 Klasikiniai fraktalai

1.**Kantoro aibė (Kantoro dulkės)**

Pažymėkime $I_0(a, b) = [a, b] \in \mathcal{R}$. Tarkime, kad F uždaras, tiesiškai sutvarkytas aibės I_0 poaibis. Intervalą $I_0(a, b)$ vadinsime pagrindiniu aibės F intervalu, jeigu jis mažiausias uždaras intervalas, kuriam priklauso aibė F. Taigi, šiuo atveju intervalo galai visuomet priklauso aibei F. Priminsime skaitytojui, kad minimali aibių klasė, kuriai priklauso visi realiųjų skaičių intervalai bei kuri uždara, bet kokio skaičiaus sankirtų, sąjungų ir papildinio operacijų atžvilgiu, vadinama Borelio sigma algebra. Matą apibrėžtą šioje algebroje vadinsime Borelio matu. Intervalo ilgis bei intervalo Borelio matas yra tas pat, todėl dažnai jie tiesiog sutapatinami ir Borelio matas vadinamas ilgiu nors, bendrai paėmus, tai ne tas pat. Sakysime, kad aibė yra nulinio mato, jeigu jos Borelio matas lygus nuliui. Tarkime, kad $F = [a, b]$. Tuomet meas$F = b - a$. Tarkime, kad $F \neq [a, b]$, tuomet uždarą aibę gausime iš uždaro intervalo išmetę baigtinę arba skaičią atvirų aibių sąjungą, t.y.

$$F = [a, b] \setminus \cup_n C_n, \tag{1}$$

čia $\{C_n\} \subset [0, 1]$, yra kuri nors atvirų aibių šeima. Taigi, taip nusakyta aibė F yra uždara. Nemažindami bendrumo galime sutarti, kad minėtąją atvirų aibių šeimą sudaro nesikertančios aibės. Aibę F vadinsime nulinio mato aibe, jeigu bet kokiam $\epsilon > 0$ galime nurodyti tokią intervalų šeimą $\{U_n\}$, kad

$$E \subset \bigcup_n U_n \text{ ir } \sum_n L(U_n) < \epsilon.$$

Grįžkime prie (1) aibės. Šios aibės matas yra toks:
meas$F$ = meas$[a, b]$−meas $(\bigcup_n C_n)$. Taigi, F yra nulinio mato, jeigu

$$\sum_n \text{meas} C_n = b - a.$$

Sukonstruosime aibę F, kurios matas būtų lygus 0.

Padalinkime intervalą $[0, 1]$ taškais $0, 1/3, 2/3, 1$ į tris lygias dalis (žr. 1.5 pav.). Išmeskime iš intervalo $I_0 = [0, 1]$ atvirą aibę $C_1 = (1/3, 2/3)$. Likusi aibė $F_1 = I_0 \setminus C_1 = I_1^1 \bigcup I_1^2$ yra uždara, be to intervalo ilgis $|I_1^j| = 1/3, j = 0, 1$. Kitas žingsnis analogiškas pirmajam, t.y. neišmestus intervalus I_1^1, I_1^2 taškais dalijame į tris lygius intervalus, o viduriniuosius intervalus išmetame. Po šio veiksmo liks uždara aibė
$F_2 = \bigcup_{j=1}^4 I_2^j$ ir $|I_2^j| = \Big(1/3\Big)^2$, $j =, 1 \ldots, 4$.

Atlikę n žingsnių gausime uždarą aibę

$$F_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_n^j, |I_n^j| = \Big(\frac{1}{3}\Big)^n, \ j = 1, \ldots, 2^n.$$

Aibės F_n ilgis yra toks:

$$\text{meas} F_n = 1 - \frac{1}{3} - 2\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 - \ldots - 2^{n-1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n.$$

Neaprėžtai didindami šių operacijų skaičių gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \text{meas}(\lim_{n\to\infty}\{I_0 \setminus \bigcup_n C_n\}) = I \setminus C,$$

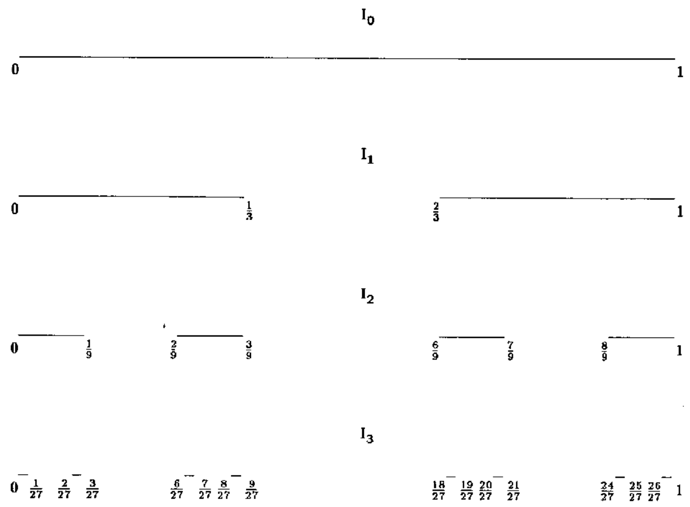
čia C atvira aibė, nes skaiti atvirų aibių sąjunga yra atvira. Be to,

$$\text{meas } F = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n = 0.$$

Matome, kad ribinės aibės F matas lygus nuliui ir be to ši aibė yra uždara.

Šiek tiek plačiau panagrinėkime šią keistą ir neįprastą aibę. Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad aibė F būdama nulinio mato (ją dengiančių intervalų ilgių sumos riba lygi nuliui) tuo pačiu yra diskreti ir tuo pačiu skaiti. Bet šis įspūdis apgaulingas. Pasirodo, kad ši aibė neturi izoliuotų taškų t.y. bet kokioje šios aibės taško aplinkoje yra begalo daug aibės F taškų. Dar daugiau, ši aibė ir neskaiti. Šį fenomeną pailiustruosime tokiu pavyzdžiu. Tarkime, kad uždaros aibės E pagrindinis intervalas yra aibė I_0. Išmeskime iš šio intervalo aibes $(1/(n+1), 1/n), n = 1, \ldots$. Tuomet likusi aibė E yra uždara, be to ją galime nusakyti taip: $E = \{0\}\bigcup_n\{1/n\}$. Nesunku suprasti, kad taškai $1/n, n \in \mathcal{N}$ yra izoliuoti, bet to paties negalime pasakyti apie tašką 0. Taigi, šiuo atveju aibė E nėra diskreti. Aukščiau nagrinėtosios aibės kiekvienas taškas turi analogišką aplinką kaip ir aibės E taškas 0. Tokius taškus vadinsime *akumuliuojančiais*. Aibės, neturinčios izoliuotų taškų, begalinės ir neskaičios yra vadinamos *tobulomis*.

2 pav. pateiktas ketvirtasis iteracinis žingsnis:



2 pav.

Mes gavome, kad aibės F matas lygus nuliui, be to joks intervalas nėra šios aibės poaibis. Todėl atrodytų kas gi čia keisto, kad jei aibę sudaro ne intervalai, tai šios aibės matas lygus nuliui. Ir vėlgi akibrokštas. Pasirodo tam, kad aibės matas būtų teigiamas visai nebūtina, kad šios aibės poaibiu būtų nors vienas intervalas. Tarkime duotas intervalas $[0, 2]$. Fiksuokime šio intervalo viduriniąjį tašką, šiuo atveju 1 ir iš šio intervalo išmeskime intervalą, kurio centrinis taškas yra 1 ir ilgis lygus $1/3$. Sekančiame žingsnyje elgsimės analogiškai, iš likusių dviejų intervalų, kurių ilgiai po 5/6 pašalinkime centrinius intervalus, kurių ilgiai $(1/3)^2$. Pastebėkime, kad intervalų pašalinimo algoritmas panašus į jau nagrinėtąjį (aibės F konstrukcija). n- ąjame žingsnyje gausime 2^n nesikertančių intervalų, kurių ilgiai lygūs $(1/3)^n$, o iš jų išmetamų intervalų ilgių eilė vienetu mažesnė t.y. $(1/3^{n+1})$.

Taigi

$$\text{meas } F = 2 - \sum_n \text{meas} C_n = 2 - \sum_n 2^{n-1} 3^{-n} = 1.$$

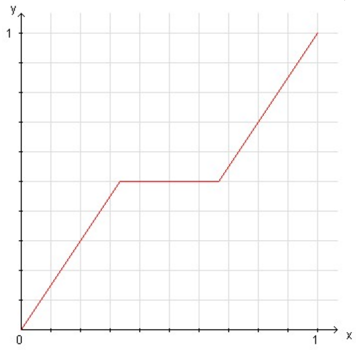
Taigi, likusios aibės matas lygus mes $F = 1$, nors negalime nurodyti intervalo, kuris būtų aibės F poaibis.

Iš pateiktų pavyzdžių išplaukia, kad realiųjų skaičių aibių klasė žymiai "turtingesnė" už intervalų aibę. Tačiau gal būt skaitytojui liko neaišku, kur čia slepiasi fraktalinės struktūros. Į tai pabandysime atsakyti kitame pavyzdyje.

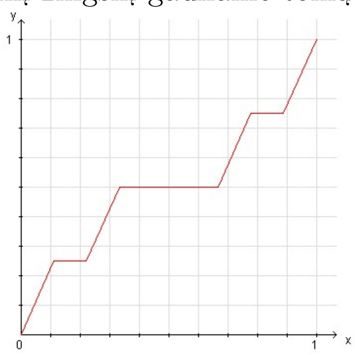
2." Velnio laiptai"

Labai panašiai elgamiesi, kaip ir konstruodami Kantoro aibę, sudarykime dar vieną fraktalinę stuktūrą, kuri, kartais nėra laikoma fraktalu.

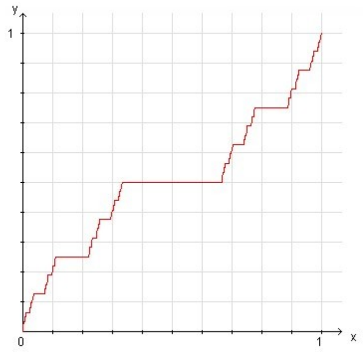
Imkime vienetinį kvadratą, kurio viena viršūnė yra koordinačių pradžioje, o kraštinės Ox ir Oy ašyse. Elgsimės tokiu būdu: Ox ašyje konstruojame Kantoro aibę, tuo pat metu, ties kiekvienu išmetamu intervalu brėžiame lygiagrečią atkarpą išmetamam intervalui $y = 0.5$. Šios atkarpos galus jungiame su taškais $(0, 0)$ ir $(1, 1)$.



Atlikę antrąjį iteracinį žingsnį gauname tokią kreivę

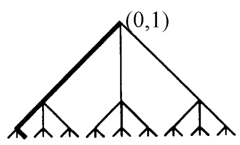


Ir taip toliau. Žemiau pateiktame paveikslėlyje yra pateikiama 6- os iteracijos kreivė. Skaitytojui siūlome rasti ribinės kreivės lanko ilgį bei kokį plotą ši kreivė riboja su Ox ašimi.



3. Binariniai medžiai

Iš praeitame skyrelyje nagrinėtų pavyzdžių (aibės F ir E) buvo galima susidaryti tokį vaizdą: uždarų aibių, kurios lieka išmetant, tam tikra tvarka atviras aibes, topologinės savybės priklauso nuo to kaip realizuojame tą išmėtymą. Pavyzdžiui, aibės E atveju gavome diskrečią aibę su vienu akumuliuojančiu tašku. Jeigu mes tarp dviejų taškų įterpiame trečią, tuomet gauname tobulą aibę. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tokią smulkmeną: - išmetamų intervalų tvarka $C_1, C_2 \dots$ irgi yra svarbi, kadangi nuo šio proceso priklauso likusios aibės topologinės savybės. Panagrinėsime intervalų išmetimo tvarką. Kaip ir anksčiau tarkime, kad $I_0 = [0, 1]$. Tegu I_1^0 yra pirmasis išmetamas intervalas. Apatinis indeksas nurodo kelintame žingsnyje buvo išmestas minimas intervalas, o viršutinis nurodo to intervalo padėtį kitų intervalų atžvilgiu, kai skaičiuoti pradedame nuo nulio. Taigi, pirmąjame žingsnyje (apatinis indeksas vienas) mes išmetame tik vieną intervalą (jo numeris 0). Kitaip tariant šio išmetamo intervalo adresas (0,1). Sekančiame etape pašaliname dar du intervalus I_2^0, I_2^1, taigi jiems priskiriame adresus $(0, 2), (1, 2)$. Trečiąjame tenka pašalinti keturis intervalus, jų adresai - $(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3)$ ir taip toliau. n- ąjame žingsnyje pašalintiems intervalams analogišku būdu suteikiame tokius adresus: $(0, n), (1, n), \dots, (2^{n-1}, n)$. Taigi, kiekvienas išmetamas intervalas inicijuoja dviejų intervalų sekančiame žingsnyje, išmetimą. Jeigu fiksuosime kokį nors adresą, tarkime $(0, 3)$, tai nesunku suprasti, kad jis inicijuoja adresus $(0, 4)$ ir $(1, 4)$. Arba (m, k) - adresus $(2m, k + 1), (2m + 1, k + 1)$, $m \leq 2^{k-1}$. Naudodamiesi šiais adresais galime nubrėžti medį, iš kurio bet kokios viršūnės (i, j) nubrėžtos dvi šakos į žemiau esančias dvi viršūnes. Kartodami šį procesą neaprėžtai!, gauname medį su viršūne $(0, 1)$ ir begaliniu šakų skaičiumi. Nesunku matyti (3 pav.), kad šis medis turi fraktalinę struktūrą.



3 pav.

4. Kocho kreivė.

Kreivė, kurią nagrinėsime šiame skyrelyje (4 pav.), pavadinta švedų matematiko, kuris ją pirmasis sukonstravo, vardu. Tikėdamiesi suintriguoti skaitytoją, užbėgsime įvykiams į priekį, paminėdami keletą neįprastų šios kreivės savybių. Visų pirma tai, kad jokiame šios kreivės taške negalime nubrėžti liestinės, nors ji tolydi visoje apibrėžimo srityje. Antra, šios kreivės ilgis yra begalinis. Atrodytų kas gi čia keisto, juk daug kreivių ilgiai begaliniai, bet įdomu tai, kad ši kreivė yra, baigtinio ploto plokščios figūros, kontūras. Pradžiai gal tiek. Dabar pateiksime šios kreivės geometrinę konstrukciją. Pradėkime nuo tiesės atkarpos kaip ir konstruodami Kantoro aibę. Ši atkarpa vadinama *initiatoriumi*. Padalinkime šią atkarpą, keturiais taškais, į tris lygias atkarpas. Išmeskime viduriniąją atkarpą, o išmestosios vietoje tuštumą užpildome kampu, kurio kraštinių ilgiai lygūs išmestos atkarpos ilgiui. Gauname kreivę (a). Elgdamiesi tokiu pat būdu su kiekviena iš keturių kreivės dalių gauname kreivę (b). Ir taip toliau. Atkarpos trumpėja, o kreivė tampa vis labiau "spygliuota." Kocho kreive yra vadinama ribinė kreivė, kuri gaunama žingsnių skaičių neaprėžtai didinant. 1.7 pav. yra pateikti keturi šios iteracijos nariai.

Panagrinėkime šios kreivės ribojamo ploto bei ilgio problemą. Tarkime, kad pradinio intervalo ilgis lygus 1. Atlikę pirmąjį konstrukcinės sekos žingsnį gauname, kad plokščios figūros ribojamas plotas lygus

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cos 30^\circ = A.$$

Atlikus sekantį sekos žingsnį šalia jau esančios trikampės srities atsirodo dar keturios vienodos trikampės sritys (po vieną kiekvienai atkarpai), kurių plotai lygūs

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cos 30^\circ = \frac{1}{9}A.$$

Tuomet visas, ribojamos srities plotas, lygus $S_1 = \frac{4}{9}A + A$ ir taip toliau. Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$ gausime, kad šios kreivės ribojamos figūros plotas artėja prie tokio skaičiaus:

$$S = A(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots)) = A\{\frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\} = \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Taigi plotas, kurį riboja ši kreivė ir pradinis intervalas, yra baigtinis. To, beje, negalime pasakyti apie šios kreivės ilgį. Initiatoriaus ilgis kaip jau minėjome lygus 1. Nesunku matyti, kad kreivės ilgis, atlikus pirmąjį konstrukcinį žingsnį, lygus $4/3$. Toliau, atlikus antrąjį sekos žingsnį, naujai gautos kreivės ilgis lygus $4/3 + (4/3)^2$ ir taip toliau, atlikus $k-$ atąjį sekos žingsnį gauname, kad sukonstruotos kreivės ilgis yra lygus

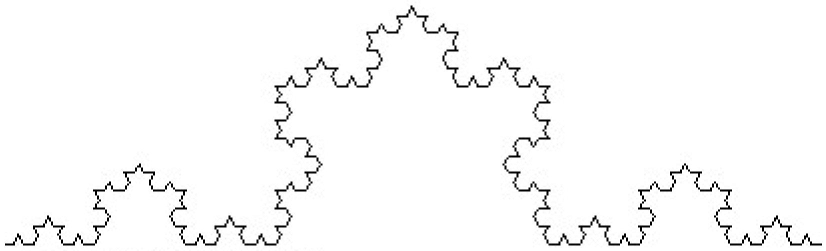
$$\left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Tuomet hipotetinės kreivės ilgis turėtų būti toks:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty.$$

Nesunku suprasti, kad ši seka neaprėžta, taigi Kocho kreivės ilgis yra neaprėžtai didelis.

Paveiksle pateikiame ketvirtąjį šios iteracinės sekos narį:



5. Sierpinskio trikampis

Aibė, kurią apibrėšime žemiau, yra ne ką mažiau įdomi už jau paminėtas.

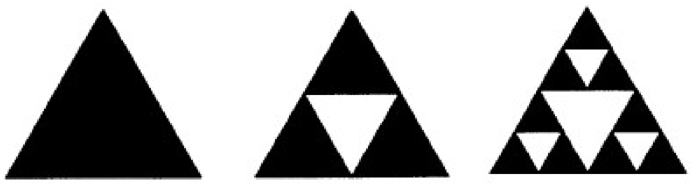
Tarkime duotas lygiakraštis trikampis, kuris yra konstruojamos aibės initiatorius. Trikampio viršūnių taškai priklauso konstruojamai aibei. Pirmąjame žingsnyje sujungę trikampio kraštinių vidurio taškus atkarpomis, padalijame šį trikampį į keturis trikampius ir pašalinę vidinį trikampį prie pradinių trijų taškų prijungiame dar tris šio trikampio vidurio kraštinių taškus. Taigi, po pirmojo žingsnio konstruojamą aibę sudaro šeši taškai. Sekantys konstrukciniai žingsniai analogiški pirmąjam, t.y. neišmestų trikampių kraštinių vidurio taškus sujungiame atkarpomis, tokiu būdu padalindami kiekvieną trikampį į keturis trikampius. Pašalinę vidinius trikampius ir prie konstruojamos aibės prijungę gautųjų trikampių viršūnių taškus (kiek jų yra!) esame pasiruošę žengti sekantį žingsnį. Minėtoji aibė, kuri vadinama Sierpinskio trikampiu, sutampa su šio proceso ribiniu atveju. Beje, manome kad skaitytojas atkreipė dėmesį, kad metodo prasme šis procesas nedaug kuo skiriasi nuo Kantoro aibės konstrukcijos. Paminėsime vieną svarbią ribinės aibės savybę - šios aibės matas (plotas) lygus nuliui. Tarkime, kad nagrinėjamas trikampis lygiakraštis, kurio plotas S. Suskaičiuokime išmetamų trikampių plotą. Nesudėtingų skaičiavimų dėka gauname, kad šis plotas toks:

$$\frac{S}{4} + \frac{3S}{4^2} + \frac{3^2 S}{4^3} + \frac{3^k S}{4^{k+1}} + \ldots = S.$$

Gauname, kad išmestų trikampių plotas lygus pradinio trikampio plotui, taigi Sierpinskio aibės "plotas" lygus nuliui.

Visi pateikti pavyzdžiai sukelia keistų minčių. Kokios čia aibės, kurių egzistavimui pagrįsti reikalinga ribos sąvoka? O gal tai aibės fikcijos, kurios neegzistuoja. T.y. aibės kurios neegzistuoja, o iteracinių žingsnių seka, kuriais "lipdome " aibę, iš ties niekur neveda? Kitais žodžiais tariant, seka nekonverguoja.

Pateikiame iteracinės tris narius:



E_0 E_1 E_2

4 pav.

1.15 Fraktalinės dimensijos samprata.

Tarkime, kad duota atkarpa, kurios ilgis lygus 1. Padalykime šią atkarpą į n lygių dalių. Akivaizdu, kad kiekvienos šios dalies ilgis $r := 1/n$. Tuomet $r \cdot n = 1$. Toliau, tarkime, kad duotas kvadratas, kurio kraštinė lygi 1. Padalykime šį kvadratą į n kopijų tokiu būdu, kad $n \cdot r^2 = 1$. Bet tuomet gauname, kad $r = 1/n^{1/2}$. Atlikime trimatės erdvės objekto, tiksliau kalbant kubo, dalijimo į n lygių dalių, operaciją. Bet kokio kubo tūris lygus jo kraštinės ilgiui trečiuoju laipsniu. Taigi, kraštinės ilgis bus lygus

$$r = \frac{1}{n^{1/3}},$$

kadangi $n \cdot r^3 = 1$.

Šią operaciją apibendrinkime, bet kokio matavimo erdvės kubams. Tarkime, kad $d-$ matį kubą, kurio tūris a (tūriu vadiname šio objekto matą) dalijame į $N := N(d)$ vienodų dalių ir kiekvienos dalies matas yra r^{-d}. Aišku, kad tuomet teisinga lygybė: $aN \cdot r^d = a$. Kitaip tariant, figūrą išskaidėme į N vienodų dalių ir jomis uždengėme nagrinėjamą $d-$ matį kubą. Išsprendę d atžvilgiu paskutiniąją lygybę gauname, kad

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}. \tag{1}$$

Pastebėsime, kad $0 < r < 1$, todėl $d > 0$. Skaičius d vadinamas nagrinėjamo objekto *fraktaline dimensija*. (Vėliau pateiksime ir daugiau fraktalinės dimensijos apibrėžimų). Fraktalinė dimensija nusako ryšį, tarp objektą dengiančių aibių skaičiaus ir šių aibių diametro. Akivaizdu, kad jau nagrinėtų - tiesės, kvadrato, bei kubo fraktalinės dimensijos sutampa su atitinkamomis jų topologinėmis dimensijomis (tiesės arba jos dalies topologinė dimensija lygi 1, plokštumos arba stačiakampio - 2, erdvės arba kubo lygi 3.)

Nesunku suprasti, kad figūros dimensija parodo, kaip keičiasi objekto matas (ilgis, plotas tūris) tiriamo objekto sienos matmenis keičiant kokiu nors pastoviu dydžiu. Kuo didesnė dimensija, tuo labiau pakinta objekto matas, keičiant sienos matmenis. Lygybe (1) pateiktas faktalinės dimensijos apibrėžimas yra vadinamas panašumo matu. Fraktalinės struktūros, kurių dimensiją galima nustatyti minėtu būdu yra vadinamos fraktalais, su panašumo savybe.

Šiame įžanginiame skyrelyje panagrinėsime keletą praktinių uždavinių, kurie stimuliavo fraktalų teorijos vystymąsi. Kocho kreivės pavyzdys įdomus tuo, kad baigtinę plokštumos sritį ribojanti kreivė gali būti begalinio ilgio. Mes tikimės, kad skaitytojas žino geografiją ir įsivaizduoja kaip atrodo Norvegijos arba Didžiosios Britanijos pakrantės. Šių valstybių pakrantės labai raižytos, todėl skaičiuoti jų sienų ilgį tiksliai nėra taip paprasta, o kas labai įdomu, kartais ir neįmanoma. Sakykime Ispanijos ir Portugalijos žinynuose pateikiami skirtingi šių valstybių sienų ilgiai ir tai visai nesusiję su šovinizmu. Tiesiog skaičiavimuose naudojami skirtingi metodai. Grįžkime prie Norvegijos pakrantės. Kaip galime skaičiuoti šios valstybės sieną? Tarkime, kad mūsų žingsnis yra pastovus, ir tegu jo ilgis lygus δ. Be to, mums prireikė $N := N(\delta)$ žingsnių šiai sienai išmatuoti. Tuomet apytikslis šios sienos ilgis yra

$$L(\delta) = N \cdot \delta.$$

Tikimės, kad tikslus sienos ilgis bus gautas, kai žingsnio ilgį neaprėžtai mažinsime. Bet prieš pradėdami šios pakrantės ilgio analizę grįžkime prie (1) formulės. Tarkime, kad kreivės ilgis lygus a. Tuomet

$$N \cdot \delta^d = a.$$

Iš pastarosios mes gauname apytikslę pakrantės ilgį reiškiančią formulę:

$$L(\delta) = N(\delta) \cdot \delta = \frac{a \cdot \delta}{\delta^{-d}} = a \cdot \delta^{1-d}.$$

Norvegijos pakrantės fraktalinė dimensija buvo suskaičiuota ir gauta, kad

$$d \approx 1.59\ldots.$$

Beje, D. Britanijos pakrantės fraktalinė dimensija lygi $d \approx 1.3\ldots.$

Mes norėtume panagrinėti ir kiek kitokio pobūdžio aibių, tarkime Kantoro aibės, fraktalines dimensijas. Bet prieš tai prisiminkime kai kurias svarbias sąvokas.

1.16 Nulinio mato aibės. Aibių denginiai

Šiame skyrelyje sutapatinsime mato, bei ilgio sąvokas, tiesėje. Minėtasis matas, tai Borelio matas, apibrėžtas atvirų (uždarų) intervalų generuotoje $\sigma-$ algebroje. Sakysime, kad aibės F ilgis $L(F) = 0$ jeigu jos Borelio matas $m(F) = 0$.

Sakysime, kad aibė $E \subset [0, 1]$ yra nulinio mato, jeigu visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti tokią intervalų šeimą $\{U_i; i \in \mathcal{N}\}$, kad

$$E \subset \cup_n U_n, \ \sum_n L(U_n) \le \epsilon.$$

Tarkime, kad $E = \{x_n, n \in \mathcal{N}\}$ yra realiųjų skaičių seka. Ši seka yra nulinio mato aibė, nes bet kokiam $\epsilon > 0$ ši aibė

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathcal{N}} U_n,$$

kur

$$U_n = \left[x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right].$$

Nesunku matyti, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Matome, kad apibrėžimo sąlygos tenkinamos, vadinasi, aibė E yra nulinio mato. Nesunku suprasti, kad bet kokia aibė, kuri ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei, yra nulinio mato. Antra vertus aibės matas nenusako jos topologinių savybių, kadangi nulinio mato aibėmis mes galime aproksimuoti ne nulinio mato aibes. Pvz. racionaliųjų bei realiųjų aibių santykis.

Priminsime, kad aibė F vadinama tobula, jeigu ji begalinė, uždara, netuščia ir neturi izoliuotų taškų.

Bet kokiam metrinės erdvės elementui x priskirkime rutulį $B_\epsilon(x)$, su centru taške x bei spinduliu ϵ. Tuomet, bet kokio šios erdvės kūno P tūrį apytiksliai galime pakeisti rutulių, kuriais uždengiame ši kūną, tūrių suma. Perėję prie ribos, kai rutulių spindulys artėja į nulį (o tuo pačiu rutulių skaičius neaprėžtai auga) gauname, kad šio kūno tūris lygus minėtąjai sumai, kai dėmenų skaičius neaprėžtai auga, jeigu ši sumų seka turi ribą. Šį kūno P denginį

$$\Delta_\epsilon(P) = \bigcup_{x \in P} B_\epsilon(x), \tag{4}$$

vadinsime Minkovskio denginiu.

Pavyzdžiui, bet kokio realiųjų skaičių intervalo $[a, b]$ Minkovskio denginį sudaro (4) sajunga, kai $B_\epsilon(x) = [x - \epsilon, x + \epsilon]$. Beje, intervalo $P(\epsilon)$ ilgis ne mažesnis už 2ϵ.

Tarkime, kad $N(\epsilon)$ yra minimalus rutulių, kurių spindulys ϵ reikalingų padengti aibę A, skaičius. Tada skaičius

$$\Delta_d(A) \approx N(\epsilon)\epsilon^d$$

yra aibės A denginys. Laikydami, kad $\Delta_d(A) > 0$, turime, kad egzistuoja $c > 0$ toks, kad

$$N(\epsilon) \approx \frac{c}{\epsilon^d}.$$

Logaritmuodami abi šio sąryšio puses gauname, kad

$$\ln N(\epsilon) = \ln c - d \ln \epsilon,$$

arba

$$d = -\frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon} + \frac{\ln c}{\ln \epsilon.}$$

Pastebėję, kad $\ln \epsilon \to -\infty$, kai gauname

$$\Delta_d(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|}.$$

Aibės A *Minkovskio fraktaline dimensija* vadinsime ribą

$$\Delta(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|},$$

jeigu pastaroji egzistuoja.

Iki šiol kalbėdami apie denginius mes nagrinėjome tik dengimą rutuliais. Ar kas iš esmės keistųsi, jei denginius, kurie konstruojami rutulias, keistume denginiais, kurie sudarome stačiakampių (kvadratų) kurių kraštinės lygiagrečios koordinatinėms ašims, pagrindu. Simboliu $N\diamond$ žymėsime minimalų kūbų skaičių, reikalingą objektui uždengti. Plokštumoje kūbo analogas bus kvadratas. Pastebėsime, kad

$$N(\epsilon) \leq N\diamond(\epsilon) \leq 4N(\epsilon).$$

Pastebėsime, kad Minkovskio fraktalinės dimensijos reikšmė bus ta pati, kadangi

$$\Delta_d(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N\diamond(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log 4 + \log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} = \Delta_d(A).$$

Skaičiuojant dimensiją paprastai reikia mokėti išskirti skaičiaus $N\diamond(\epsilon)$ bendrąjį narį, kas paprastai būna sunku, kadangi ši formulė turi tikti visiems ϵ. O ar negalima šio nykstamo dydžio parinkti kaip nors paprasčiau, specialiu būdu? Pasirodo taip.

Tolydų parametrą $\epsilon \to 0$ pakeisti diskrečia nykstama seka iš tiesų galima.

Lema *Tarkime, kad $\{\epsilon_n\}$ nykstama realių skaičių seka, kuri tenkina savybę:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \epsilon_n}{\log \epsilon_{n+1}} = 1.$$

Tada aibės $E \subset \mathcal{R}$ fraktalinę dimensiją galime skaičiuoti taip:

$$\Delta(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log N(\epsilon_n)}{|\log \epsilon_n|}.$$

$\ominus$

Mums pakanka parodyti, kad bet kokiam $\epsilon > 0$ ir $n \in \mathcal{N}$, $\epsilon_{n+1} < \epsilon < \epsilon_n$.

Bet kokiam fiksuotam $\epsilon > 0$ parinkime sekos numerį n taip, kad būtų teisingos nelygybės:

$$N(\epsilon_n) \leq 2 \cdot N(\epsilon), \; N(\epsilon) \leq 2 \cdot N(\epsilon_{n+1}).$$

Taigi gauname, kad

$$\frac{\log N(\epsilon_n) - \log 2}{|\log \epsilon_{n+1}|} \leq \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \leq \frac{\log N(\epsilon_{n+1}) + \log 2}{|\log \epsilon_n|}$$

ir

$$\frac{\ln \epsilon_n}{\ln \epsilon_{n+1}}(\frac{\ln N(\epsilon_n)}{|\ln \epsilon_n|} - \frac{\ln 2}{|\ln \epsilon_n|}) \leq \frac{\ln N(\epsilon)}{|\ln \epsilon|} \leq$$

$$\frac{\ln \epsilon_{n+1}}{\ln \epsilon_n}(\frac{\ln N(\epsilon_{n+1})}{|\ln \epsilon_{n+1}|} - \frac{\ln 2}{|\ln \epsilon_{n+1}|}),$$

kai $n \to \infty$.

Iš pirmosios nelygybės gauname, kad

$$\limsup_n \frac{\ln N(\epsilon_n)}{|\ln \epsilon_n|} \leq \Delta.$$

Iš antrosios išplaukia

$$\liminf_n \frac{\ln N(\epsilon_n)}{|\ln \epsilon_n|} \geq \Delta.$$

$\oplus$

Remiantis šia lema ir aukščiau padarytomis pastabomis mes galime nesunkiai skaičiuoti kai kurių klasikinių fraktalų dimensijas. Apskaičiuokime Sierpinskio trikampio dimensiją. Tarkime, kad nagrinėjamas trikampis S yra lygiakraštis, o kraštinės ilgis lygus 1. Pasirinkime seką $\epsilon_n = \frac{1}{2^n}$. Tada:

$$N\diamond(\frac{1}{2}) = 3,\ N\diamond(\frac{1}{2^2}) = 9,\ \ldots, N\diamond(\frac{1}{2^k}) = 3^k.$$

Tada

$$\Delta(S) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln N\diamond(\frac{1}{2^k})}{\ln 2^k} = \log_2 3 \approx 1.565.$$

Nagrinėjant analogiškai Kantoro aibę C gauname, kad

$$\Delta(C) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln N\diamond(3^{-k})}{\ln 3^k} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \log_3 2 \approx 0.6309.$$

7 Teorema *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra glodi intervale $[a, b]$. Tada šios funkcijos grafiko Minkovskio dimensija yra lygi 1.*

$\ominus$

Laikysime, kad $[a, b] = [0, 1]$. Padalinkime šį intervalą n taškais į $\Delta x = \frac{1}{n}$ ilgio intervalus. Tada santykis $|\Delta f|/|\Delta x|$ gali būti laikomas funkcijos grafiko apytiksliu denginiu intervale Δx. Remiantis vidurinių reikšmių teorema gauname, kad egzistuoja taškas ψ, $f'(\psi) = \Delta f/\Delta x$. Antra vertus, kadangi funkcija yra tolydi, tai egzistuoja M, $|f'(x)| \leq M$.

Žinodami, kad iš viso grafikui uždengti reikia $n = \frac{1}{\Delta x}$ intervalų gauname denginių skaičiaus įvertį:

$$N(\Delta x) \leq Mn = \frac{M}{\Delta x}.$$

Remdamiesi lygybe

$$-\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{M}{\Delta}}{\ln \Delta x} = 1$$

gauname, kad

$$d = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{M}{\Delta}}{\ln \Delta x} \leq 1.$$

Antra vertus, grafikui padengti reikia ne mažiau, negu $n = \frac{1}{\Delta x}$ rutulių (stačiakampių) kurių spindulys Δx, grafikui padengti. Taigi,

$$d \geq -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{M}{\Delta}}{\ln \Delta x} = 1.$$

$\oplus$

Tarkime, kad nagrinėjama aibė yra tobula. Be to tarkime, kad $\omega_n = \omega_n(F)$ yra uždarų aibių, kurių ilgiai 2^{-n} ir kuriose yra bent vienas aibės F elementas, skaičius. Tuomet šios aibės fraktalinė dimensija lygi

$$\Delta(F) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln \omega_n(F)}{n \ln 2}.$$

Paminėsime kelias savybes, kurias siūlome skaitytojui įrodyti pačiam. Laikysime, kad nagrinėjamų aibių matai baigtiniai.

1. Tarkime, kad $E \subset F$. Tada $\Delta(E) \leq \Delta(F)$.
2. Tarkime, kad $\overline{E}$ yra aibės E uždarinys. Tada $\Delta(E) = \Delta(\overline{E})$.
3. $\forall E,\ 0 \leq \Delta \leq 1$.
4. $\forall E, F \Delta(E \bigcup F) = \max\{\Delta(E), \Delta(F)\}$
5. Tarkime, kad $T(E)$ kokia tai aibės E afininė transformacija. Tada teisinga lygybė

$$\Delta(T(E)) = \Delta(E).$$

Sakysime, kad aibė A turi *panašumo savybę*, jei egzistuoja transformacijos f_i tokios, kad

$$A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \ldots \cup f_n(A).$$

8 Teorema *Tarkime, kad A yra fraktalas, turintis panašumo savybę, be to $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset, i \neq j$. Tarkime, kad d yra lygties*

$$r_1^d + r_2^d + \ldots r_n^d = 1$$

sprendinys, kai r_i yra transformacijų f_i panašumo koeficientai. Tada $\Delta(A) = d$.

$\ominus$

Pasirinkime ϵ_0 taip, kad

$$\{f_i(A) + \epsilon_0\} \cap f_j(A),\ i \neq j$$

nesikirstų. Tegu $N(A, \epsilon)$ yra minimalus rutulių, reikalingų padengti aibei, skaičius. Tegu $\epsilon < \epsilon_0$. Tada

$$N(A, \epsilon) = \sum_{k=1}^{n} N(f_k(A), \epsilon).$$

Kadangi f_i yra panašumo transformacija, kurios panašumo koeficientas yra r_i, tai f_i^{-1} generuoja aibės $f_i(A)$ denginį su $(\frac{1}{r_i})\epsilon$ aplinkomis. Vadinasi

$$N(f_i(A), \epsilon) = N(A, \frac{\epsilon}{r_i}).$$

Taigi,

$$N(A, \epsilon) = \sum_{k=1}^{n} N(f_k(A), \frac{\epsilon}{r_k}).$$

Naudodamiesi tuo, kad $N(\epsilon) \approx \frac{c}{\epsilon^d}$ gauname, kad

$$\frac{c}{\epsilon^d} = c \sum_{k=1}^{n} r_k^d \epsilon^{-d}.$$

Paskutiniąją lygybę padalinę iš $c\epsilon^{-d}$ gauname norimą rezultatą.

$\oplus$

Išvada Jei visi panašumo koeficientai yra vienodi $r = r_i\ i = 1 \ldots, n$ tai

$$nr^d = 1.$$

1.17 Minkovskio dimensijos skaičiavimas

Naudojant kompiuterius, apytiksliams fraktalinės dimensijos suskaičiavimui, paprastai yra naudojama formulė

$$\ln N(\epsilon) = \ln c - d \ln \epsilon.$$

Matome, kad funkcinė priklausomybė tarp $\ln N(\epsilon)$ ir argumento ϵ yra tiesinė, su krypties koeficientu d. Tam, kad rasti nežinomus parametrus d ir c reikia įvertinti denginio elementų $N(\epsilon)$ skaičių, priklausomai nuo ϵ. Taigi, $N(\epsilon)$ yra minimalus denginio elementų skaičius, reikalingas fraktalui uždengti, kai denginio gardelės kraštinės ilgis yra ϵ. Įvertinsime parametrus c ir d reikalingus skaičiui $N(\epsilon)$ įvertinti. Pastebėsime, kad jei naudosime dvi skirtingų dydžių gardeles, su kraštinėmis ϵ_1, ϵ_2, tai šiuos parametrus galima rasti sprendžiant sistemą:

$$\begin{cases} \ln N(\epsilon_1) = \ln c - d \ln \epsilon_1, \\ \ln N(\epsilon_2) = \ln c - d \ln \epsilon_2 \end{cases}.$$

Tam, kad įvertinti šią sistemą kuo tiksliau, reikėtų naudoti daugiau skirtingų ϵ reikšmių uždengiant šią aibę. Bet tuomet gausime tiesinių lygčių sistemą, kurioje bus nežinomųjų žymiai mažiau negu lygčių ir paprastai tokiu atveju sistema būna nesuderinta. Tad šiuo atveju šią tiesinę lygtį tenka rasti naudojant mažiausių kvadratų metodą.

Skaitytojui pateiksime tokį šios problemos sprendimo būdą:

Tarkime, kad reikia rasti plokštumos taškų aibę

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

aproksimuojančią tiesę, mažiausių kvadratų metodu. Taigi, rasime tiesinės funkcijos

$$y = kx + b$$

koeficientus, sudarę pagalbinę dviejų kintamųjų funkciją

$$f(k, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2.$$

Koeficientai bus randami optimaliai, kai ši funkcija įgys optimalią reikšmę t.y., kai dalinės išvestinės bus lygios nuliui,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(k,b)}{\partial k} = 0, \\ \frac{\partial f(k,b)}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Užrašę tai matricine forma gauname, kad tokią matricinę lygtį:

$$\begin{pmatrix} n, & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}.$$

Šios sistemos sprendinys yra ieškoma pora k, b.

Panagrinėkime mažiausių kvadratų metodą kiek kitu aspektu.
Tarkime, kad tiesinė lygčių sistema

$$AX = B$$

yra nesuderinta. Tada tiesinė lygčių sistema

$$A^T AX = A^T B$$

yra vadinama sistemos $AX = B$ *normaliąja sistema.* Normaliosios sistemos sprendiniai yra vadinami sistemos $AX = B$ mažiausių kvadratų sprendiniais.

Gardelių metodas. Šio metodo esmė yra tokia: Tarkime, kad fraktalinis objektas A dvimatis. Suskaidome sritį, kurioje yra nagrinėjamas objektas, į kvadratų, ϵ ilgio, sąjungą. Jei objektas trimatis, tai sritį skaidome kūbų sąjunga, tiesiniu atveju- atkarpų sąjunga. Tada skaičius $N(\epsilon, A)$ gali būti naudojamas fraktalinės dimensijos nustatymui. Tiesa, šis skaičius $N(\epsilon, A)$ nėra pats geriausias (minimalus). Tada

$$d = \frac{\ln N(\epsilon, A)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}.$$

Šis metodas geriausiai tinka *panašumo į save* savybę turintiems faktalams.

Taškinis metodas

Taškinis metodas yra susijęs su aukščiau nagrinėtu gardelių metodu. Tarkime, kad turime $\epsilon - tinkl$ą, kuriuo dengiame nagrinėjamą fraktalą. Tinklą sudarančių kvadratų viršūnes vadinsime *lizdais.* Paprastai laikome, kad šis tinklas, kuriuo dengiamas fraktalas yra labai "smulkus." Ši tinklo schema yra naudojama ir bet kokios geometrinės figūros grafiniam vaizdavimui monitoriuje, kai mazgais laikome pikselius.

Tarkime, kai jau apibrėžtas erdvėje $\epsilon - tinklas$ nagrinėjamą erdvės dalį uždenkime kvadratinių gardelių aibe, kurių kraštinės ilgis l sutaptų su tinklo mazgų skaičiumi kraštinėje. Paprastai parenkamas nelyginis ilgis l. Šiuo atveju centrinis gardelės kraštinės taškas (tuo pačiu $\epsilon - tinklo$ mazgas) bus vienodai nutolęs nuo gardelės viršūnių. Skaičiuodami fraktalo dimensiją, mes realizuojame tokius žingsnius:

1) pasirinkdami paeiliui fraktalo taškus (tuo pačiu $\epsilon tinklo$ taškus), fraktalą padengiame minėtų kvadratų sistema. Tarkime, kad fraktalui priklauso n $\epsilon tinklo$ taškų. Pažymėkime simboliu $r(m, l)$ gardelių, kuriose yra lygiai m taškų, $m \in \{1, \ldots, n\}$ skaičių. Be to tegu

$$P(m, n) = m\frac{r(m, l)}{n}.$$

Aišku, kad

$$\sum_{m=1}^{n} P(m, l) = 1.$$

Kaip ir aukščiau, tegu $N(l)$ yra l ilgio gardelių skaičius, kuris reikalingas fraktalui padengti. Naudodamiesi aukščiau pateiktais apibrėžimais gauname ,kad gradelių, kuriose yra m taškų skaičius yra lygus

$$\frac{n}{m}P(m,l) = r(m,l).$$

Tada gardelių, kurių reikia norint padengti fraktalą skaičiaus įvertis yra toks:

$$N(l) \approx \sum_{i=1}^{k} r(i,l) = n\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}P(i,l),$$

čia k yra gardelių skaičius, reikalingas fraktalui padengti. Tada skaičius

$$\overline{N}(l) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}P(i,l)$$

taip pat yra proporcingas dydžiui l^{-d} ir gali būti naudojamas fraktalinės dimensijos įverčiui.

Pastebėsime, kad šis metodas paprastai yra naudojamas objektas pažinti, tiksliau vienoms objektų rūšims išskirti iš kitų. Pavyzdžiui medžių siluetams iš kalnų masyvų, tamsesnių sričių iš šviesesnių.

Užduotys

1. Tarkime, kad metrinėje erdvėje $X = (0,1]$ apibrėžtos dvi metrikos

$$d_1(x,y) = |x-y|,\ d_2(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|.$$

Įrodykite, kad šios metrikos nėra ekvivalenčios.

2. Įrodykite, kad jei metrinės erdvės yra metriškai ekvivalenčios, tai egzistuoja šių erdvių homeomorfizmas.

3. Įrodykite, kad $\overline{\mathcal{R}}$ yra homeomorfinė intervalui $[-1,1]$.

4. Tarkime, kad S pilnos metrinės erdvės (X,ρ) poaibis. Tada (S,ρ) metrinė erdvė. Įrodykite, kad erdvė (S,ρ) yra pilna, jei aibė $S \subset X$ yra uždara.

5. Tarkime, kad (X,ρ) yra metrinė erdvė, o $f : X \to X$ yra tolydus atvaizdis. Tegu $A \subset X$ yra kompaktiška ir netuščia aibė. Įrodykite, kad aibė $f(A)$ yra kompaktiška ir netuščia .

6. Tarkime, kad S yra kompaktiškos metrinės erdvės poaibis. Įrodykite, kad aibės S siena yra kompaktiška aibė.

7. Raskite ribinės aibės, kuri gaunama iš intervalo (initiatoriaus) $[0,3]$ kiekviename žingsnyje išmetant $1/3^n$ ilgio viduriniuosius intervalus, matą.

8. Tarkime, kad duota trikampių seka plokštumoje. Naudodami stereografines transformacija perkelkite šią seką ant sferos ir pavaizduokite praktiškai. Kalba- java, demonstracija galima apletu.

9. Sudarykite $\mathcal{R}^3$ transformaciją, naudodami matricas, kuri atliktų posūkį apie vektorių $(2, 1, 1)$. Atlikite besusispaudžiančio, o kai susispaus į tašką- besiplečiančio kūbo apie šią tiesę,judesį. Kodas- java kalba, demonstracija- apletas.

10. Sudarykite matricinių transformacijų seką, kuri atliktų posūkį apie tiesę

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{3}.$$

Atlikite trikampio posūkį apie šią tiesę, naudodami šią transformaciją. Kodas- java kalba, demonstracija- apletas.

11. Nustatykite, apie kokią tiesę atlieka posūkį transformacija, sudaryta kvarterniono $\mathcal{K} = (2, (1, 0, -2))$ pagrindu. Atlikite kūbo, kurio viena kraštinė yra šioje tiesėje posūkį apie šią tiesę.

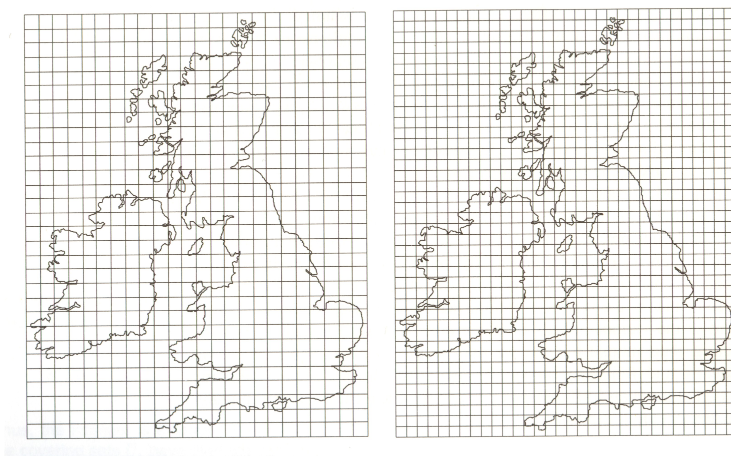
12. Naudodami kvarternionus atlikite stačiakampio, nuspalvinto dviem spalvom per pusę, posūkį apie tiesę

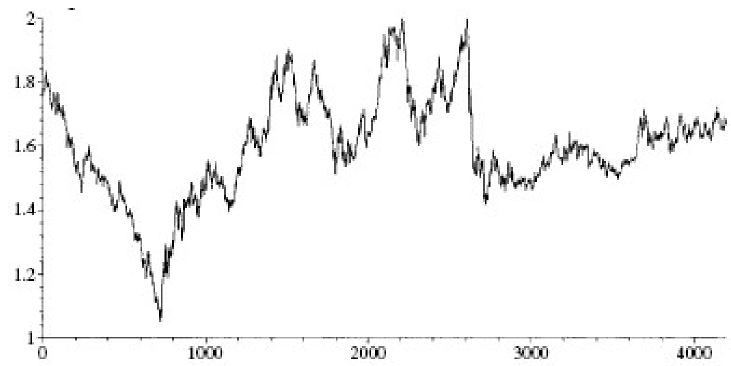
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

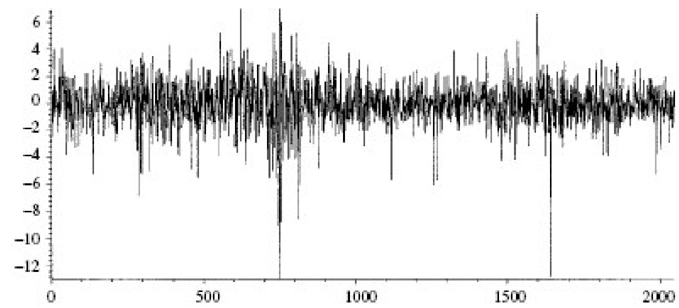
Stačiakiampio centras turi būti tiesėje.

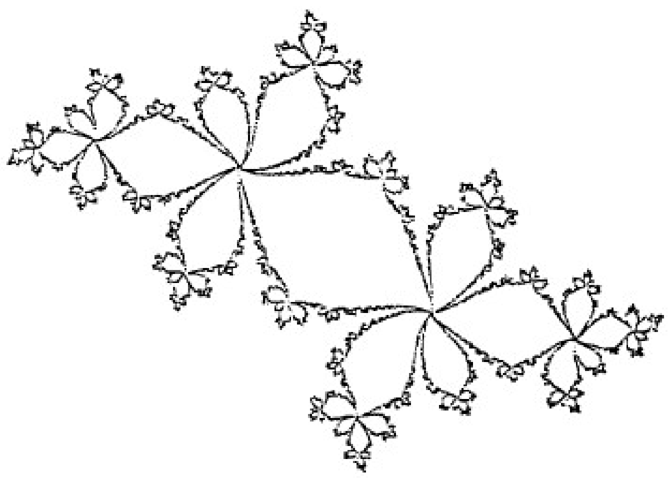
13. Tarkime, kad aibės A fraktalinė dimensija yra d_1, o aibės B fraktalinė dimensija lygi d_2. Kam lygios aibių $A \cap B$ ir $A \cup B$ fraktalinės dimensijos, jei $d_1 > d_2$?

14. Apytiksliai apskaičiuokite pateiktų aibių fraktalines dimensijas:









15. Tarkime, kad (x_i, y_i) yra plokštumos taškų aibė. Naudodami mažiausių kvadratų metodą, raskite tiesę $y = ax + b$, kuri aproksimuotų šiuos taškus:

$$(0,0);\ (2,-1);\ (4,5);\ (6,8);\ (2,0).$$

16. Tarkime, kad (x_i, y_i) yra plokštumos taškų aibė. Naudodami mažiausių kvadratų metodą, raskite parabolę $y = ax^2 + by + c$, kuri aproksimuotų šiuos taškus:

$$(0,0);\ (2,-1);\ (4,5);\ (6,8);\ (2,0).$$

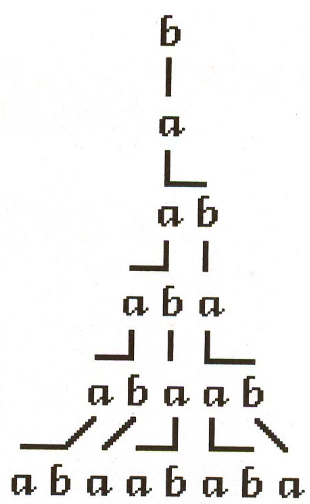
II. L- SISTEMOS

Šiame skyriuje nagrinėsime specialias "atsinaujinančias"(rewriting) sistemas, šių sistemų formalizavimo bei dinamikos vizualizavimo problematiką.

2.1 Įvadinės pastabos. Aksiomatika

Lindenmayer sistemos arba trumpai L-sistemos susiformavo kuriant augalų augimo matematinius modelius. $L-$ sistemų esmė yra reprodukcija (rewriting). Šio proceso metu duotame formaliame sąraše tuo pat metu yra keičiami simboliai remiantis taisyklėmis, kurias vadinsime *reprodukcijos taisyklėmis.*

Tarkime, kad duota abėcėlė, kurioje tik dvi raidės a, b. Kiekviena raidė atsinaujina tokiu būdu: $a \rightarrow ab$ ir $b \rightarrow a$, t.y. nurodome kokiu būdu reprodukcijos proceso metu žodyje bus keičiamos raidės a ir b. Reprodukcijos procesas prasideda nuo tam tikro specialaus žodžio (sąrašo), kuris bus vadinamas aksioma. Tarkime, kad nagrinėjamu atveju aksiomą sudaro simbolis b. Pirmame reprodukcijos žingsnyje aksioma b yra keičiama į a, t.y. $b \rightarrow a$. Antrame žingsnyje $a \rightarrow ab$. Trečiame žingsnyje, taikydami reprodukcijos taisyklę kiekvienam simboliui gauname tokį žodį: aba, ir taip toliau. 1 pav. pateikiame grafinę šios sistemos interpretaciją.



1 pav.

Panagrinėkime $L-$ sistemos taikymo pavyzdį biologijoje. 1972 metais, atlikdami eksperimentus su *anabaena catenula* ląstelėmis biologai pastebėjo, kad kas keturiolika valandų ląstelė skyla į dvi dalis ne simetriškai, o priklausomai nuo to, kaip ji buvo susiformavusi prieš šį skilimo laikotarpį.

Formalizuokime šios ląstelės dalijimosi procesą. Tarkime, kad dalijimosi metu ląstelė skyla į dvi skirtingas dalis, kurias sąlyginai pavadinkime kairiąja **k** ir dešiniąja **d** ląstelės dalimis. Aprašykime ląstelės skilimo taisyklę: jei pasirinkta lastelė yra **k** buvusios lastelės dalis, tai sekančiame skilimo procese šios lastelės **k** dalis bus mažesnė negu **d** dalis ir analogiškai, jei lastelė yra **d** dalis, tai sekančiame skilimo žingsnyje, šios lastelės naujoji **d** dalis bus mažesnė negu **k** dalis. Beje, skyla tik didesnė ląstelės dalis. Skylimo metu mažesnioji ląstelės dalis "ūgteli" iki didesnės, kuri sekančiame žingsnyje skyla.

Formalizuokime šį skilimo procesą keisdami biologinę terminologiją formalia simbolių kalba.

Tegu **kk**, žymi mažesnę (kairiąją) lastelės dalį, kuri gimė iš prieš tai buvosios kairiosios dalies ir analogiškai, simboliu **dd**, žymėsime mažesnę dešiniąją ląstelės dalį, kuri gimė iš dešiniosios ląstelės. Simboliais **dk** ir **kd** žymėsime kairiosios ir dešiniosios ląstelių skilimo didesniąsias dalis. Sekantį skilimo proceso žingsnį galime aprašyti tokiu būdu:

$$\mathbf{kk} \to \mathbf{kkk}, \quad \mathbf{kd} \to \mathbf{kkd}, \mathbf{dkd}, \quad \mathbf{dk} \to \mathbf{kdk}, \mathbf{ddk}, \quad \mathbf{dd} \to \mathbf{ddd}.$$

Pastaruosius sąryšius pavadinkime reprodukcijos taisyklėmis. Atkeipsime dėmesį į kelis svarbius dalykus. Ląstelė dalijasi tik tada, kai subręsta dalijimuisi, t.y. užauga iki tam tikro dydžio žr. 2 pav.

Nesunku suprasti, kad jei skaitysime iš dešinės į kairę, tai galėsime nesunkiai nustatyti, bet kurios ląstelės pirmtakus. Beje, šio skilimo proceso neįtakoje tolimesnė praeitis, rezultatas priklauso tik nuo paskutiniųjų dviejų būsenų. Pavyzdžiui, jei paskutinioji didesnioji ląstelė turi kodą $\mathbf{k}\ldots*$, tai žinoma, kad sekančiame iteraciniame žingsnyje, kai ląstelė skils, kairioji šios ląstelės dalis $\mathbf{kk}\ldots*$ bus mažesnė, o dalis $\mathbf{dk}\ldots*-$ didesnė. Beje, jei du simboliai, skaitant iš kairės, yra vienodi, tai susidariusi ląstelės dalis bus mažesnė negu dalis koduota dviem skirtingomis raidėmis.

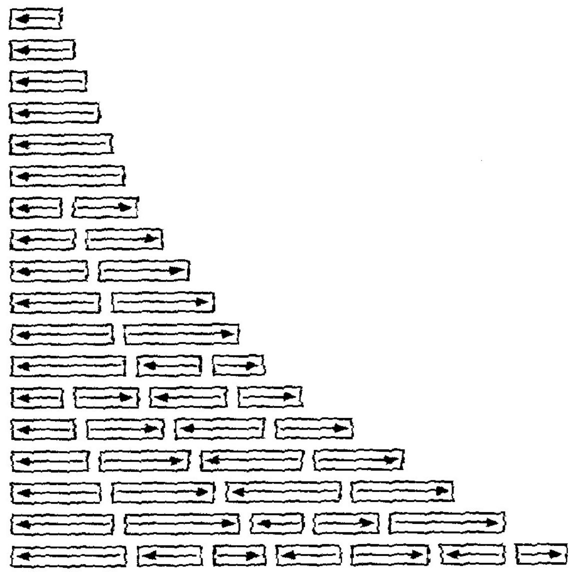
Remdamiesi šiomis taisyklėmis nesunkiai galime generuoti reprodukcijos seką. Pavyzdžiui, tarkime, kad pradedame nuo sekos **kk**. Tada naudodamiesi reprodukcijos taisyklėmis gauname, kad po dviejų skilimų, susidarys tokia grandinė:

$$\mathbf{kkk}, \mathbf{dkk},$$

čia kableliu atskiriame pradinės ląstelės kairiąją ir dešiniąją ląstelės dalis. Sekančiame žingsnyje šios dvi ląstelės skils į

$$\mathbf{kkkk}, \mathbf{dkkk}; \mathbf{kdkk}, \mathbf{ddkk},$$

čia kabletaškiu skiriame skirtingų ląstelių suskilusias dalis. Atkreipsime dėmesį, kad ląstelė skyla, kai ji užauga iki tam tikros būsenos. 2 pav. pateikiame šios ląstelės dauginimosi proceso grafinę iliustraciją.



2 pav.

Formalizuokime šią problemą. Tegu

$$V = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

yra kokia nors simbolių aibė, kurią vadinsime abėcėle.

Sudarykime šios aibės visų galimų netuščių žodžių aibę:

$$V^* = \{a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_k},\ \ a_{j_i} \in V,\ \ j_i \in \{1, \ldots, n\},\ k \in \mathcal{N}\}.$$

0L sistema *vadinsime sutvarkytą trejetą* $G =< V, \omega, P >$, *čia* V *yra sistemos abėcėlė,* $\omega \in V^*$ *žodis, kuris bus vadinamas aksioma ir*

$$P : V \to V^*$$

yra baigtinių reikšmių atvaizdis (reprodukcijos taisyklė arba tiesiog reprodukcija). Šis atvaizdis elementui priskirianti žodį. Paprastai simbolis $a \in V$ *yra vadinamas pirmtaku, o* $P(a)-$ *įpėdiniu. Jei koks nors simbolis* $(a \in V)$ *nepriklauso atvaizdžio* P *apibrėžimo sričiai, tai šį simbolį priskirsime funkcijos apibrėžimo sričiai apibrėždami:* $P(a) = a$.

Sakysime $0L-$ sistema yra *deterministinė* ($D0L$), jei $D(P) = V$ ir atvaizdis P yra funkcija. T.y. kiekvienam $a \in V$ egzistuoja vienintelis $\chi \in V^*$ toks, kad $P(a) = \chi$.

Sakysime, kad 0L yra *cf* sistema (context-free), jei kiekvienas iteracinis žingnis nepriklauso nuo aplinkos. Priešingu atveju 0L vadinamos jautriomis (sensitive) sistemomis.

Sakysime, kad žodis ν kildinamas iš n ilgio sekos G , jei egzistuoja evoliucionuojanti žodžių seka $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ tokia, kad $\mu_0 = \omega, \mu_n = \nu$ ir $\mu_0 \to \mu_1 \to \ldots \mu_n$.

Tarkime, kad $\mu = a_1 \dots a_m \in V^*$. Tada sakysime, kad žodis $\nu = b_1 \dots b_m$ yra generuotas žodžio μ (žymėsime $\mu \to \nu$) tik tada, kai $P(a_i) \to b_i,\ i = 1, 2, \dots m$.

Sakysime, kad nepriklausanti nuo aplinkos D0L yra parametrinė, jei reprodukcijos taisyklės veikimas sąlygotas parametro, t.y. reprodukcijos taisyklė (priklausanti nuo parametro) yra apibrėžiama tokiu būdu:

$$\textit{pirmtakas: sąlyga} \to \textit{palikuonis}$$

Tarkime, kad duota D0L grafine forma:

$$\begin{array}{ccccc}
\overrightarrow{S}\longrightarrow\overrightarrow{L} & \overrightarrow{L}\longrightarrow\overrightarrow{A} & \overrightarrow{A}\longrightarrow\overrightarrow{B} & \overrightarrow{B}\longrightarrow\overrightarrow{C} & \overrightarrow{C}\longrightarrow\overleftarrow{L}\overrightarrow{S} \\
\overleftarrow{S}\longrightarrow\overleftarrow{L} & \overleftarrow{L}\longrightarrow\overleftarrow{A} & \overleftarrow{A}\longrightarrow\overleftarrow{B} & \overleftarrow{B}\longrightarrow\overleftarrow{C} & \overleftarrow{C}\longrightarrow\overleftarrow{S}\overrightarrow{L}
\end{array}$$

Simboliai $\overrightarrow{L},\ \ \overrightarrow{A}, \dots$ žymi būsenos augimą, kintant laikui.

Tada formalizavę šią L sistemą turėsime:

$\overrightarrow{M}(s):\ s < 5 \to \overrightarrow{M}(s+1);$

$\overrightarrow{M}(s):\ s = 5 \to \overleftarrow{M}(2)\overrightarrow{M}(1);$

$\overleftarrow{M}(s):\ s > 0 \to \overleftarrow{M}(s+1);$

$\overleftarrow{M}(s):\ s = 5 \to \overleftarrow{M}(1)\overrightarrow{M}(2);$

Formalizuokime nagrinėtą ląstelės dalijimosi procesą tradiciniu būdu, kuris plačiai naudojamas literatūroje. Pažymėkime ląstelės dalijimosi abėcėlę tokiu būdu:

$$V = \{\overleftarrow{L}, \overleftarrow{S}, \overrightarrow{L}, \overrightarrow{S}\},$$

čia $\overleftarrow{S}$ žymi kairiąją mažesnę ląstelės dalį, $\overleftarrow{L}$ žymi kairiąją didesnę ir analogiškai $\overrightarrow{S}$ žymi dešiniąją mažesnę ląstelės dalį, $\overrightarrow{L}$ žymi dešiniąją didesnę ląstelės dalį.

3 pav. pateikiama grafinė šio proceso iliustracija.

$L-$ sistema: Anabaena

Aksioma: $\mu_0 = \overrightarrow{L}$;

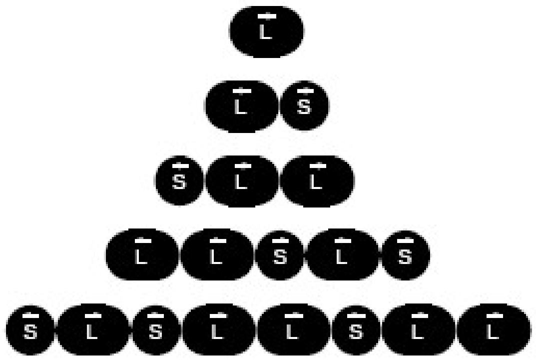
Reprodukuojanti funkcija:

$P_1 : \overrightarrow{L} \to \overleftarrow{L}\,\overrightarrow{S}$:

$P_2 : \overleftarrow{L} \to \overleftarrow{S}\,\overrightarrow{L}$;

$P_3 : \overrightarrow{S} \to \overrightarrow{L}$;

$P_4 : \overleftarrow{S} \to \overleftarrow{L}$.



3 pav.

Beje, ši sistema taip pat yra parametrinė (priklauso nuo laiko):
Aksioma $M(5, d)$;
$M(t, p) : t < 5 \rightarrow M(t + 1, p)$;
$M(t, p) : t = 5 \wedge p = k \rightarrow M(1, k)M(2, d)$;
$M(t, p) : t = 5 \wedge p = d \rightarrow M(2, k)M(1, d)$.

2.2 $L-$ sistemų grafinis vaizdavimas

Šiame skyrelyje nagrinėsime, kokiu būdu būtų galima grafiškai vaizduoti $L-$ sistemose "gimstančius" objektus. Šiam tikslui pasiekti pasitelksime metodą, kuris vadinamas "turtle graphics", metodu, kurį ateityje trumpai vadinsime TG metodu. Tam, kad būtų galima valdyti struktūros braižymo žingsnius, būtina apibrėžti valdymo simbolius.

TG esmė, 2D atveju, nusakoma tokių simbolių trejetu- (x, y, δ), čia (x, y) yra Dekarto koordinatės nurodančios pradinio taško padėtį, o $\delta-$ nurodo judėjimo kryptį. Kampas paprastai nurodomas ašies Ox atžvilgiu.

F yra komandos "brėžti ilgio l atkarpą nuo nurodyto taško" simbolis; jei atskirai nepaminėta, tai laikysime, kad pradiniame taške judėjimo kryptis lygiagreti Ox ašiai. Jei judėjimo kryptis nusakyta vektoriumi, kuris su Ox ašimi sudaro kampą α, o pradinės taško koordinatės yra (x, y), tai naujosios taško koordinatės yra

$$x' = x + l \cos \alpha, \;\; y' = y + l \sin \alpha.$$

f- komandos "persikelti plokštumoje nuo fiksuoto taško atkarpa, kurios ilgis l, nebrėžiant atkarpos " simbolis; ši komanda apibrėžiama analogiškai aukščiau apibrėžtai, tik kaip ir buvo minėta, atkarpa nėra brėžiama.

$+$ pasisukti kampu δ, teigiama kryptimi. Taigi, jei pradžioje judėjimo kryptis iš nurodyto taško buvo (x, y, α), tai naujoji kryptis- $(x, y, \alpha + \delta)$.

- pasisukti kampu δ, neigiama kryptimi. Šiuo atveju, jei pradinė judėjimo kryptis iš nurodyto taško buvo (x, y, α), tai naujoji kryptis- $(x, y, \alpha - \delta)$.

Naudodami šiuos simbolius mes galime koduoti sistemos evoliuciją.

Trumpai:

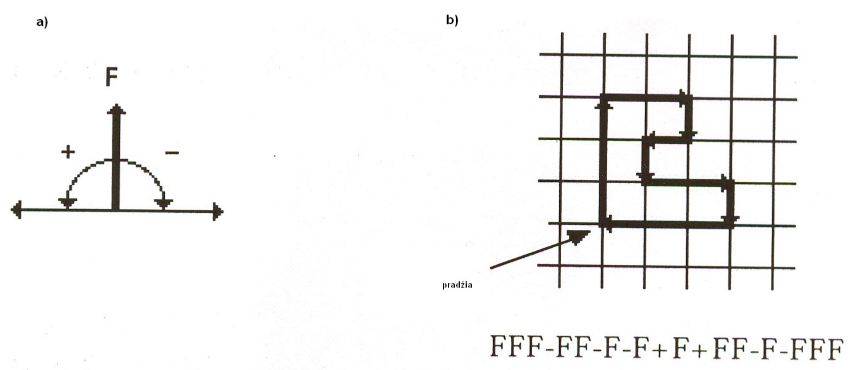
komanda	(x, y, δ) keitimas
F	$(x + l\cos\delta, y + l\sin\delta, \delta)$
f	$(x + l\cos\delta, y + l\sin\delta, \delta)$
+	$(x, y, \delta - \alpha)$
-	$(x, y, \delta + \alpha)$

Naudodami aukščiau pateiktus simbolius mes apibrėšime reprodukcijos funkcijas. Šias reprodukcijos formules paprastai vadinsime *TG kodu.* 4 pav. a) parodyta, kaip bus suprantamos teigiamo ir neigiamo kampų posūkio kryptys.

Jeigu duota seka ν, kurios pradinė padėtis $(1, 1, 0)$ ir $\delta = 90^0$, tai užrašę judėjimo kodą, pavyzdžiui

$$+FFF - FF - F - F + F + FF - F - FFF,$$

sekos ν TG interpretaciją pateikiame 4 pav. b).



4 pav.

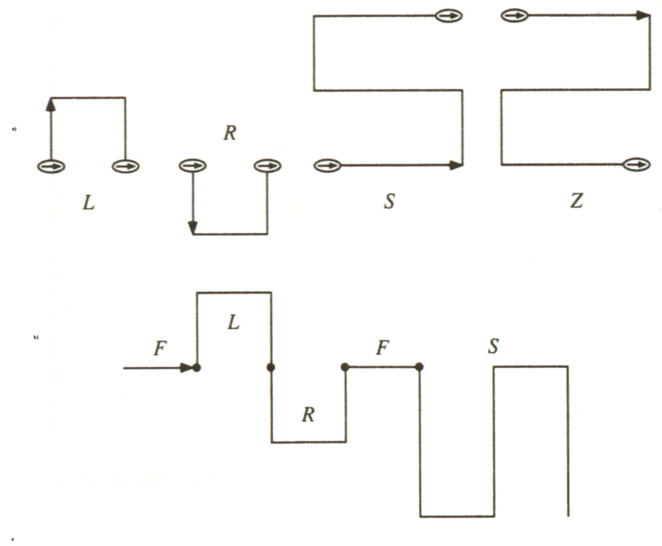
Be šių bazinių simbolių yra naudojami ir išvestiniai simboliai, kurie yra pagrindinių simbolių kompozicijos. Pateiksime keletą svarbiausių simbolių kompozicijų, kai posūkio kampas $\delta = 90^0$;

komanda	TG kodas
L	$+F-F-F+$
S	$FF+F+FF-F-FF$
R	$-F+F+F-$
Z	$FF-F-FF+F+FF$

5 pav. a) pateikiami šių kompozicijų TG (grafinė realizacija);
Pateiktame 5 pav. b) demonstruojama kodo

$$FLRF-S$$

TG realizacija, kai $\delta = 90^0$.



5 pav.

Panagrinėkime L-sistemą, kurios reprodukcijos taisyklė apibrėžta tokiu būdu:

$$F \to F+F--F+F,$$

be to kiekviename sekančiame žingsnyje ženklai yra išlaikomi kokie ir buvo, t.y.

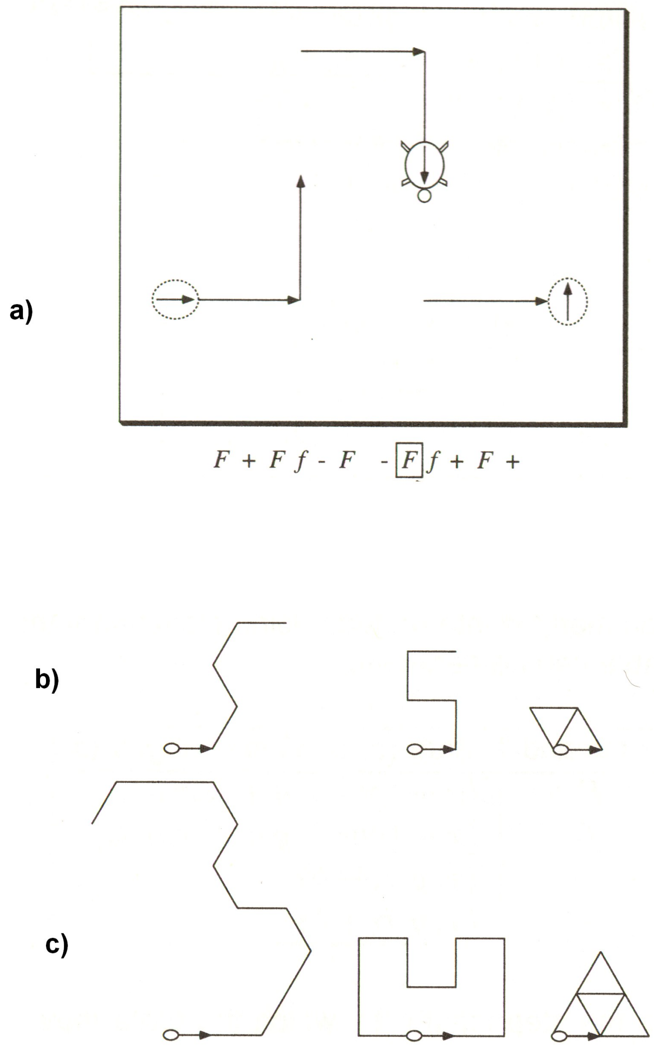
$$+ \to +, \quad - \to -$$

o brėžiamos atkarpos ilgis sutrumpėja tris kartus $l \to l/3$.

Pateikiame šios $L-$ sistemos, antrojo iteracinio žingsnio seką (žr 6 pav.):

$$F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F.$$

6 pav. b) dalyje yra pateikta TG kodo: $F+F+F-F-F$, o c) dalyje kodo $FF+FF+F+F-F-F+F+FF+F$, TG realizacija, kai kampai eilės tvarka yra tokie: 60^0, 90^0, 120^0.



6 pav.

2.3 Erdvę užpildančios kreivės ir D0L-sistemų sintezė

Praktiniuose taikymuose plačiai yra taikomos erdvę užpildančios kreivės. Kiek plačiau panagrinėkime šių kreivių konstravimo algoritmus naudojant L-sistemas.

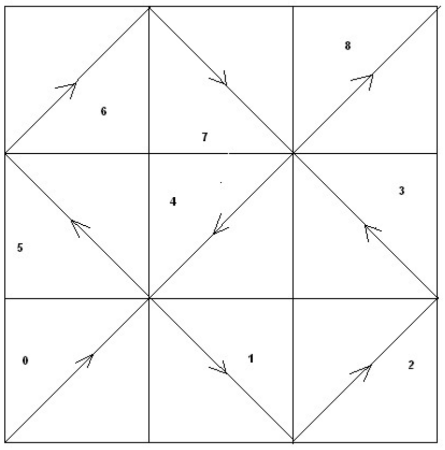
Visų pirma panagrinėkime klasikinę Peano kreivę.

Tarkime, kad $I = [0, 1]$, $S = [0, 1] \times [0, 1]$.

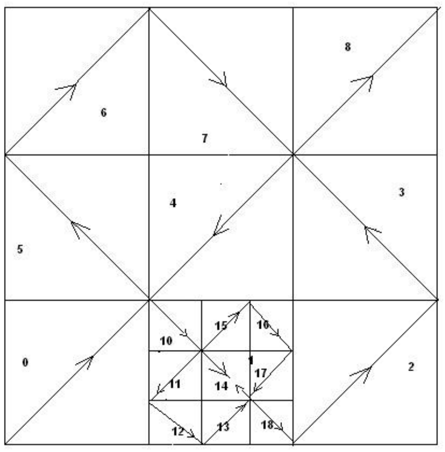
Suskaidykime kvadratą į 9 kvadratus, kaip parodyta 7 pav. Kvadratai sunumeruoti eilės tvarka, apėjimo kryptimi. Tame pat 7 pav. yra pateikta pirmoji TG iteracija. Sekančiose iteracijose atliekame tą patį apėjimo algoritmą, kai į kiekvieną kvadratą įėjimas nurodomas paskutiniame žingsnyje, t.y. suskaidę, tarkime antrąjį kvadratą (1) į devynis kvadratus gauname mažesnius devynis kvadratus, kuriuos koduojame

$$10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$$

žr. 8 pav. apačioje. Pastebėsime, kad "įėjus" į kvadratą išlaikoma pradinė apėjimo kryptis.



7 pav.



8 pav.

Taigi, Peano kreivė $P(x) = (u, v)$, atvaizduoja intervalo I taškus į kvadrato S taškus tokiu būdu: taškui $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$, užrašytam devynetainėje skaičiavimo sistemoje yra priskiriamas kvadrato taškas tokiu būdu: po pirmosios iteracijos taškui x yra priskiriamas kvadrato taškas $P_1(x)$, kurio numeris x_1; po antrosios iteracijos taškui x yra priskiriamas kvadrato, su numeriu x_1x_2, taškas $P_2(x)$ ir t.t.

Apibendrinkime šiuos empirinius pastebėjimus:

1 Teorema Peano atvaizdis yra tolydus atvaizdis, kuri intervalą I atvaizduoja į kvadratą. Dar daugiau, seka $\{P_n(x)\}$ konverguoja, visiems $x \in I$.

$\ominus$ Tarkime, kad $0 < n < m$. Sudarykime pradinio kvadrato S tinklą S_n tokiu būdu

$$\{(\frac{k}{3^n}, \frac{l}{3^n}),\ k, l \in [0, 3^n]\}.$$

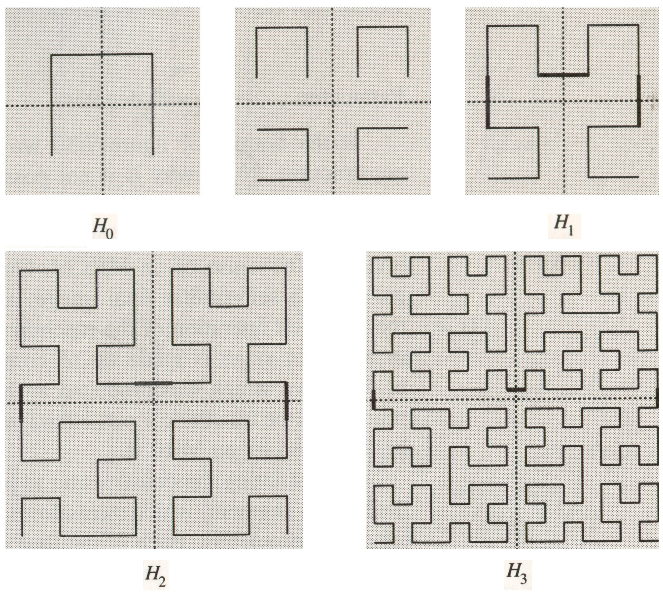
Tarkime, kad $N = 3^{2n}$ ir taškai $0 < x_1 < \ldots x_N = 1$ yra intervalo I skaidinys, kuri intervalą I suskaido į 3^{2n} vienodo ilgio intervalus. Pastebėsime, kad sekos $P_n(x)$ taškai yra tinklo G_n vieno iš kvadratų įstrižainės taškai ir kinta nuo x_j iki x_{j+1}. Kita vertus, $P_m(x)$ yra tame pačiame kvadrate, jeigu $m > n$. Vadinasi,

$$\rho(P_m(x), P_n(x)) < \frac{\sqrt{2}}{3^n}.$$

Kadangi tai galima taikyti visiems $j \in [0, N]$, tai šis sąryšis teisingas visiems $x \in I$. Parinkę M tokį, kad $\sqrt{2}/3^M < \epsilon$, jei $m > n > M$. Kadangi seka konverguoja tolygiai visiems $x \in I$, tai nagrinėjamoji ribinė funkcija yra tolydi.

$\oplus$

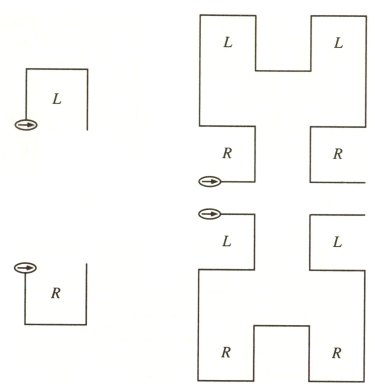
Panagrinėkime Hilberto kreivę.



9 pav.

9 pav. yra parodytas kvadratas, kurį uždengsime kreive, kurios initiatorius H_0 yra išsidėstęs keturiose kvadrato dalyse ir kreivę sudarančios trys laužtės jungiasi šių kvadratų centruose. Tarkime, kad šių atkarpų ilgiai yra lygūs 1. Kiekviename sekančiame žingsnyje mes reprodukuosime visuose mažesniame kvadratuose analogiškas kreives, sutrumpintas per pusę ir be to apatiniuose kvadratuose vieną kopiją suksime 90^0 kampu teigiama kryptimi, o kitą- neigiama tuo pačiu kampu ir pabaigos taškus sujungsime atkarpomis į vientisą uždarą kreivę H_1. Sekančiame žingsnyje mes mažiname mastelį per pusę ir gautas sumažintas H_1 kopija talpiname į keturis kvadratus analogiškai sudėliodami ir sukdami kaip ir buvo elgiamasi konstruojant H_1. Gauname kreivę H_2, kuri jungia kreivės H_0, 16 sumažintų kopijų (9 pav.).

Naudodami $L-$ sistemoje apibrėžtus simbolius L ir R sudarykime Hilberto kreivės $L-$ sistemą (žr. 10 pav.). Visų pirma naudodami TG koduojame pradinę kreivę H_0. Turime, kad šios kreivės TG kodas yra $+F-F-F+$, o pirmojo žingsnio kreivės H_1 TG kodas yra $+RF-LFL-FR+$. Pastebėsime, kad generuojant antrą žingsnį, t.y. kreivę H_2 mums tenka perrašyti taisyklę R, kuri yra veidrodinis L atspindys. L brėžiama neigiama kryptimi, $R-$ teigiama kryptimi.



Pav. 10

$L-$ sistema: Hilberto kreivė;
Aksioma: L
Reprodukcijos taisyklės:

$$L \to +RF - LFL - FR+, \quad R \to -LF + RFR + FL-, \quad F \to F,$$

$$+ \to +, \quad - \to -, \quad \delta = 90^0 \quad l \to \frac{l}{2}.$$

Pateiksime dviejų iteracijų TG kodą.
Pirmas žingsnis:

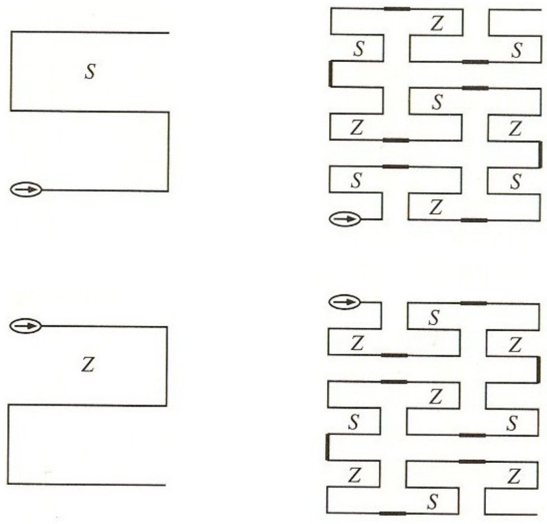
$$+RF - LFL - FR+;$$

Antras žingsnis:

$$+ - LF + RFR + FL - F - +RF - LFL - FR + F+;,$$

$$RF - LFL - FR + -F - LF + RFR + FL - +.$$

Šį skyrelį pabaigsime pateikdami Peano S- kreivę generuojančią $L-$ sistemą. 11 pav. yra pateiktos dvi kreivės S ir Z, kurias komponuodami gausime kreivę S.



11 pav.

Konstruosime Peano kreivę jungdami šias abi kreives. Kampas, kuriuo atliksime posūkius yra $\delta = 90^0$. Pirmame žingsnyje, TG kodas yra S. Antrame žingsnyje kreivės kodas yra toks:

$$SFZFS + F + ZFSFZ - F - SFZFS.$$

11 pav. yra pateikiami trys TG kodo iteraciniai žingsniai.

Šią kreivę generuojanti $L-$ sistema apibrėžta tokiu būdu:

Peano S kreivė;

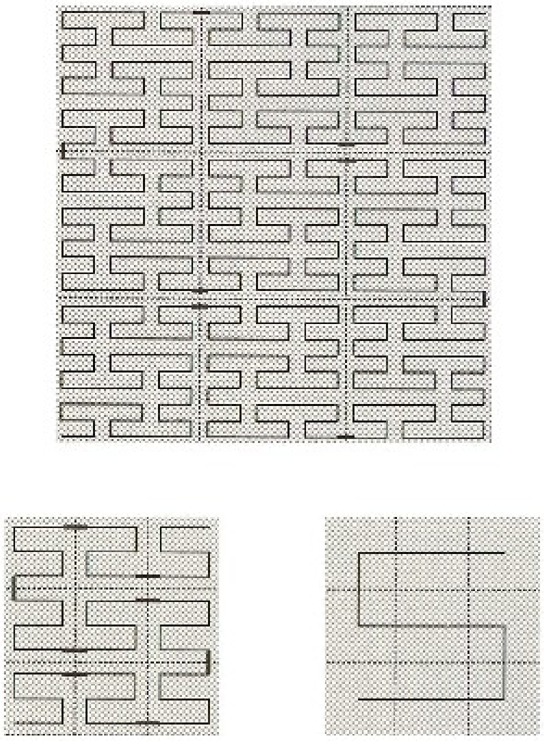
Aksioma: S

Reprodukcijos taisyklės:

$$S \to SFZFS + F + ZFSFZ - F - SFZFS$$

$$Z \to ZFSFZ - F - SFZFS + F + ZFZSFZ$$

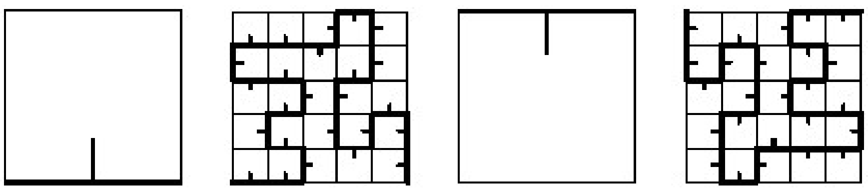
$$F \to F, \quad + \to +, \ - \to -, \ \delta = 90^0, \ l = \frac{l}{3}.$$



12 pav.

Modeliuojant erdves užpildančias kreives yra naudojamas ir kiti metodai. Nagrinėsime kraštines reprodukuojančias funkcijas. Visų pirma aptarkime kraštines reprodukuojantį metodą. Simboliais F_l ir F_r žymėsime kraštines brėžiančias funkcijas, kitaip tariant komandas, kurias realizuojant yra brėžiama kraštinė. Skirtumas tik tas, kad brėžiant atkarpą F_l laikoma kad ribojama sritis yra iš kairės, o antru atveju iš dešinės. Žemiau pateiktame 13 pav. atkarpos ribojama sritis pažymėta trumpu brūkšneliu. Beje, taip konstruojama kreivių seka turi savybę: ji aproksimuoja kreivę, kuriai priklauso visi kvadrato taškai, o kreivė savęs nekerta. Beje, konstruodami šią kreivių seką mes sritį skaidome į vienodas dalis ir laužtė aplanko visas šias dalis (kvadratus) iš kairės arba dešinės po vieną kartą.

13 pav. yra pateiktas F_l ir F_r keitimo kodas.



$$
\begin{aligned}
F_l \longrightarrow\ & F_lF_l+F_r+F_r-F_l-F_l+F_r+F_rF_l-F_r-F_lF_lF_r+\\
& F_l-F_r-F_lF_l-F_r+F_lF_r+F_r+F_l-F_l-F_rF_r+\\
F_r \longrightarrow\ & -F_lF_l+F_r+F_r-F_l-F_lF_r-F_l+F_rF_r+F_l+F_r-\\
& F_lF_rF_r+F_l+F_rF_l-F_l-F_r+F_r+F_l-F_l-F_rF_r
\end{aligned}
$$

13 Pav.

Tokiu būdu konstruojamos erdvę užpildančios kreivės yra vadinamos $FASS$ (space-filling, simple and self-similar) kreivėmis. Nesunku suprasti, kad tokia $FASS$ kreivių konstrukcija tuo pačiu apibrėžia ir erdvės denginį vienodais stačiakampiais. Kalbant tiksliau, Hilberto kreivės kraštinės F_l apytiksliai "užpildo" kairiąjį kvadratą, tuo tarpu kreivės dalys F_r "užpildo" dešiniuosius kvadratus. Aišku, kad tokiu būdu konstruodami plokštumos dalį dengiančias kreives mes gausime, kad kreivė bus paprasta, t.y. du kartus neis per tą patį plokštumos tašką.

2.4 L-sistemos trimatėje erdvėje

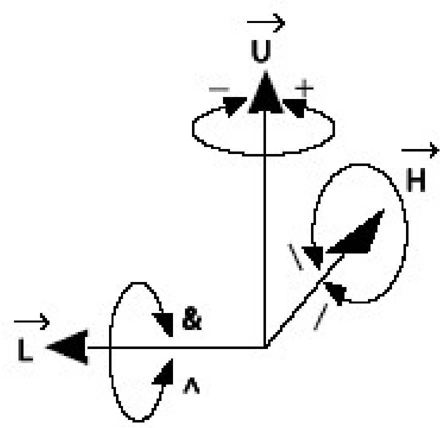
L- sistemos gali būti vizualizuotos naudojant TG ir trimatėje erdvėje. Šios interpretacijos esmė- mokėti aprašyti judesius trimatėje erdvėje. Judesius trimatėje erdvėje aprašysime trimis vektoriais $\overrightarrow{H}-$ tieseeigis vektorius (head vector), $\overrightarrow{L}-$ posūkio į kairę vektoriaus kryptis, $\overrightarrow{U}-$ aukštyn krypties vektorius. Laikome, kad šie vektoriai vienetiniai, vienas kitam statmeni. Vadinasi daugindami vektoriškai turime:

$$\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{L} = \overrightarrow{U}, \quad \overrightarrow{L} \times \overrightarrow{H} = -\overrightarrow{U}.$$

Posūkiai trimatėje erdvėje apie koordinatines ašis (šiuo atveju trijų vektorių sistemą galime laikyti koordinatiniu reperiu) yra atliekami transformacijomis, kurių matricos yra tokios:

$$R_H(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_L(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



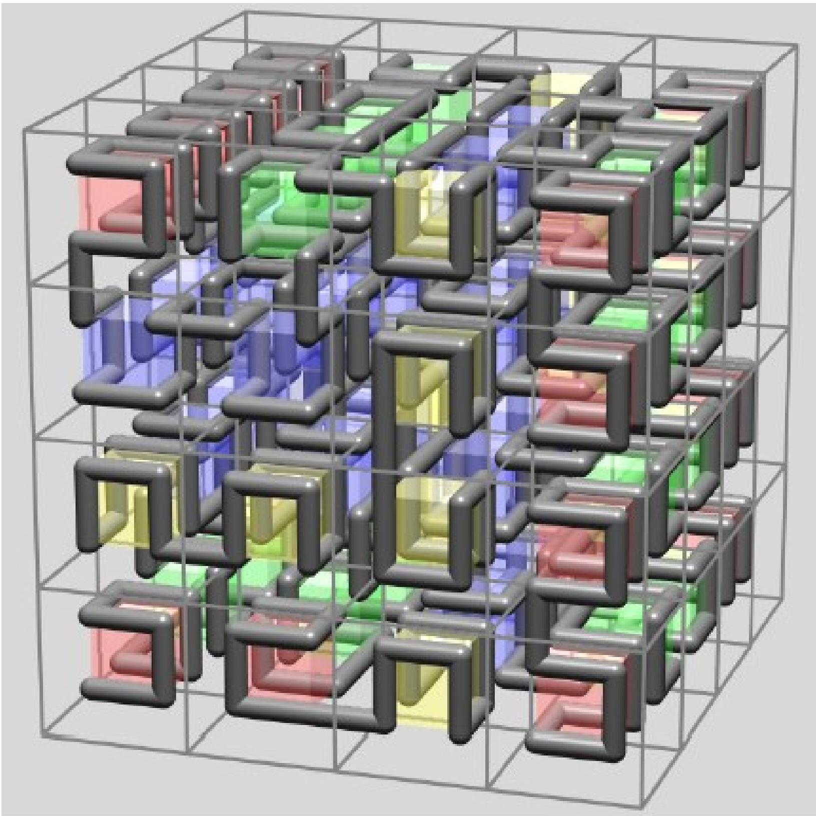
14 pav.

Trimatėje erdvėje yra naudojami tokie TG simboliai:

$\delta-$ posūkio kampas;
$+$ atlikti posūkį kampu θ apie vektorių $\overrightarrow{U}$;
$-$ atlikti posūkį kampu $-\theta$ apie vektorių $\overrightarrow{U}$;
& atlikti posūkį kampu θ apie vektorių $\overrightarrow{L}$;
$\wedge$ atlikti posūkį kampu $-\theta$ apie vektorių $\overrightarrow{L}$;
$\backslash$ atlikti posūkį kampu θ apie vektorių $\overrightarrow{H}$;
$/$ atlikti posūkį kampu $-\theta$ apie vektorių $\overrightarrow{H}$;
$|$ atlikti posūkį kampu 180^0 apie vektorių $\overrightarrow{U}$.

14 pav. yra pateikiama TG kontrolės grafinė interpretacija 3D atveju.

15 pav. yra pateikta Hilberto kreivės 3D TG realizacija. Spalvos atstovauja trimates gardeles, kurios susietos su simboliais $A-$ raudona spalva, $B-$ mėlyna spalva, $C-$ žalia spalva ir $D-$ geltona spalva.



```
n=2, δ=90°
A
A → B-F+CFC+F-D&F∧D-F+&&CFC+F+B//
B → A&F∧CFB∧F∧D∧∧-F-D∧|F∧B|FC∧F∧A//
C → |D∧|F∧B-F+C∧F∧A&&FA&F∧C+F+B∧F∧D//
D → |CFB-F+B|FA&F∧A&&FB-F+B|FC//
```

15 pav.

2.5 L-medžiai.

Mes nagrinėjome $L-$ sistemas, kurios generavo nuoseklias struktūras. Dabar aptarsime, kokiu būdu reikėtų koduoti, kad analogišką problemą galėtume modeliuoti ir "šakotas" struktūras.

Medis su šaknimi turi šakas (kraštines), kurios yra sužymėtos ir orientuotos. Šakų seka pagrindinę viršūnę (kartais vadinamą šaknimi arba baze) jungia su galutinėmis viršūnėmis.

Aišku, kad mums teks apibrėžti papildomus simbolius, kurie padėtų atskirti kamieno šakas nuo kitų šakų. Apibrėžkime du papildomus simbolius "[" ir "]-" kairiįį ir dešinį skliaustus, kurie nurodys, kada šaka prasideda, o kada baigiasi.

Panagrinėkime seką:

$$\mathcal{AXA}[\mathcal{XXAA}][\mathcal{CCXX}]\mathcal{AXA}[\mathcal{AAXX}]\mathcal{AXA}$$

kuri reprezentuoja kamieną, nuo kurio atsišakoja dvi gretimos šakos $\mathcal{XXAA}$ $\mathcal{CCXX}$ ir kiek vėliau šaka $\mathcal{AAXX}$.

Techniškai realizuojant šią problemą (skaitant kodą) reikia turėti omenyje, kad nubrėžus kokią nors šaką, reikia prisiminti padėtį, nuo kurios buvo pradėta braižyti šaka arba kelios šakos, o baigus šakų braižymą grįžti į tą pačią padėtį, nuo kurios buvo pradėtos braižyti šakos. Šaką galime įsivaizduoti, kaip sekos posekį. Atidarantis skliaustas [nurodo padėtį, nuo kurios kamiene arba šakoje prasideda nauja šaka, o skliaustas] nurodo šakos pabaigą. Beje, pasiekus šakos pabaigą yra grįžtama prie padėties, kuri buvo prieš atidarantį skliaustą [.

Naudodami $L-$ sistemą bei naujai apibrėžtus atsišakojimo simbolius pabandykime realizuoti paprasto medžio grafinį vaizdą. Paprasti medžiai modeliuojami L-sistemomis yra vadinami L-medžiais arba *0L sistemomis su skliaustais* (bracketed 0L-systems).

Paprastas medis;

Aksioma: $\mathcal{F}$

Reprodukcijos taisyklės:

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}[+\mathcal{F}]\mathcal{F}[-\mathcal{F}]\mathcal{F}, \;\; \delta = 25.7^0, \;\; l = \frac{l}{2}.$$

16 pav. yra parodyta šios iteracinės sekos penkių žingsnių grafinė realizacija.

16 pav.

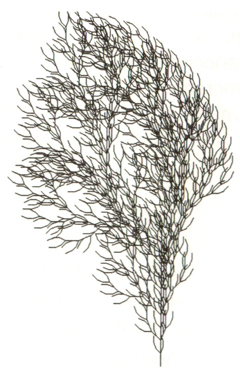
Žemiau pateiktame paveiksle yra realizuotas paprasto krūmo grafinis vaizdas. Šį krūmą modeliuojanti $L-$ sistema yra tokia:

Paprastas krūmas;

Aksioma: $\mathcal{F}$

Reprodukcijos taisyklės:

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}\mathcal{F} + [+\mathcal{F} - \mathcal{F} - \mathcal{F}] - [-\mathcal{F} + \mathcal{F} + \mathcal{F}], \;\; \delta = 25^0, \; n = 4 \;\; l = \frac{l}{2}.$$



17 pav.

Pateiksime skirtingą šakojimąsi realizuojančią $L-$ sistemą. Tegu šakojimąsi realizuojantis posekis yra $\mathcal{X}$. Apibrėžkime

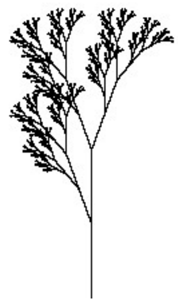
Medis;

Aksioma: $\mathcal{X}$

Reprodukcijos taisyklės:

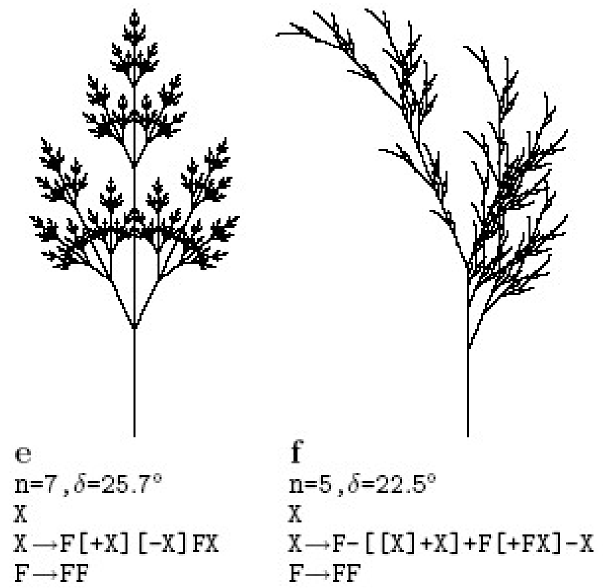
$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}\mathcal{F}, \quad \mathcal{X} \to \mathcal{F}[+\mathcal{X}]\mathcal{F}[-\mathcal{X}] + \mathcal{X}, \;\; \delta = 20^0, \;\; l = \frac{l}{2}.$$

Šio medžio grafinis vaizdas, kai $n = 5$ pateiktas 18 pav.



18 pav.

19 pav. pateikiame įvairių medžių vaizdus bei kodus.



19 pav.

2.6 Trimačių medžių modeliavimas

Analogiškai kaip ir dvimačiu atveju, modeliuojant trimates šakotas struktūras yra naudojamos skliaustų sistema. Aptarkime šios sistemos aksiomatiką. Norint modeliuoti 3D medį tenka naudoti tokio pobūdžio reprodukcijos funkcijas:

Šaką sudaro briauna $\mathcal{F}$ lapas L ir viršūnė A, kuri automatiškai pasiruošia komandai kurti tris šakas.

p_1 : kuria tris naujas šakas nuo senosios briaunos viršūnės;

p_2 ir p_3 yra stiebo tarp atsišakojimų augimo funkcija; besiplėtodamas stiebas tampa vis ilgesniu ir atsiranda poreikis naujam lapui.

Reprodukcijos funkcija p_4 apibrėžia lapą šešiakampiu. Lapo kraštai apibrėžiami skliaustais $\{\}$.

Simboliai $!,'$ yra naudojami spalvoms parinkti.

20 pav. pateikiame 3D medį, apačioje nurodyta aksiomatika.

n=7, δ=22.5°

ω : A

p_1 : A → [&FL!A]/////’[&FL!A]///////’[&FL!A]

p_2 : F → S ///// F

p_3 : S → F L

p_4 : L → [’’’∧∧{-f+f+f-|-f+f+f}]

20 pav.

2.7 Atsitiktinės L-sistemos

Atsitiktine OL-sistema vadinsime sutvarkytą ketvertą

$$G_\pi =< V, \omega, P, \pi > .$$

Čia V yra abėcėlė, $\omega-$ aksioma, P yra reprodukcijos funkcijų aibė ir $\pi : P \to (0, 1]$ vadinama tikimybiniu skirstiniu, apibrėžtu reprodukcijų aibėje. Taigi, visų abėcėlės V raidžių reprodukcijų tikimybių suma lygi vienam.

Sakysime, kad $\mu \to \nu$ (ν yra kildinamas iš μ atsitiktinai) aibėje G_π, jei kiekvienam raidės $a \in \mu$ pasirinkimui tikimybė, kad ši raidė bus reprodukuojama taisykle p žodyje ν yra lygi $\pi(p)$.

Pateiksime tokios $L-$ sistemos pavyzdį:

Atsitiktinis reguliarus medis;

Aksioma: $\mathcal{F}$

Reprodukcijos taisyklės:

$p_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}[+\mathcal{F}]\mathcal{F}[-\mathcal{F}]\mathcal{F},\ \pi(p_1) = \frac{1}{3},$

$p_2 : \ \mathcal{F} \to \mathcal{F}[+\mathcal{F}]\mathcal{F},\ \pi(p_2) = \frac{1}{3},$

$p_3 : \ \mathcal{F} \to \mathcal{F}[-\mathcal{F}]\mathcal{F},\ \pi(p_3) = \frac{1}{3},\ \ \delta = 25.7^0,\ \ l = \frac{1}{2}.$

Šios sistemos grafinis vaizdas pateikiamas 21 pav.

21 pav.

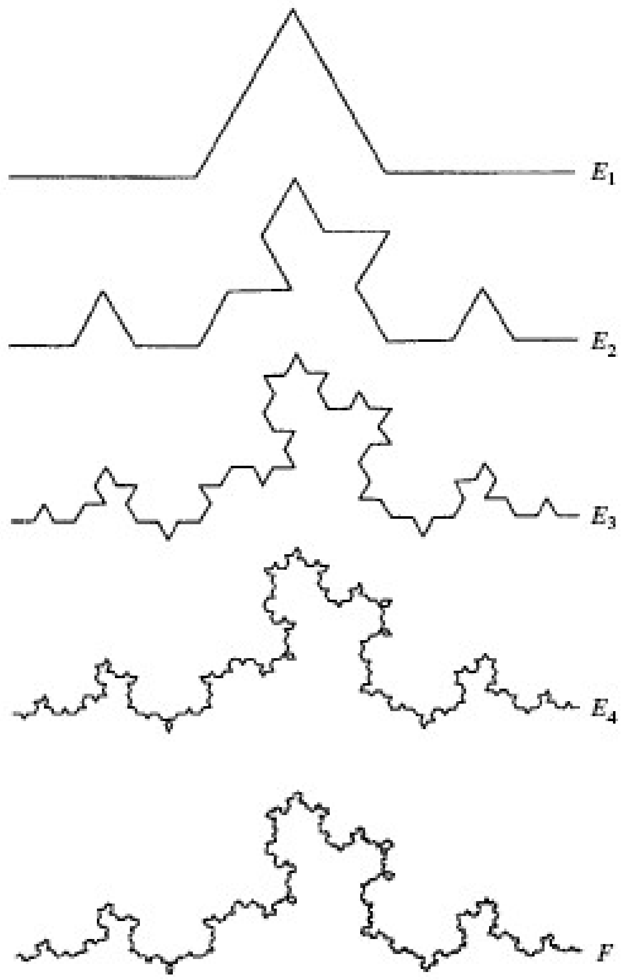
Pateiksime Kocho kreivės atsitiktinę realizaciją $L-$ sistema (22 pav.)

Atsitiktinė Kocho kreivė;

Aksioma: $\mathcal{F}$

Reprodukcijos taisyklės:

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F} - \mathcal{F} + +\mathcal{F} - \mathcal{F},\ P(\mathcal{F}) = \frac{1}{2},\ \ \mathcal{I} \to \mathcal{F} + \mathcal{F} - -\mathcal{F} + \mathcal{F},\ P(\mathcal{F}) = \frac{1}{2},\ \ ,\ \ \delta = 60^0..$$

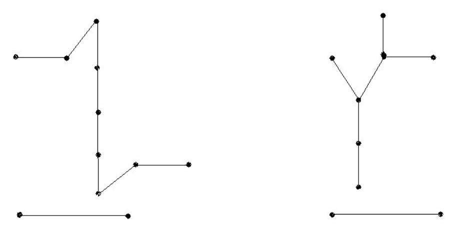


22 pav.

Užduotys

1. Sudarykite pateiktų L sistemų TG kodą:

a)



b)

2. Parašykite kodą, kurio dėka būtų galima gauti grafines, 1 užduoties, L-sistemų realizacijas.

3. Grafiškai realizuokite L- sistemas, jei šių sistemų TG kodas yra:

a) $n = 4$, $\delta = 90^0$,
Aksioma , $F - F - F - F$;
Reprodukcijos taisyklė $F \to FF - F - F - F - F + F + F$.

b) $n = 5$, $\delta = 90^0$,
Aksioma , $F - F - F - F$;
Reprodukcijos taisyklė $F \to FF - F - F - F - FF$.

c) $n = 3$, $\delta = 90^0$,
Aksioma , $F - F - F - F$;
Reprodukcijos taisyklė $F \to FF - F + F - F - FF$.

d) $n = 4$, $\delta = 90^0$,
Aksioma , $F - F - F - F$;
Reprodukcijos taisyklė $F \to FF - F - -F - F$.

e) $n = 5$, $\delta = 90^0$,
Aksioma , $F - F - F - F$;
Reprodukcijos taisyklė $F \to F - FF - -F - F$.

f) $n = 4$, $\delta = 90^0$,
Aksioma , $F - F - F - F$;
Reprodukcijos taisyklė $F \to F - F + F - F - F$.

4. Tarkime, kad $x = 0.(4)$ yra devintainės skaičiavimo sistemos periodinė trupmena.
a) Užrašykite šį skaičių paprasta trupmena;
b) Tarkime, kad $P : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ yra Peano kreivę atitinkantis atvaizdis. Raskite taško x padėtį kvadrate (nurodykite taško koordinates).

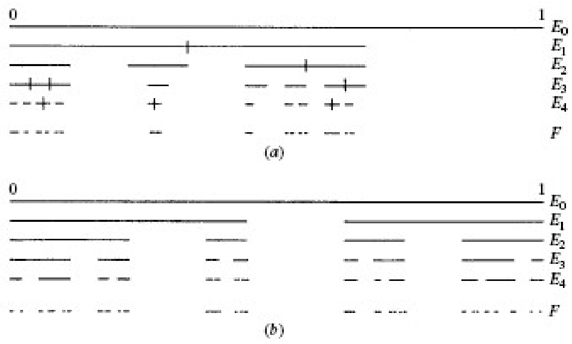
5. Sudarykite algoritmą, bei parašykite programą, kurios dėka būtų galima skaičius, užrašytus bet kokioje skaičiavimo sistemoje, perkoduoti į kitos skaičiavimo skaičius.

6. Sudarykime 12 pav. pateiktos Peano kreivės TG kodą. Realizuokite uždavinį grafiškai.

7. Tarkime Peano kreivė pateikta 11 pav. Nurodykite S taškus, kurie turi dvi reprezentacijas. Kokie S taškai atvaizduojami vienareikšmiškai.

8. Apibrėžkite funkciją $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ kurios grafikas yra Hilberto kreivė.

9. Pateikite stochastinio Sierpinskio trikampio TG kodą.
10. Parašyti TG kodą stochastinei Kantoro aibės realizacijai (23 pav.).



23 pav.