VII. DAUGELIO KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS

7.1 Bendrosios sąvokos

Nagrinėjome funkcijas, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje. Nagrinėsime funkcijas, kurios apibrėžtos realiųjų skaičių sutvarkytuose rinkiniuose. Tokios funkcijos bus vadinamos *daugelio kintamųjų funkcijomis.*

Tarkime, kad $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$. Tada sutvarkytą realiųjų skaičių rinkinį $X = (x_1, \ldots, x_n)$, vadinsime $n-$ mačiu kintamuoju, priklausančiu aibei $\mathbb{R}^n$, o skaičiai x_i yra vadinami $n-$ mačio kintamojo komponentėmis arba nepriklausomai kintamaisiais. Primename, kad rinkinį vadiname sutvarkytu, jei rinkinio koordinačių padėtis svarbi, t.y. $(2, 3, 0) \neq (3, 2, 0)$.

Pastaba Paprastai sutvarkyto rinkinio elementus skirsime kabletaškiais, bet jei nekils neaiškumų ir kableliais. Pavyzdžiui $(2; 3; 4; 7)$, arba (x, y, z).

Visų $n-$ mačių rinkinių aibę, kai koordinatės yra bet kokie realūs skaičiai, vadinsime $n-$ mate aibe (erdve) $\mathbb{R}^n$. $n-$ matės erdvės elementus (rinkinius) patogu vadinti taškais. Žemiau šiuos taškus žymėsime didžiosiomis raidėmis, su indeksais arba be jų, pvz: M, X, Y, M_1, M_2, o šių taškų koordinates atitinkamomis mažosiomis raidėmis.

Apibrėžkime atstumo, tarp dviejų taškų, $n-$ matėje erdvėje, sąvoką.

Apibrėžimas *Atstumu tarp dviejų taškų vadinsime tokį neneigiamą skaičių:*

$$\rho_n(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

čia $X, Y \in \mathbb{R}^n \;\; n \in \mathcal{N}$.

Aibę $\mathbb{R}^n$, su joje apibrėžta atstumo sąvoka vadinsime $n-$ mate metrine erdve. Beje, kai $n = 1, 2, 3$, tai šias erdves vadinsime tiese, plokštuma bei trimate erdve, atitinkamai.

Pavyzdys Raskime atstumą tarp dviejų taškų $X = (2, 4, -1, 0)$ ir $Y = (1, 3, 0, 1)$ keturmatėje erdvėje. Remdamiesi atstumo formule gauname, kad

$$\rho_4(X, Y) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2 + (-1-0)^2 + (0-1)^2} = 2.$$

Apibrėžimas *Taisyklę, kuria realiųjų skaičių rinkiniui* $(x_1, \ldots x_n)$ *priskiriame vieną realų skaičių, vadinsime $n-$ kintamųjų funkcija, įgyjančia realias reikšmes. Žymėsime* $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. *Skaičius z vadinamas $n-$ kintamųjų funkcijos reikšme, o rinkinys* $(x_1, \ldots, x_n)$ *vadinamas funkcijos f laisvaisiais kintamaisiais.*

Funkcijos $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ apibrėžimo sritimi vadinsime erdvės $\mathbb{R}^n$ taškų aibę $D(f) = \{X \in \mathbb{R}^n, \exists z \in \mathbb{R}, f(X) = z\}$. Realiųjų skaičių aibės poaibis $E(f) = \{z \in \mathbb{R}; \exists M = (x_1, \ldots, x_n) \in D(f),\ f(M) = z\}$ yra vadinamas funkcijos $z = f(M)$ reikšmių sritimi .

Pavyzdys Panagrinėkime funkciją

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Šios funkcijos reikšmių sritį sudaro visi neneigiami realūs skaičiai, t.y. $E(f) = [0, +\infty)$. Funkcijos apibrėžimo sritį sudaro visi plokštumos taškai tenkinantys nelygybę:

$$(x - y)(x + y) \geq 0.$$

Skaitytojui siūlome pažymėti šią sritį plokštumoje.

Apibrėžimas *Sakysime, kad n-kintamųjų funkcija yra didėjanti kintamojo x_i atžvilgiu, jei*

$$f(x_1, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i^1, \ldots, x_n) > 0, \;\text{ kai }\; x_i^0 > x_i^1.$$

Sakysime, kad n-kintamųjų funkcija yra mažėjanti kintamojo x_i atžvilgiu, jeigu

$$f(x_1, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i^1, \ldots, x_n) < 0, \;\text{ kai }\; x_i^0 > x_i^1.$$

Pateiksime daugelio kintamųjų funkcijų pavyzdžių. Šios funkcijos naudojamos ekonomikos teorijoje.

Pavyzdys Funkciją $f : [0,\infty)^n \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ apibrėžtą tokiu būdu:

$$f(X) = \prod_{i=1}^{n} x^{\alpha_i},$$

fiksuotiems $\alpha_i > 0,\ i \in \{1,\dots,n\}$ vadinsime Kobo-Duglo (Cobb-Douglas) funkcija.

Pavyzdys Funkciją $f : [0,\infty)^n \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ apibrėžtą tokiu būdu:

$$f(X) = \min\Big\{\frac{x_1}{\alpha_1},\dots,\frac{x_n}{\alpha_n}\Big\},$$

fiksuotiems $\alpha_i > 0,\ i \in \{1,\dots,n\}$ vadinsime Leontjevo (Leontief) funkcija.

Pavyzdys Funkciją $f : [0,\infty)^n \to \mathbb{R},\ n \in \mathcal{N}$ apibrėžtą tokiu būdu:

$$f(X) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^q \cdot \alpha_i\Big)^{\frac{1}{q}},$$

fiksuotiems $\alpha_i > 0,\ i \in \{1,\dots,n\},\ q \le 1,\ q \ne 0$ vadinsime CES funkcija.

Visos šios funkcijos yra didėjančios kintamųjų x_i atžvilgiu.

Bet kokį vektorinės erdvės poaibį vadinsime sritimi. Aibės $B \subset \mathbb{R}^n$ srities siena vadinsime erdvės taškų aibę, kurios aplinkoje yra ir aibės B ir šios aibės papildinio B^c taškų. Visi B taškai nepriklausantys srities sienai yra vadinami vidiniais srities taškais. Sritis bus vadinama uždara, jeigu jai priklauso visi sienos taškai. Kitu atveju sritis bus vadinama atvira.

Pavyzdys Aibę $S = \{X \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$ sudaro visi trimatės erdvės taškai, priklausantys skrituliui, kurio spindulys lygus $\sqrt{2}$. Šios aibės siena yra sfera, kurios spindulys $\sqrt{2}$.

Tarkime $A \in \mathbb{R}^n,\ \ r \ge 0$. Sritį

$$B(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n, \rho(A,X) < r\},$$

vadinsime atviru rutuliu (dažnai atvira taško A aplinka), o sritį

$$(B(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n, \rho(A,X) \le r\})$$

$r \ge 0$, vadinsime uždaru rutuliu.

Bet kokį atvirą rutulį, kuriam priklauso taškas $X = (x_1,\dots,x_n)$, vadinsime šio taško aplinka.

Aibė $A \subset \mathbb{R}^n$ vadinama aprėžta, jei egzistuoja atviras rutulys su baigtiniu spinduliu, kuriam priklauso šis aibė.

7.2 Funkcijos riba. Funkcijos tolydumas

Pažymėkime $M = (m_1,\dots,m_n)$ ir $M_0 = (m_1^0,\dots,m_n^0)$ ir $M_k = (m_1^k,\dots,m_n^k),\ \ k \in \mathbb{N}$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad seka $\{M_k\} \in \mathbb{R}^n$ konverguoja erdvėje $\mathbb{R}^n$ į ribinį tašką $A \in \mathbb{R}^n$, jei kiekvienam $\epsilon > 0$, egzistuoja numeris n_0 toks, kad visiems $k > n_0$, atstumas tarp ribinio taško A ir sekos narių M_k, kai $k > n_0$ yra mažesnis negu ϵ, t.y. $\rho(M_k, A) < \epsilon$.*

Jei seka M_k konverguoja į A, tai šį faktą trumpai žymėsime $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = A$.

Teisinga tokia teorema:

Teorema 1. *Seka M_k turi ribą $(m_1^0,\dots,m_n^0)$ tada ir tik tada, kai kiekviena sekos M_k koordinatė konverguoja į atitinkamą taško M_0 koordinatę, t.y*

$$\lim_{k\to\infty} m_i^k = m_i^0,\ \ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Apibrėžimas *Realųjį skaičių A vadinsime funkcijos $f(m_1,\dots,m_n)$ riba taške M_0, jeigu bet kokiai sekai $\{M_k\}$ tokiai, kad*

$$\lim_{k\to\infty} M_k = M_0$$

išplaukia, kad funkcijos reikšmių seka

$$\lim_{k\to\infty} f(M_k) = A.$$

Trumpai,

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A.$$

Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{2n}{n+2} \\ \frac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kai } n \to \infty.$$

Teorema 2. *Sakykime, kad*

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A, \quad \lim_{M\to M_0} g(M) = B.$$

Tada

$$\lim_{M\to M_0} (g(M) \pm f(M)) = B \pm A, \quad \lim_{M\to M_0} (g(M) \cdot f(M)) = B \cdot A.$$

Jei $f(M) = A \neq 0$, *tai*

$$\lim_{M\to M_0} \frac{g(M)}{f(M)} = \frac{B}{A}.$$

Beje, ribinio sąryšio vietoje būtų galima naudoti sąryšį $M \to M_0 \Leftrightarrow \rho(M, M_0) \to 0$.

Pavyzdys Sakysime, kad funkcija $f(M)$ yra nykstama taške A, jei

$$\lim_{\substack{M\to A \\ (\rho(M,A)\to 0)}} f(M) = 0.$$

Nagrinėdami vieno kintamojo funkcijas, norėdami įrodyti, kad riba taške egzistuoja, turėjome įsitikinti, kad ribos iš kairės ir dešinės egzistuoja ir be to jos sutampa. Daugelio kintamųjų atveju, turėtume tikrinti ribas, kai artėjama prie taško, bet kokia trajektorija. Pastaroji savybė dažnai naudojama, kai norima parodyti, kad taške riba neegzistuoja. Kalbant konkrečiai, norint įrodyti, kad riba neegzistuoja, pakanka nurodyti keletą trajektorijų, kuriomis artėdami prie ribinio taško gauname skirtingas funkcijos ribines reikšmes.

Apibrėžimas *Funkcija* $z = f(M)$ *yra tolydi taške* M_0, *jeigu:*

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{1}$$

Jeigu taške M_0 sąlyga (1) nėra tenkinama, tai tada taškas M_0 vadinamas funkcijos trūkio tašku.

Sakysime, kad funkcija $z = f(M)$ yra tolydi srityje D, jeigu ji tolydi bet kokiame šios srities taške.

Taškas M_1 bus trūkio taškas, jeigu:

1) funkcija $z = f(M)$ yra apibrėžta visuose taško M_1 aplinkos taškuose, išskyrus tašką M_1;

2) funkcija $z = f(M)$ apibrėžta visuose taško M_1 aplinkos taškuose, bet riba

$$\lim_{M\to M_1} f(M)$$

neegzistuoja arba

$$\lim_{M\to M_1} f(M) \neq f(M_1).$$

Aukščiau paminėti požymiai sudaro prielaidas trūkio taškams rasti.

Pavyzdys Panagrinėkime funkciją

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}; & \text{jei } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0; & \text{jei } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad $f(0,0) = 0$. Suskaičiuokime ribą, kai y artėja link 0 tiese $y = 2x$. Turime, kad

$$\lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{x2x}{x^2+(2x)^2} = \frac{2}{5}.$$

Matome, kad egzistuoja ribinė reikšmė, kuri nesutampa su funkcijos reikšme šiame taške. Taigi, taške $(0,0)$ nagrinėjama funkcija nėra tolydi.

Nagrinėsime $n-$kintamųjų funkciją $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, kiekvienam iš kintamųjų suteikdami pokytį. Su koordinate x_i susiekime skaičių $x_i + \Delta x_i$, $i = 1, \ldots, n$; $\Delta x_i \in \mathbb{R}$. Šiuo atveju sakysime, kad koordinatei x_i suteikiame pokytį Δx_i.

Apibrėžimas *Funkcijos f daliniu pokyčiu taške* $(x_1, \ldots x_n)$, *kintamojo x_i atžvilgiu (žymėsime $\Delta_{x_i} f$), atitinkančiu argumento pokytį Δx_i, vadinsime tokį skirtumą:*

$$\Delta_{x_i} f = f(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Suteikime visiems laisviesiems kintamiesiems x_i, $i = 1, \ldots n$ pokyčius Δx_i. Funkcijos $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ pilnuoju pokyčiu taške $(x_1, \ldots, x_n)$ vadinsime tokį skirtumą:

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

(1) lygybę, naudojant pilnojo pokyčio sąvoką, galime perrašyti ir taip:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0, \\ \cdots \Delta x_n \to 0}} f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

arba

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0, \\ \cdots \Delta x_n \to 0}} \big(f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \ldots x_n)\big) = 0. \tag{2}$$

Pažymėkime $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}$. Nesunku suprasti, kad $\Delta\rho \to 0$ tada ir tik tada, kai visi $\Delta x_i \to 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Remdamiesi šiais žymėjimais, (2) lygybę galime perrašyti taip:

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta f = 0. \tag{3}$$

Tolydžios daugelio kintamųjų funkcijos turi panašias savybes kaip ir vieno kintamojo funkcijos. Be įrodymo paminėkime šias savybes.

Tarkime, kad $M \in \mathbb{R}^n$.

1. Savybė Jeigu funkcija $z = f(M)$ apibrėžta ir tolydi uždaroje ir aprėžtoje srityje D, tai šioje srityje egzistuoja taškai, tarkime M_0 ir M_1, kuriuose funkcija įgyja didžiausią ir mažiausią reikšmes, atitinkamai, t.y.

$$\max_{M \in D} f(M) = A \ \text{ ir } \ \min_{M \in D} f(M) = a.$$

Kitaip tariant, $A = f(M_0)$ ir $a = f(M_1)$ yra didžiausia ir mažiausia funkcijos $f(M)$ reikšmės srityje D, atitinkamai.

2. Savybė Tarkime, kad $a < \mu < A$. Tarkime, kad funkcija $z = f(M)$ yra tolydi uždaroje ir aprėžtoje srityje D. Tada egzistuoja srities D taškas M_2 toks, kad teisinga lygybė: $f(M_2) = \mu$.

3. Savybė Tarkime, kad funkcija $z = f(M)$ yra tolydi uždaroje ir aprėžtoje srityje D. Jeigu šioje srityje funkcija įgyja skirtingų reikšmių ženklus, tai egzistuoja taškas $N_0 \in D$ toks, kad $f(N_0) = 0$.

Tikimės, kad skaitytojas atkreipė dėmesį į tai, kad minėtosios savybės tėra vieno kintamojo funkcijų savybių apibendrinimas.

4. Savybė Jei funkcijos $f(M),\ g(M)$ yra tolydžios taške M_0, tai šiame taške yra tolydi ir šių funkcijų suma, skirtumas ir sandauga. Jei funkcija $g(M_0) \neq 0$, tai šiame taške tolydus šių funkcijų santykis, t.y. $f(M)/g(M)$ tolydi taške M_0.

Pavyzdys Funkcijos $z = f(x,y) = \frac{x^2+xy^3+\sqrt{x+y^2}}{y-x^2}$ visi netolydumo (trūkio) taškai priklauso parabolei $y = x^2$.

7.3 Dalinės išvestinės

Apibrėžimas *Funkcijos $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ daline išvestine kintamojo $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ atžvilgiu vadinsime tokią santykio ribą:*

$$z'_{x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i} :=$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i-1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_i},$$

jei ši riba egzistuoja. Priešingu atveju sakysime, kad dalinė išvestinė neegzistuoja.

Skaičiuodami dalines išvestines, kurio nors kintamojo, tarkime x_1, atžvilgiu, mes laikome, kad visi kiti laisvieji kintamieji yra konstantos ir skaičiuojame išvestinę šio kintamojo atžvilgiu, tardami, kad funkcija priklauso tik nuo vieno kintamojo x_i.

Pavyzdys Naudodamiesi apibrėžimu suskaičiuokime dalinę išvestinę kintamojo y atžvilgiu, jei $z = f(x,y) = xy^2 + y$.

Remiantis apibrėžimu turime, kad

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \cdot (y + \Delta y)^2 + (y + \Delta y) - x \cdot y^2 - y}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{2xy\Delta y + (\Delta y)^2 + \Delta y}{\Delta y} = 2xy + 1.$$

Naudodamiesi išvestinių skaičiavimo taisyklėmis apskaičiuokime išvestinę kintamojo x atžvilgiu:

$$f'_x(x,y) = (xy^2 + y)'_x = y^2 + 0 = y^2.$$

Pavyzdys Raskime funkcijos $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$, dalinę išvestinę kintamojo y atžvilgiu taške $(1;0)$. Visų pirma randame dalinę išvestinę, bet kokiame taške $M = (x,y)$. Gauname

$$z'_y(x,y) = 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4.$$

Tada $z'_y(1;0) = -5$.

Sakykime, kad duota aibių sistema $A_i \in \mathbb{R}$. Tada aibių $A_i,\ i = 1, \ldots, n$ tiesiogine sandauga vadinsime tokią aibę

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n);\ x_i \in A_i\}.$$

Tada vektorinę erdvę $\mathbb{R}^n$ galime apibrėžti tokiu būdu $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Teorema 3. *Tarkime, kad* $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, *ir* $f : A \to \mathbb{R}$ *funkcija, turinti dalines išvestines visų kintamųjų atžvilgiu,* $Y, T \subset \mathbb{R}$. *Tarkime, kad*

1) $g_i : T \to A_i$, $A_i \subset A$ *visiems* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *diferencijuojamos funkcijos. Tada funkcijos* $h : T \to Y$, *apibrėžtos tokiu būdu:*

$$h(t) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t)), \quad \forall t \in T,$$

išvestinė yra lygi

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}(t).$$

2) Tarkime, kad $g_i : V \to A_i$, $V \subset \mathbb{R}^k$, *visiems* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *yra funkcijos, turinčios dalines išvestines visų kintamųjų atžvilgiu. Tada galime apibrėžti funkciją* $h : \mathbb{R}^k \to Y$, *tokiu būdu:*

$$h(t_1, \ldots, t_k) = f(g_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_k)), \quad \forall (t_1, \ldots, t_k) \in V.$$

Be to, šios funkcijos išvestinės kintamųjų t_j, $j = 1, \ldots, k$ *atžvilgiu yra lygios*

$$\frac{\partial h}{\partial t_j}(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_n)) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial t_j}(t_1, \ldots, t_n),$$

$(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$.

Perrašykime šią taisyklę dviejų kintamųjų atveju, t.y. $z = f(x, y)$, $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$. Jei funkcijos $f(x, y)$ turi tolydžias dalines išvestines, tai

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

ir

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Pavyzdys Tarkime, kad $f(x_1, x_2) = x_1^2(x_2 + 1)$, $g_1(t) = \sin t$, $g_2(t) = t^2$. Apibrėžkime funkciją $h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$. Tada, naudodamiesi paskutine teorema gauname, kad šios funkcijos išvestinė kintamojo $t \in \mathbb{R}$ atžvilgiu yra lygi:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g_1(t), g_2(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g_1(t), g_2(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}t}(t) =$$

$$2\sin t(t^2 + 1)\cos t + \sin^2 t \cdot 2t.$$

Pavyzdys Tarkime, kad $u = f(x, y, z) = xy^2 + \sqrt{z}x$. Apskaičiuokime $f'_y(1; 0; 2)$ ir $f'_z(1; 0; 2)$. Turime, kad $f'_y(x, y, z) = 2xy$ ir $f'_z(x, y, z) = \frac{x}{2\sqrt{(z)}}$. Tada $f'_y(1; 0; 2) = 0$ ir $f'_y(1; 0; 2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Pavyzdys Tarkime, kad $u = f(x, y, z) = xy^2 + x\sqrt{z}$ ir $x = s + t^2$, $y = st$, $z = \sqrt{t + s}$. Apskaičiuokime

$$u'_t(t, s).$$

Tada

$$u'_t = f'_x \cdot x'_t + f'_y \cdot y'_t + f'_z \cdot z'_t = (y^2 + \sqrt{z}) \cdot 2t + 2y \cdot s + \frac{x}{2\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t + s}}.$$

Pavyzdys Tarkime, kad gamykla gamina filmavimo kameras ir fotoaparatus, q_c ir q_f yra šių produktų kiekiai. Žinoma, kad bendrieji kaštai išreiškiami tokia formule:

$$c = 30q_c + \frac{15}{1000}q_c q_f + q_f + 900.$$

Filmavimo kamerų ir fotoaparatų poreikių funkcijos yra tokios:

$$q_c = \frac{9000}{p_c\sqrt{p_f}}, \quad q_f = 2000 - p_c - 400p_f,$$

čia p_c ir p_f yra atitinkamų produktų vieneto kainos. Raskime bendrųjų kaštų kitimo greitį kamerų kainos atžvilgiu, kai $p_c = 50,\ p_f = 2$.

Randame dalinę išvestinę

$$\frac{\partial c}{\partial p_c} = \frac{\partial c}{\partial q_c}\frac{\partial q_c}{\partial p_c} + \frac{\partial c}{\partial q_f}\frac{\partial q_f}{\partial p_c} = (30 + 0,015q_f)(\frac{-9000}{p_c^2\sqrt{p_f}}) + (0,015q_c + 1)(-1).$$

Naudodamiesi prielaidomis turime, kad $p_c = 50,\ p_f = 2,\ q_c = 90\sqrt{2},\ q_f = 1150.$

$$\frac{\partial c}{\partial p_c}\Big|_{\substack{p_c=50,\\ p_f=2}} \approx -123.$$

Pastaba Trumpai pakomentuosime gautą rezultatą. Gautasis rezultatas reiškia, kad esant filmavimo kameros kainai 50, o aparato kainai 2, padidinus kameros kainą vienu vienetu jų gamybos kaštai nukristų 123 piniginiais vienetais.

7.4 Funkcijos diferencialas. Aukštesnių eilių diferencialai

Tarkime, kad funkcijos $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ išvestinė u'_{x_i} egzistuoja kokioje nors taško M aplinkoje. Taigi, šiuo atveju išvestinė nurodyto kintamojo atžvilgiu yra funkcija, kintamųjų $x_1, \ldots, x_n$ atžvilgiu. Jeigu ši funkcija turi išvestinę taško M aplinkoje kintamojo x_k atžvilgiu, tai šią išvestinę vadinsime pradinės funkcijos antros eilės išvestine kintamųjų x_i, x_k atžvilgiu ir šią išvestinę žymėsime simboliu

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_i \partial x_k}, \text{ arba } u''_{x_i x_k}.$$

Jei $i \neq k$, tai ši išvestinė bus vadinama mišriąja antros eilės daline išvestine, kintamųjų x_i, x_k atžvilgiu.

Visiškai analogiškai yra apibrėžiamos ir aukštesnių eilių išvestinės, tačiau mes apie tai plačiau nekalbėsime. Skaitytojas besidomintis šia problema apie tai plačiau galėtų pasiskaityti A. Kabailos Matematinės analizės vadovėlį, 2d.

Funkcijos $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pilnąjį pokytį taške $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kai laisvųjų kintamųjų pokyčiai yra $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ galime užrašyti tokiu būdu:

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}\Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_n \Delta x_n.$$

Beje, paskutinėje lygybėje pirmieji n dėmenų yra tiesiniai, pokyčių Δx_i atžvilgiu. Jeigu dalinės išvestinės z'_{x_i} yra nelygios nuliui, kokiame nors taške, tai šiame taške (7) lygybės pirmieji n dėmenų sudaro pagrindinę funkcijos pokyčio dalį, kadangi likę dėmenys yra aukštesnės eilės nykstami dydžiai.

Apibrėžimas *Funkcijos $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pilnojo pokyčio taške tiesinę dalį, $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, atžvilgiu, vadinsime šios funkcijos pilnuoju diferencialu ir žymėsime*

$$\mathrm{d}z = f'_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + f'_{x_n}\Delta x_n.$$

Pavyzdys Raskime funkcijos $z = x^3y^2 + \sqrt{x+y}$ diferencialo reikšmę:
a) taške $M = (1; 2)$;
b) taške $M = (1; 2)$, kai argumeto pokyčiai $\Delta x = 0,01, \quad \Delta y = 0,02$.
Visų pirma randame dalines išvestines kintamųjų atžvilgiu:

$$z'_x = 3x^2y^2 + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}; \quad z'_y = 2x^3y + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}.$$

Randame išvestinių reikšmes nurodytame taške.

$$z'_x(1; 2) = 12 + \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad z'_y(1; 2) = 4 + \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Tada,
a)

$$\mathrm{d}z(x, y) = (12 + \frac{1}{2\sqrt{3}})\Delta x + (4 + \frac{1}{2\sqrt{3}})\Delta y.$$

b)

$$\mathrm{d}z(1; 2) = (12 + \frac{1}{2\sqrt{3}})0,1 + (4 + \frac{1}{2\sqrt{3}})0,2 = 2 + \frac{0,3}{2\sqrt{3}}.$$

Matome, kad $\Delta z \approx \mathrm{d}z$, jei Δx_i yra maži dydžiai. Pastaroji lygybė dažnai naudojama apytiksliams skaičiavimams. Kalbant kiek konkrečiau, perrašykime šią apytikslę lygybę tokiu būdu:

$$f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n) \approx f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) + f'_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + +f'_{x_n}\Delta x_n.$$

Laisvųjų kintamųjų pokytį ateityje žymėsime simboliais $\mathrm{d}x_i = \Delta x_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Naudodami šiuos žymėjimus, funkcijos z pirmąjį diferencialą perrašome taip:

$$\mathrm{d}z = f'_{x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + f'_{x_n}\mathrm{d}x_n.$$

Taigi, jei funkcija $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, tai funkcijos pirmasis diferencialas yra lygus

$$\mathrm{d}z = f'_{x_1}\mathrm{d}x_1 + f'_{x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + f'_{x_n}\mathrm{d}x_n.$$

7.5 Dalinių išvestinių taikymai

Tarkime, kad įmonė gamina X ir Y rūšies produktus. Tegu x ir y yra šių produktų pagamintų vienetų skaičiai. Tegu šių produktų kaštų funkcija $c = f(x, y)$. Tada $c'_x(c'_y)$ yra vadinama marginaliais (ribiniais) kaštais produkto x atžvilgiu (produkto y atžvilgiu). Pavyzdžiui, jei turime, kad $c'_y = 2$, tai tada produkto Y vieneto kaštai, kai produkto X gamybos lygis fiksuotas apytiksliai yra lygūs 2 vienetams.

Apibendrindami galime teigti, kad jei įmonė gamina n produktų, tai kaštų funkcija bus n kintamųjų funkcija.

Pavyzdys Įmonė gamina X ir Y rūšių kėdes. Tarkime, kad bendra kaštų funkcija $c = f(x, y) = 0,06x^2 + 7x + 15y + 100$, čia c kaštų piniginė išraiška, kai buvo pagaminta x ir y produktų kiekiai atitinkamai. Raskime ribinius kaštus, kai $x = 100$ ir $y = 50$.

Suskaičiavę gauname, kad $c'_x = 0,12x + 7$ ir $c'_y = 15$. Tada

$$c'_x(100; 50) = 19, \quad c'_y(100; 50) = 15.$$

Vadinasi, padidinus X rūšies kėdžių gamybą nuo 100 iki 101, o rūšies Y kėdžių gamybą paliekant tą pačią ($y = 50$) gausime, kad gamybos kaštai padidės 19 piniginių vienetų. Tuo tarpu didinant Y rūšies kėdžių skaičių vienu vienetu (iki 51) išlaidos didėja 15 piniginių vienetų.

Gamybos apimtis priklauso nuo daugelio faktorių. Tai gali būti darbo jėga, kapitalas, įrenginiai ir t.t.. Tarkime, kad $P = f(l, k)$, čia $l-$ darbo vienetų skaičius ir $k-$ kapitalo vienetų skaičus. Tada funkcija P bus vadinama gamybos funkcija. Tada P'_l ir P'_k yra vadinami ribine gamybos apimtimi darbo jėgos ir kapitalo atžvilgiu, atitinkamai.

Pavyzdys Tarkime, kad Barbės ir Keno gamybos apimties funkcija yra tokia $P = \sqrt{lk}$, čia l yra žmogaus darbo valandų skaičius per savaitę, o $k-$ kapitalo investicijos per savaitę reikalingos P vienetų pagaminti. Nustatykime ribinę gamybos apimtį, kai $l = 400$, o $k = 16$.

Skaičiuojame išvestines nurodytame taške. Gauname, kad

$$P'_l(l,k) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{l}}, \quad P'_k(l,k) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{k}}.$$

Tada

$$P'_l(400;16) = 0,1, \quad P'_l(400;16) = 2,5.$$

Vadinasi, darbo valandų skaičių padidinus vienu vienetu ir palikus tas pačias investicijas, gamybos nurodytam darbo valandų skaičiui bei kapitalo investicijoms gauname, kad gamybos apimtis padidėja dešimtadaliu. Tuo tarpu jei padidinsime investicijas vienu vienetu, fiksavus darbo valandų skaičių, tai gamybos apimtis padidės 2,5 karto.

Dažna ekonominė situacija, kai keli produktai (jų gamybos apimtis) yra tarpusavyje susiję. Pavyzžiui, didėjant biodegalų gamybos apimčiai mažėja mineralinės naftos produktų poreikis.

Tarkime, kad dviejų produktų X ir Y paklausos funkcijos yra tokios:

$$q_X = f(x,y), \quad q_Y = g(x,y),$$

čia x ir y atitinkamų produktų pardavimo kainos. Tada išvestinės $\frac{\partial q_X}{\partial x}$, $\frac{\partial q_X}{\partial y}$, $\frac{\partial q_Y}{\partial x}$, $\frac{\partial q_Y}{\partial y}$ reiškia ribinę paklausą produkto X, priklausomai nuo kainos x, produkto X, priklausomai nuo kainos y, produkto Y, priklausomai nuo kainos x, produkto Y, priklausomai nuo kainos y, atitinkamai.

Tarkime, kad produkto Y kaina yra fiksuota, o produkto X kaina didėja. Tada remiantis ekonomine logika $\frac{\partial q_X}{\partial x} < 0$, kadangi augant kainai paklausa mažėja.

Panagrinėkime dvi situacijas:

1)

$$\frac{\partial q_X}{\partial y} > 0 \text{ ir } \frac{\partial q_Y}{\partial x} > 0.$$

Šiuo atveju sakysime, kad produktai X ir Y yra vadinamas vienas kito *pakaitalu* (konkuruojantys produktai).

2)

$$\frac{\partial q_X}{\partial y} < 0 \text{ ir } \frac{\partial q_Y}{\partial x} < 0.$$

Šiuo atveju sakysime, kad produktai X ir Y rinkoje yra komplektinės (naudojamos kartu) prekės.

Pavyzdys Tarkime, kad dviejų produktų X ir Y paklausos funkcijos yra tokios:

$$\begin{cases} q_X = \frac{50\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}}, \\ q_Y = \frac{75x}{\sqrt[3]{y^2}}. \end{cases}$$

Suskaičiavę dalines išvestines gauname, kad

$$\begin{cases} \frac{\partial q_X}{\partial y} = \frac{50}{3}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}}, \\ \frac{\partial q_Y}{\partial x} = \frac{75}{\sqrt[3]{y^2}} \end{cases}.$$

Matome, kad

$$\frac{\partial q_X}{\partial y} > 0 \text{ ir } \frac{\partial q_Y}{\partial x} > 0.$$

Taigi, šie produktai yra konkuruojantys.

7.6 Antrasis diferencialas. Daugelio kintamųjų funkcijos ekstremumai. Mažiausių kvadratų metodas

Apibrėžimas *Funkcijos z antros eilės diferencialu vadinsime pirmos eilės diferencialo, diferencialą.*

Visų pirma panagrinėkime dviejų kintamųjų funkciją $z = f(x, y)$. Suskaičiuokime šios funkcijos antros eilės diferencialą. Turime, kad

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\big(f'_{x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + f'_{x_n}\mathrm{d}x_n\big).$$

Pastebėsime, kad $x_i, i = 1, \ldots, n$, yra laisvieji kintamieji, todėl $(x_i)'_{x_j} = 0, i \neq j$. Be to pokyčiai Δx_i yra fiksuoti, todėl $(\Delta x_i)'_{x_j} = 0, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ j \neq i$. Tada

$$\mathrm{d}^2 z = \big(\mathrm{d}z\big)'_{x_1}\Delta x_1 + \cdots + \big(\mathrm{d}z\big)'_{x_n}\Delta x_n =$$

$$f''_{x_1}(\Delta x_1)^2 + \ldots f''_{x_n}(\Delta x_n)^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} f''_{x_i x_j}\Delta x_i \Delta x_j$$

$$\mathrm{d}z = f''_{x_1x_1}\mathrm{d}x_1^2 + f''_{x_2x_2}\mathrm{d}x_2^2 + \cdots + f''_{x_nx_n}\mathrm{d}x_n^2 +$$

$$2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} f''_{x_i x_j}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.$$

Nesunku suprasti, kad paskutinįjį diferencialą galime perrašyti ir taip

$$\mathrm{d}^2 z = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.$$

Apibrėžimas *Funkcijos $y = f(x_1, \ldots x_n)$, $k-$ os eilės diferencialas yra lygus $k-1$ eilės diferencialo, diferencialui.*

Kitaip tariant, norint rasti aukštesnės eilės diferencialą, reikia mokėti skaičiuoti žemesnės eilės diferencialus. Praktiškai susidursime tik su antros eilės diferencialais, todėl apie aukštesnės eilės diferencialus plačiau nekalbėsime.

Funkcijos $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ lokalinio maksimumo ir minimumo taškus vadinsime šios funkcijos ekstremumo taškais.

Šio skyriaus pradžioje pateiktus minimumo ir maksimumo apibrėžimus šiek tiek perfrazuokime.

Pažymėkime, $X = (x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$, $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Tad funkcijos f pilną pokytį galime perrašyti taip:

$$f(X) - f(X_0) = \Delta f(X_0).$$

Remdamiesi ekstremumo apibrėžimu galime tvirtinti, kad:

1. Jei egzistuoja laisvųjų kintamųjų pokyčiai, $\Delta x_i, i = 1, \ldots, n$ tokie, kad $\Delta f(X_0) < 0$, tai taškas (X_0) yra lokalinio maksimumo taškas;

2. Jei egzistuoja laisvųjų kintamųjų pokyčiai, $\Delta x_i, i = 1, \ldots, n$ tokie, kad $\Delta f(X_0) > 0$, tai taškas (X_0) yra lokalinio minimumo taškas.

Teorema 4. *(Būtina ekstremumo egzistavimo sąlyga dviejų kintamųjų atveju) Jeigu taškas $X_0 \in \mathbb{R}^n$ yra funkcijos $z = f(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$ lokalinio ekstremumo taškas, tai bet kokia pirmos eilės dalinė išvestinė šiame taške arba lygi nuliui arba bent viena dalinė išvestinė neegzistuoja.*

Šios teoremos įrodymas panašus į vieno kintamojo funkcijos atvejį, tereikia fiksuoti vieną iš laisvųjų kintamųjų. Tai atlikti paliekame skaitytojui.

Taškus, kuriuose dalinės išvestinės arba neegzistuoja arba yra lygios nuliui, vadinsime funkcijos kritiniais taškais.

Pateiksime keletą be įrodymo teiginių, kuriuose bus nurodytos pakankamos, ekstremumo egzistavimo sąlygos.

Visų pirma suformuluokime teoremą, kurios dėka bus galima nustatyti dviejų kintamųjų funkcijos ekstremumo taškus bei jų pobūdį.

Pažymėkime $A = z''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = z''_{yy}(x_0, y_0)$, ir $D = AC - B^2$.

Teorema 5. *Tarkime, kad taško (x_0, y_0) aplinkoje funkcija turi tolydžias dalines (iki trečios eilės imtinai) išvestines. Be to tarkime, kad taškas (x_0, y_0) yra funkcijos $z = f(x, y)$ kritinis taškas. Tada šis taškas yra funkcijos $f(x, y)$*

1. *lokalinio maksimumo taškas, jeigu $D > 0$ ir $A < 0$;*
2. *lokalinio minimumo taškas, jeigu $D > 0$ ir $A > 0$;*
3. *ekstremumo nėra, jei $D < 0$;*
4. *situacija neapibrėžta ir reikia tęsti nagrinėjimą, jeigu $D = 0$.*

Be įrodymo pateiksime daugelio kintamųjų funkcijos ekstremumo egzistavimo būtinas ir pakankamas sąlygas. Tegu $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Be to $\Delta\rho = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2}$.

Teorema 6. ***(Funkcijos, turinčios dalines išvestines, būtinos ekstremumo egzistavimo sąlygos)*** *Tarkime, kad funkcija z turi tolydžias, antros eilės dalines išvestines, kokioje nors taško $M_0 \in \mathbb{R}^n$ aplinkoje. Jei taškas M_0 yra funkcijos maksimumo taškas, tai tada egzistuoja taško aplinka $B(M_0, r)$, kad visiems $\Delta\rho \leq r$ teisinga nelygybė: $\mathrm{d}^2 z \leq 0$. Jei taškas M_0 yra funkcijos minimumo taškas, tai tada egzistuoja taško aplinka $B(M_0, r)$ tokia, kad visiems $\Delta\rho \leq r$ teisinga tokia nelygybė $\mathrm{d}^2 z \geq 0$.*

(Pakankamos ekstremumo egzistavimo sąlygos). *Tarkime, kad $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ turi tolydžias antros eilės dalines išvestines taško M_0 aplinkoje. Jeigu $\mathrm{d}f(M_0) = 0$ ir egzistuoja taško aplinka $B(M_0, r)$, kad visiems $\Delta\rho \leq r$, $\mathrm{d}^2 f(M) < 0$, tai taškas M_0 yra funkcijos lokalaus maksimumo taškas. Jeigu $\mathrm{d}f(M_0) = 0$ ir egzistuoja taško aplinka $B(M_0, r)$, kad visiems $\Delta\rho \leq r$, $\mathrm{d}^2 f(M_0) > 0$, tai taškas M_0 yra funkcijos lokalaus minimumo taškas.*

Pastebėsime, kad pateiktas ekstremumo taškų radimo, bei ekstremumo pobūdžio nustatymon metodas praktiškai taikant gana nepatogus.

Panagrinėkime pakankamas ekstremumo egzistavimo sąlygas (6 Teorema) kiek kitu būdu. Apibrėžkime keletą naujų sąvokų.

Apibrėžimas *Funkciją $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ apibrėžtą lygybe:*

$$h(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

vadinsime kvadratine forma. Kvadratinę formą vadinsime teigiamai apibrėžta, (neigiamai apibrėžta), jei $h(x) > 0$, $(h(x) < 0)$ visiems $x \in \mathbb{R}^n$.

Šios formos elementų matricą

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

vadinsime kvadratinės formos matrica. Beje, ši matrica yra simetrinė, t.y. $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j \in \{1, \ldots n\}$. Matricos A pagrindiniais minorais vadinsime tokius determinantus:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \ldots$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pasirodo, kad kvadratinė forma yra teigiamai apibrėžta, jei paskutinės matricos visi pagrindiniai minorai $A_k, \ k = 1, \dots, n$ yra teigiami. Kvadratinė forma yra neigiamai apibrėžta, jei pagrindinių minorų ženklai išsidėstę tokia seka $(-1)^k A_k > 0$, t.y. $A_1 < 0, \ A_2 > 0, \ A_3 < 0, \dots$. Kvadratinę formą vadinsime neapibrėžta, jei ši forma nei teigiamai, nei neigiamai nėra apibrėžta bei nėra lygi nuliui. Pažymėję

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

matome, kad antrasis diferencialas yra kvadratinė forma, pokyčių Δx_i atžvilgiu. Beje, šios formos matrica yra simetrinė. Nesunku pastebėti, kad daugelio kintamųjų funkcijos antrasis diferencialas taške x_0, yra kvadratinė forma kintamųjų pokyčių atžvilgiu.

Aišku, kad nustatant kritinių taškų pobūdį galime naudotis Teorema 6. Taigi, kritinis taškas bus lokalinio minimumo taškas, jei antrasis diferencialas (kvadratinė forma) šiame taške yra teigiamai apibrėžta ir taškas bus lokalinio maksimumo taškas, jei kvadratinė forma šiame taške bus neigiami apibrėžta.

Tuo atveju, kai nagrinėjamame taške kvadratinė forma neapibrėžta, tai nagrinėjamas taškas nėra ekstremumo taškas. Jei kvadratinė forma taške lygi nuliui, tai šiuo atveju reikėtų nagrinėti funkcijos pokytį šiame taške ir nustatyti ar funkcijos pokytis išlaiko pastovų ženklą‘ šio taško aplinkoje ar ne. Jei egzistuoja taško aplinka, kurioje funkcijos pokyčio ženklas nekinta, tai šis taškas yra funkcijos ekstremumo taškas, priešingu atveju- ne.

Pavyzdys Tarkime, kad maisto pramonės įmonė gamina dviejų rūšių tarkime A ir B pavadinimų varškės sūrelius. A rūšies sūrelių kintami kaštai yra 70, o $B-$ 80. Pažymėkime šių produktų kiekius q_A ir q_B atitinkamai. Sakykime, kad šių produktų pardavimai žinoma ir nustatomi tokiomis formulėmis:

$$q_A = 240(p_B - p_A), \quad q_B = 240(150 + p_A - 2p_B),$$

p_A ir p_B yra vieneto, atitinkamų produktų, pardavimo kainos centais. Tarkime, kad P yra įmonės pelnas. Nustatykime produktų pardavimo kainą, kuri maksimizuotų gaunamą įmonės pelną. Pastebėsime, kad produkto A pelnas pardavus vienetą yra $p_A - 70$, atitinkamai Bpelnas $p_b - 80$.

Turime, kad

$$P = (p_A - 70)q_A + (p_b - 80)q_B = (p_A - 70)\big(240(p_B - p_A)big) + (p_B - 80)\big(240(150 + p_A - 2p_B)\big).$$

Rasime kritinius šios funkcijos taškus. Tad skaičiuojame dalines išvestines.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial p_A} = (p_A - 70)\big(-240\big) + (p_B - p_A)240 + (p_B - 80)240 = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial p_B} = (p_A - 70)\big(-240\big) + (p_B - 80)(-2)240 + (150 + p_A - 2p_B)240 = 0. \end{cases}$$

Pertvarkę paskutiniąją sistemą gauname

$$\begin{cases} p_B - p_A - 5 = 0, \\ -2p_B + p_A + 120 = 0 \end{cases}.$$

Nesunkiai randame šios sistemos sprendinį: $p_A = 110, \ p_B = 115$.

Be to

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_A^2} = -480, \ \frac{\partial^2 P}{\partial p_B^2} = -960, \ \frac{\partial^2 P}{\partial p_A \partial p_B} = 480.$$

Remdamiesi Teorema 5 tvirtiname, kad maksimalus pelnas bus gaunamas, jei pirmojo produkto pardavimo kaina bus $p_A = 110$, o antrojo- $p_B = 115$.

Pavyzdys Raskime funkcijos $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ ekstremumo taškus bei nustatykime jų pobūdį.

Randame kritinius taškus:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - y = 0, \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą randame du kritinius taškus $M_1 = (0;0)$ ir $M_2 = (\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

Randame antrąsias išvestines, kuriomis naudodamiesi nustatysime kritinių taškų pobūdį: $a_{11}(x,y) = f''_{xx} = 6x, \quad a_{22}(x,y) = f''_{yy} = 6y, \;\; a_{12}(x,y) = f''_{xy} = -1.$

Sudarome determinantą:

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{vmatrix}.$$

$D(0;0) = 0-1 = -1$. Vadinasi kritinis taškas M_1 nėra ekstremumo taškas. Tuo tarpu $D(M_2) = 3 > 0$. Be to $a_{11}(M_2) > 0$, tad taškas M_2 yra lokalinio minimumo taškas.

$$f(M_2) = -\frac{1}{27}.$$

Mažiausių kvadratų metodas glaudžiai susijęs su daugelio kintamųjų funkcijos ekstremalių reikšmių paieškos uždaviniais. Trumpai aptarsime mažiausių kvadratų metodo esmę.

Sakykime, kad eksperimento metu reikia nustatyti dviejų dydžių, tarkime y ir x funkcinį ryšį $y = \varphi(x)$. Laikykime, kad eksperimento metu atitinkamoms n argumento x reikšmėms buvo gauta n funkcijos y reikšmių. Kitaip tariant $\varphi(x_i) = y_i, \;\; i = 1,\ldots,n$. Gautąsias taškų poras atidedame Dekarto koordinačių sistemoje. Gausime tam tikros atitikties grafiką. Kyla klausimas, kiek šios atitikties grafikas skiriasi nuo teorinės funkcijos grafiko arba kiek eksperimentinė funkcija skiriasi nuo teorinės funkcijos? Priklausomai nuo to, kaip išsidėstę eksperimentinio grafiko taškai, mes parenkame šiuos taškus aproksimuojančią funkciją. Tarkime, kad parinkome kokią nors funkciją $y = \varphi(x, a_1, \ldots, a_m)$, priklausančią nuo m parametrų. Mūsų užduotis parinkti tuos parametrus taip, kad funkcija φ kuo tiksliau atspindėtų praktinio eksperimento rezultatus. Šiai užduočiai atlikti dažnai naudojamas mažiausių kvadratų metodas. Aptarsime šio metodo esmę.

Sudarykime funkciją

$$S = S(a_1,\ldots,a_m) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - \varphi(x_i, a_1, \ldots, a_m)\big)^2.$$

Minėto metodo esmė- minimizuoti funkciją S. Kitaip tariant reikia rasti parametrų $a_1^0, \ldots a_m^0$ reikšmes taip, kad $m-$ kintamųjų funkcija S įgytų minimalią reikšmę.

Žinome, kad minimumo būtina egzistavimo sąlyga yra tokia:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \;\; i = 1,\ldots,m$$

arba

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - \varphi(x_i, a_1, \ldots, a_m)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - \varphi(x_i, a_1, \ldots, a_m)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - \varphi(x_i, a_1, \ldots, a_m)\big)\frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Turime $m-$ lygčių su m nežinomaisiais. Išsprendę šią sistemą rasime parametrų a_i reikšmes, kurios yra funkcijos $S = S(a_1, \dots, a_m)$ galimo minimumo taškai. Tuo pačiu radome pasirinkto pobūdžio funkciją, kuri geriausiai aproksimuoja praktinius duomenis.

Pavyzdys Aproksimuokime (priartinkime) praktinių duomenų funkciją tiesine funkcja $y = ax + b$. Turime, kad

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2.$$

Sudarykime (4) sistemą. Turėsime

$$\begin{cases} S'_a = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)x_i = 0, \\ S'_b = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big) = 0. \end{cases}$$

Ši sistema turi sprendinį (kodėl?). Beje, šis taškas yra minimumo taškas (kodėl?).

7.7 Sąlyginiai ekstemumai. Lagranžo daugiklių metodas

Sprendžiant taikomojo pobūdžio uždavinius dažnai tenka susidurti su daugelio kintamųjų funkcijų ekstremalių reikšmių paieška, kai funkcijos argumentai tenkina tam tikras papildomas sąlygas, kurios paprastai vadinamos *ryšio lygtimis.* Funkcijos ekstremalias reikšmes, kai funkcijos argumentai tenkina papildomas sąlygas, vadinsime *sąlyginiu funkcijos ekstremumu.* Šiame skyrelyje aptarsime šią problemą.

Suformuluokime ir aptarkime ekstremumo paieškos problemą, kai ryšio lygtyse galime išreikšti vienus nežinomuosius kitais, o po to išreikštuosius nežinomuosius įrašę į nagrinėją funkciją, mes sprendžiamą problemą transformuojame į daugelio kintamųjų funkcijos besąlyginio ekstremumo radimo uždavinį.

Tarkime, kad reikia rasti n kintamųjų funkcijos

$$u = f(x_1, \dots, x_n) \tag{5}$$

ekstremalią reikšmę, kai tenkinamos papildomos sąlygos, aprašytos tokiomis lygtimis:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad , \quad m < n. \tag{6}$$

Pažymėkime $M_0 = M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Tegu funkcijos $u = f(M)$ apibrėžimo sritis yra $G \subset \mathbb{R}^n$. Tada (6) sistemos sprendinių aibė žymėsime E, $E \subset G$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija* (5) *įgyja lokalųjį ekstremumą taške $M_0 \in E$, jeigu egzistuoja šio taško aplinka $B(\epsilon, M_0)$ tokia, kad visiems taškams $M \in B(\epsilon, M_0) \cap E$, $M \neq M_0$ ir tokiems, kad šie taškai M tenkina* (10) *ryšio lygtis, o funkcijos reikšmės tenkina vieną iš nelygybių $f(M) > f(M_0)$ arba $f(M) < f(M_0)$.*

Šiame skyrelyje mes nenagrinėsime teorinės problemos- kad galima m ryšio lygtyse m kintamųjų išreikšti likusiais n kintamaisias. Apie tai skaitytojas plačiau galėtų rasti A. Kabailos vadovėlyje 'Matematinė analizė' II d.

Tarkime, kad kokioje nors erdvės dalyje (srityje) ryšio lygtis galime pakeisti tokių funkcijų sistema:

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_2 = \phi_2(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_m = \phi_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{cases} . \tag{7}$$

Įrašę šias funkcijas į (5) gauname sudėtinę funkciją, priklausančią nuo $n-m$ kintamųjų:

$$\Phi(x_{m+1},\ldots,x_n)=f\big(x_{m+1},\ldots x_n,\phi_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\ldots,\phi_m(x_{m+1},\ldots,x_n)\big). \tag{8}$$

Kitaip tariant, sąlyginio ekstremumo problemą modifikuojame į besąlyginio ekstremumo radimo uždavinį.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

Pavyzdys Raskime funkcijos $z=x^2+y^2$ ekstremalią reikšmę, su papildoma sąlyga $x+y-1=0$.

Nagrinėjama funkcija yra apibrėžta visoje plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Mes ieškosime ekstremalios funkcijos reikšmės ne visoje plokštumoje, bet tik tiesėje $x+y-1=0$. Pastebėsime, kad paskutinėje lygtyje kintamieji y ir x siejami labai paprastu būdu. Išreiškę kintamąją, pavyzdžiui, y per x gauname, kad $y=1-x$ ir įrašę pastarąją išraišką į pradinę lygtį gauname, kad

$$z=2x^2-2x+1.$$

Šios vieno kintamojo funkcijos ekstremumo reikšmę randame lengvai, būtent, taške $x=0,5$ nagrinėjama funkcija įgyja minimumą, kuris lygus $z(0,5)=0,5$. Taigi, nagrinėjama funkcija įgyja sąlyginį minimumą plokštumos taške $(0,5,0,5)$.

Pavyzdys Raskime funkcijos $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ kritinius taškus, kai papildomos sąlygos

$$\begin{cases}2x-y=0,\\ y+z=0.\end{cases}$$

Kadangi paskutinėje sistemoje dvi lygtys ir trys nežinomieji, tad vieną nežinomąjį pasirinkę laisvuoju, kitus du galime išreikšti per pasirinktąjį. Pasirinkime laisvuoju nežinomuoju x. Tada iš sistemos gauname, kad $y=2x$, $z=-2x=:g(x)$. Įrašę gautąsias nežinomųjų išraiškas į funkcijos formulę gauname vieno kintamojo funkciją $f(x,2x,-2x)=-3x^2+4x$. Šios funkcijos išvestinė lygi $g'(x)=-6x+4$. Taigi, šios funkcijos kritinis taškas yra $\frac{2}{3}$. Vadinasi pradinės funkcijos kritinis taškas bus $(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$.

Pastebėsime, kad ne visada taip paprasta ryšio lygtyse išreikšti vienus nežinomuosius kitais, kartais netgi neįmanoma, todėl šiuo atveju praverčia kitas metodas, kuris vadinamas *Lagranžo neapibrėžtinių daugiklių metodu.*

Šio metodo esmė- kintamųjų simetrizavimas "vienodas traktavimas."

Tarkime, kad duota (5) lygtis su papildomomis sąlygomis (6). Sudarykime funkciją, siejančią pradinę funkciją ir ryšio lygtis:

$$L=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\cdots+\lambda_mF_m.$$

Šią funkciją vadinsime Lagranžo funkcija. Parinkime konstantas $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ taip, kad

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial x_n}=0.$$

Prie paskutinių lygybių prijungę ryšio lygtis gauname $n+m$ lygčių sistemą

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial x_n}=0\\ F_1=0,\ldots,F_m=0.\end{cases} \tag{9}$$

Tašką (M_0,λ_0) vadinsime kritiniu Lagranžo funkcijos tašku, jeigu

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}(M_0,\lambda_0)=0,\ldots,\frac{\partial L}{\partial x_n}(M_0,\lambda_0)=0\\ F_1(M_0)=0,\ldots,F_m(M_0)=0.\end{cases}$$

Pastebėsime, kad šioje sistemoje yra vienodas lygčių ir nežinomųjų skaičius. Taigi, spręsdami šią sistemą nustatome konstantų $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ reikšmes, bei randame kritinio taško koordinates.

Pakankamos ekstremumo radimo sąlygos. Tarkime, kad taškas M_0 tenkina (9) sistemą, t.y. minėtasis taškas yra kritinis. Laikome, kad funkcijos $f, F_1, \dots, F_m$ yra du kartus tolydžiai diferencijuojamos nagrinėjamoje srityje (pakanka taško M_0 aplinkoje). Iš Lagranžo funkcijos konstrukcijos išplaukia, kad Lagranžo funkcijos ir pradinės funkcijos f ekstremumo taškai sutampa. Vadinasi, jei prie sistemos (9) prijungsime kvadratinės formos d^2L apibrėžtumo sąlygą, galėsime nustatyti taško M_0 pobūdį. Būtent, jei $\mathrm{d}^2L(M_0, \lambda_0, \dots, \lambda_m) > 0$, tai taške M_0 funkcija u įgyja minimumą, o jei $\mathrm{d}^2L(M_0, \lambda_0, \dots, \lambda_m) < 0-$ maksimumą.

Pastebėsime, kad

$$\mathrm{d}^2L = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n + \frac{\partial}{\partial \phi_1}\mathrm{d}\phi_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial \phi_m}\mathrm{d}\phi_m\Big)^2 L +$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_1}\mathrm{d}^2\phi_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \phi_m}\mathrm{d}^2\phi_m.$$

Remdamiesi (9) sistema gauname, kad

$$\mathrm{d}^2L = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n + \frac{\partial}{\partial \phi_1}\mathrm{d}\phi_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial \phi_m}\mathrm{d}\phi_m\Big)^2 L. \tag{10}$$

Taigi, antrąjį diferencialą nagrinėjame lyg visi kintamieji $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m$ būtų laisvi, o nustatydami šio diferencialo (kvadratinės formos) apibrėžtumą mes išreikšime $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_m$ per $\mathrm{d}x_{m+1}, \dots, \mathrm{d}x_n$.

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei $\mathrm{d}^2L(M_0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_2^0)) > 0$ visoje erdvėje $\mathbb{R}^n$, tai priklausomų nežinomųjų -nepriklausomais, reikšti nereikės.

Pavyzdys Raskime funkcijos $u = x - 2y + 2z$ ekstremalią reikšmę sferoje $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sudarome Lagranžo funkciją:

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Suskaičiavę išvestines visų kintamųjų atžvilgiu gauname sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ \frac{\partial L}{\lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Išreiškę iš pirmųjų trijų sistemos lygčių nežinomuosius $x, y, z-$ nežinomuoju λ, bei įrašę pastarąsias reikšmes į paskutiniąją sistemos lygtį gauname:

$$\Big(\frac{1}{2\lambda}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 - 1 = 0.$$

Iš paskutiniosios lygties gauname:

$$\lambda_1 = 1,5, \quad \lambda_2 = -1,5.$$

Taigi, Lagranžo funkcija turi du kritinius taškus:

$$M_1 = (-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{2}) \text{ ir } M_2 = (\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{2}).$$

Pastebėję, kad

$$\mathrm{d}^2L(M_1) = 3(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) > 0, \text{ ir } \mathrm{d}^2L(M_2) = -3(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) < 0$$

visoje erdvėje $\mathbb{R}^3$ nustatome, kad M_1 yra sąlyginio min. taškas, o M_2- max. taškas. Beje

$$u_{\min}(M_1) = -3, \quad u_{\max}(M_2) = 3.$$

Pavyzdys Raskime funkcijos

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}, \text{ kai } x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0.$$

Sudarome Lagranžo funkciją:

$$L(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \lambda(x^3 + y^3 + x + y - 4).$$

Rasime stacionarius (kritinius) taškus. Skaičiuojame išvestines:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy} + \lambda(3x^2+1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = y\mathrm{e}^{xy} + \lambda(3y^2+1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0 \\ . \end{cases}$$

Pirmąją sistemos lygtį padauginę iš x, antrąją iš y ir atėmę paeiliui gauname, kad

$$\lambda(x-y)(3x^2 + 3y^2 + 3xy + 1) = 0.$$

Jei $\lambda = 0$, tai gauname, kad $x = y = 0$. Tačiau šis taškas netenkina ryšio lygčių.

Jei $\lambda \neq 0$ tai nustatome, kad $x = y$. Iš pastarųjų gauname, kad $x = y = 1$, $\lambda = -\frac{1}{4}\mathrm{e}$. Tad kritinis taškas yra toks: $(1; 1; -\frac{1}{4}\mathrm{e})$.

$$\mathrm{d}(\mathrm{e})^{xy} = (x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)\mathrm{e}^{xy}, \text{ ir } \mathrm{d}^2(\mathrm{e})^{xy} = (x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x)^2\mathrm{e}^{xy} + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{e}^{xy}.$$

Be to

$$\mathrm{d}^2(x^3 + y^3 + x + y - 4) = 6x\mathrm{d}x^2 + 6y\mathrm{d}y^2.$$

Tuomet Lagranžo funkcijos diferencialo reikšmę taške $(1, 1, -\frac{1}{4}(\mathrm{e})$

$$\mathrm{d}^2L(1; 1; -\frac{1}{4}\mathrm{e}) = \mathrm{e}\big(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{3}{2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\big).$$

Matome, kad negalima teigti, kad visoje apibrėžimo srityje antrasis diferencialas išlaiko pastovų ženklą, tad teks vieną kintamąjį išreikšti kitu. Diferencijuodami ryšio lygtį taške $x = y = 1$ gauname, kad $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$ arba $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$. Įrašę tai į antrojo diferencialo išraišką gauname, kad

$$\mathrm{d}^2L(1; 1; -\frac{1}{4}\mathrm{e}) = -5\mathrm{e}\mathrm{d}x^2.$$

Matome, kad taškas $(1; 1)$ yra sąlyginio minimumo taškas. Beje, ekstremali funkcijos reikšmė $y_{\min} = \mathrm{e}$.

Pavyzdys Raskime funkcijos

$$f(x,y,z) = xy + yz,$$

sąlyginio ekstremumo taškus, kai

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2, \end{cases} \qquad x > 0, y > 0, z > 0.$$

Šį uždavinį būtų galima spręsti Lagranžo daugiklių metodu, tačiau tuo atveju, kai ryšio lygtyse nežinomuosius galime išreikšti vienus kitais (nagrinėjamu atveju yra dvi lygtys ir trys nežinomieji, taigi laikydami vieną nežinomąjį "laisvuoju" galime du nežinomuosius išreikšti per vieną) žymiai supaprastiname uždavinio sprendimą. Taigi, laikydami "laisvuoju" nežinomuoju kintamąjį y gauname, kad

$$z = 2 - y, \quad x = \sqrt{2 - y^2}.$$

Įrašę šias nežinomųjų išraiškas į pradinę funkcijos formulę gauname tokią vieno kintamojo funkciją:

$$f(x, y, z) = y\sqrt{2 - y^2} + y(2 - y) =: g(y).$$

Ieškodami šios funkcijos kritinių taškų skaičiuojame šios funkcijos išvestinę ir lyginame ją nuliui. Gauname:

$$g'(y) = \frac{2 - 2y^2 + (2 - 2y)\sqrt{2 - y^2}}{\sqrt{2 - 2y^2}} = 0.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname, kad

$$2(1 - y)(1 + y + \sqrt{2 - y^2}) = 0.$$

Kadangi $y > 0$, tai iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad $y = 1$. Taigi, funkcija $g(y)$ turi kritinį tašką $y = 1$. Nagrinėdami paskutiniąją lygybę nustatome, kad kairėje šio taško aplinkoje funkcijos išvestinė teigiama, o dešinėje- neigiama. Taigi, $y = 1$ yra funkcijos $g(y)$ lokalinio maksimumo taškas. Naudodamiesi šia y reikšme ir ryšio lygtimis, randame sąlyginį maksimumo tašką nustatome $M = (1; 1; 1)$. Beje, funkcijos reikšmė šiame taške $f(M) = 2$.

Pavyzdys Raskime funkcijos $y = f(x, y, z) = xyz$, ekstremumo taškus, kai tenkinama papildoma sąlyga:

$$xy + xz + yz = 1, \ x, y, z > 0.$$

Sudarykime Lagranžo funkciją:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 1).$$

Skaičiuojame šios funkcijos dalines išvestines visų kintamųjų atžvilgiu ir lyginame nuliui:

$$\begin{cases} F'_x = yz + \lambda(y + z) = 0, \\ F'_y = xz + \lambda(x + z) = 0, \\ F'_z = yx + \lambda(y + x) = 0, \\ F'_\lambda = yz + xy + xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Paskutiniosios sistemos pirmąją lygtį padauginę iš x, antrąją iš y, o trečiąją iš z ir sudėję visas lygtis , bei turėdami omenyje sistemos ketvirtą lygtį gauname, kad $\lambda = \frac{-3xyz}{2}$. Įrašę gautą lygybę į sistemos pirmąsias tris lygtis gauname:

$$\begin{cases} yz\big(1 - \frac{3x}{2}(y + z)\big) = 0, \\ xz\big(1 - \frac{3y}{2}(x + z)\big) = 0, \\ yx\big(1 - \frac{3z}{2}(y + x)\big) = 0. \end{cases}$$

Iš pirmųjų dviejų sistemos lygčių gauname, kad $x = y$, o iš antrosios ir trečiosios- $y = z$. iš pastarųjų lygybių ir pirmosios sistemos ketvirtos lygties gauname, kad $x = y = z = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Norint nustatyti šio taško pobūdį (min ar max,) naudojant formalius argumentus, tektų atlikti gana sudėtingą techninį darbą, t.y. nustatyti (17) kvadratinės formos apibrėžtumą. Šiuo konkrečiu atveju mums to daryti nereikės, kadangi nagrinėjama funkcija yra stačiakampio gretasienio su matmenimis x, y, z tūris. Taigi, nagrinėjamas taškas $(1; 1; 1)$ yra sąlyginio maksimumo taškas. Beje, tūrio reikšmė

$$f(1;1;1) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Pavyzdys Raskime funkcijos $y = f(x, y, z) = xyz,\ xyz \neq 0$, ekstremumo taškus, kai tenkinama papildoma sąlyga:

$$x + 2y + 3z = 36.$$

Sudarykime Lagranžo funkciją:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + 2y + 3z - 36).$$

Skaičiuojame šios funkcijos dalines išvestines visų kintamųjų atžvilgiu ir lyginame nuliui:

$$\begin{cases} F'_x = yz - \lambda = 0, \\ F'_y = xz - 2\lambda = 0, \\ F'_z = yx - 3\lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + 2y + 3z - 36 = 0. \end{cases}$$

Dalindami vieną sistemos lygtį iš kitos ir kombinuodami šiomis lygtimis gauname, kad $\lambda = 24$, o kritinis taškas šiuo atveju yra $M(12; 6; 4)$.

Randame funkcijos $F(x, y, z, 24)$ antrąjį diferencialą. Turime, kad

$$\begin{cases} F''_{xx} = 0, & F''_{xy} = z, & F''_{xz} = y, \\ F''_{yx} = z, & F''_{yy} = 0, & F''_{yz} = x, \\ F''_{zx} = y, & F''_{zy} = x, & F''_{zz} = 0. \end{cases}$$

Iš ryšio lygties gauname, kad $\mathrm{d}x = -2\mathrm{d}y - 3\mathrm{d}z$.

Tada

$$\mathrm{d}^2F(x, y, z) = 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2z(-2\mathrm{d}y^2 - 3\mathrm{d}z\mathrm{d}y) + 2y(-2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 3\mathrm{d}z^2) + 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Suskaičiavę antrojo diferencialo reikšmę taške $M(12; 6; 4)$ gauname, kad

$$\mathrm{d}^2F(M) = -\left((4\mathrm{d}y + 6\mathrm{d}z)^2 - 24\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right) < 0.$$

Vadinasi, kritinis taškas M yra lok max taškas.

Ekonomikoje Lagranžo metodas taikomas gana dažnai. Pastebėsime, kad Lagranžo daugikliai ekonomikoje reiškia gaminamos produkcijos kainas.

Teoriniai klausimai

1. Daugelio kintamųjų funkcijos samprata. D(f) ir E(f).
2. Sekos riba aibėje $\mathbb{R}^n$. Funkcijos riba. Tolydumas
3. Dalinės išvestinės. Išvestinių skaičiavimas remiantis apibrėžimu bei taikant formules.
4. Mišriųjų išvestinių skaičiavimas.
5. Pirmos ir antros eilės dfiferencialų skaičiavimas.
6. Daugelio kintamųjų funkcijų ekstremumų skaičiavimas. Silvestro kriterijaus taikymas.
7. Sąlyginiai ekstremumai. Lagranžo daugiklių metodas.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite bei pavaizduokite sritis, kuriose apibrėžtos pateiktos funkcijos:

$$a)\ \ f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}, \quad b)\ \ f(x, y, z) = \ln(xyz); \quad c)\ \ f(x, y) = \arcsin\frac{x}{y}$$

2. Nustatykite ar egzistuoja riba:

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{7xy}{x^2+y^2}.$$

Ats: Neegzistuoja

3. Raskite funkcijos

$$f(x,y) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2-y}$$

ribinę reikšmę tiese $y = 2x$, kai $x \to \infty$.

4. Parodykite, kad funkcijos

$$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

kartotinės ribos

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) \quad \text{ir} \quad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big)$$

neegzistuoja, bet egzistuoja riba $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

5. Raskite ribas

$$a)\ \lim_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2};\quad b)\ \lim_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}\quad c)\ \lim_{\substack{x\to+\infty,\\ y\to+\infty}} \Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)^{x^2};$$

$$d)\ \lim_{\substack{x\to 1,\\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad e)\ \lim_{\substack{x\to+\infty,\\ y\to a}} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}};$$

Ats: a) 0. b) 0. c) 0 d) $\ln 2$ e) e.

6. Patikrinkite ar funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}; & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0; & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

yra tolydi tiesės $y = 3x$ taške $(0,0)$.

7. Raskite funkcijos

$$g(r,s,t,u) = \frac{rsu}{rt^2+s^2t}$$

dalines išvestines g'_s, g'_t. Be to raskite $g'_t(0,1,1,1)$.

Ats:

$$g'_s = \frac{ru(rt-s^2)}{t(rt+s^2)^2};\quad g'_(0,1,1,1) = 0.$$

8. Raskite funkcijos visas pirmos eilės dalines išvestines, jei

$$f(x,y) = \frac{x^2+3xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ats:

$$f'_x = \frac{x^3+xy^2+3y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}};\quad f'_y = \frac{3x^3+yx^2+y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

9. Raskite pateiktų funkcijų pirmos ir antros eilės diferencialus.

$$a)\quad f(x,y) = \Big(\frac{x}{y}\Big)^{\frac{x}{y}};\quad b)\quad f(x,y) = \mathrm{e}^{xy};$$

$$c)\quad f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2};\quad d)\quad f(x,y)=\text{arctg}\frac{x+y}{1+xy}.$$

10. Raskite 9. užduotyje pateiktų funkcijų pirmo ir antros eilės diferencialų reikšmes taške $(1,1)$, $(0,1)$, atitinkančius pokyčius $\Delta x=0,1$, $\Delta y=0,2$.

11. Raskite pateiktų funkcijų kritinius taškus, bei nustatykite jų pobūdį:

$$a)\quad fx,y=x^2+y^2-5x+4y+xy,\quad b)\quad f(x,y)=2x^3+y^3+1.5y^2-12x-90y.$$

$$c)\quad f(x,y)=y^2-x^2,\quad d)\quad f(x,y,z)=2x^2+y^2+xy-z(x+y-200)+100.$$

Ats: a) $(14/3;-13/3)-min.$, b) $(2;5)$, $(2;-6)$, $(-1;5),(-1;-6)$.
c) $(0;0)-$ kritinis, bet ne ekstremumo. $d) kritinis,\ bet\ ne\ ekstremumo.$

12. Raskite funkcijų sąlyginio ekstremumo taškus, naudodami Lagranžo metodą:

$$a)\quad f(x,y,z)=3x-y+6,\quad \text{kai}\quad x^2+y^2=4.$$

$$b)\quad f(x,y,z)=xyz,\quad \text{kai}\quad x+2y^2+3z=36.$$

c) Įmonė gaminanti 200 vienetų produkcijos nori šių produktų gamybą paskirstyti A ir B įmonėms. Pažymėkime q_1 ir q_2 hipoteninius šių įmonnių gaminamos produkcijos kiekius. Be to tarkime kad bendrieji kaštai yra tokie:

$$c=f(q_1,q_2)=2q_1^2+q_1q_2+q_2^2+200.$$

Nustatykite kaip reikėtų paskirstyti gamybą, kad bendrieji kaštai būtų minimalūs?

Ats:
a) kritiniai taškai: $(\frac{3\sqrt{10}}{5},\ -\frac{\sqrt{10}}{5});(-\frac{3\sqrt{10}}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5})$.
b) kritinis taškas: $(12,6,4)$.
c) $q_1=50,\quad q_2=150$.

13. Raskite funkcijų sąlyginio ekstremumo taškus, naudodami Lagranžo metodą:

$$a)\quad f(x,y,z)=xy+zy,\quad \text{kai}\quad x^2+y^2=8,\ \ yz=8;$$

$$b)\quad f(x,y,z)=xyz,\quad \text{kai}\quad x+y+z=12,\ \ x+y-z=0;$$

$$c)\quad f(x,y,z)=x^2+xy+2y^2+z^2,\quad \text{kai}\ \ x-3y-4z=16;$$

$$d)\quad f(x,y,z,u)=2x^2+2y^2+3z^2-4u^2,\quad \text{kai}\ \ 4x-8y+6z+16u=6.$$

$$e)\quad f(x,y)=x^2+12xy+2y^2,\quad \text{kai}\quad 4x^2+y^2=25.$$

$$f)\quad f(x,y,z)=x-2y+2z,\quad \text{kai}\quad x^2+y^2+z^2=1.$$

Ats:
a) kritiniai taškai: $(2,2,4)$; $(2,-2,-4)$; $(-2,2,4)$; $(-2,-2,-4)$; b)
b) $(3,3,6)$;
c) $(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3})$;
d) $(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{8}{3})$;
e) $z_{\max}=106\frac{1}{4},(\pm\frac{3}{2},\pm4)$; $z_{\min}=-50$, kai, $(\pm2,\pm3)$.
f) $f_{\max}=3$, kai, $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$; $f_{\min}=-3$, kai, $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$.

14. Įmonė 200 vienetų produkcijos nori paskirtyti dviems dukterinėms įmonėms I1 ir I2. Tarkime, kad įmonė I1 gamins q_1 produktų skaičių, o įmonė I2- q_2. Bendri gamybos kaštai yra nusakyti lygtimi $c = 2q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2 + 200$. Kaip turi būti paskirtyta gamyba, kad gamybos kaštai būtų minimalūs?

Ats: $q_1 = 50$; $q_2 = 150$.

15. Tarkime, kad $P = f(l, k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$ yra firmos gamybinė funkcija, čia l, k yra dviejų rūšių žaliavų kiekiai, $P-$ produkcijos kiekis. Raskite k, l, kurie maksimizuotų gamybos apimtis.

Ats:$k = 24,\ l = 14$.

16. Tarkime, kad firmos gamybinė funkcija yra tokia:

$$f(l, k) = 12l + 20k - l^2 - 2k^2.$$

Be to duota biudžeto lygtis: $4l + 8k = 88$. Raskite maksimalią gamybos apimtį esant nurodytai biudžeto lygčiai.

Ats: $P = 74$.

17. Duota duomenų lentelė:

x	2	3	4.5	5.5	7	
y	3	6	8	10	11	

Naudodami mažiausių kvadratų metodą raskite "geriausiai" aproksimuojančią šiuos duomenis tiesę.

Ats: $y = 0.65 + 1.58x$.

18. Žemiau pateiktoje lentelėje yra nurodytas ryšys tarp produkto vieneto kainos ir parduotų, per tam tikrą laikotarpį, produktų skaičiaus. Mažiausių kvadratų metodu raskite regresijos tiesę, kuri nurodytų priklausomybę $q(p)$.

p	10	30	40	50	60	70	
q	70	68	63	50	46	32	

Ats: $q = 82.6 - 0.641p$

19. Tegu $\bar{c}$ yra vidutiniai kaštai (tam tikra valiuta), o q produkcijos kiekis šimtais vienetų:

q	2	4	6	8	10	
$\bar{c}$	7.9	7	6.2	5.5	5	

Raskite regresijos lygtį, kurioje būtų nurodyta vidutinių kaštų priklausomybė nuo pagamintos produkcijos kiekio. Be to raskite kaštus, jei produkcijos kiekis lygus 5.

Ats: $\bar{c} = 8.51 - 0.365q$; $\quad \bar{c}(5) \approx 6.685$.

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Raskite bei pavaizduokite sritis, kuriose apibrėžtos pateiktos funkcijos:

$$a)\quad f(x,y)=\sqrt{4+x^2}+\sqrt{16-y^2},\quad b)\quad f(x,y,z)=\mathrm{arctg}(xyz);\quad c)\quad f(x,y)=\ln\frac{x}{y}$$

2. Raskite nurodytą ribą, kai x ir y artėja link taško $(0,0)$ a) tiese $y=-2x$; b) parabole $y=2x-4x^2$.

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+xy}.$$

3. Raskite $f'_x(x,1)$, $f'_y(1,1)$, remdamiesi dalinės išvestinės apibrėžimu, kai

$$f(x,y)=y^2\sin(x+y^2).$$

4. Raskite $f'_x(x,1)$, $f'_y(1,1)$, jeigu

$$f(x,y)=(x+(y-1))\mathrm{arcsin}(\frac{x}{y+x}).$$

5. Raskite funkcijos

$$g(r,s,t,u)=\mathrm{e}^{\frac{r^s+u^r}{rt^2+s^2t}}$$

dalines išvestines g'_s, g'_t. Be to raskite $dg(1,0,1,1)$.

6. Raskite funkcijos visas pirmos ir antros eilės dalines išvestines, jei

$$f(x,y)=(x^2+y^3+xy^2)\mathrm{e}^{(x^2+yx)}$$

7. Tarkime, kad duota funkcija

$$P=Al^{\alpha}k^{\beta},$$

čia $A\in\mathbb{R}$ ir $\alpha+\beta=1$. Funkcija P yra $Kobo-Duglo$ funkcijos atskiras atvejis. Įrodykite, kad

$$lP'_l+kP'_k=P.$$

8. Raskite pateiktų funkcijų pirmos ir antros eilės diferencialus, bei suskaičiuokite diferencialų reikšmes taške (1, 3), kai $\Delta x=0,04$ ir $\Delta y=0,03$.

$$a)\quad f(x,y)=x^2y+y^3x+\sin(x+4y^3);\quad b)\quad f(x,y)=(x^4+y^4)\mathrm{arctg}(xy);$$

$$c)\quad f(x,y,z)=z^2\cos x^2+y^2+x^2y;\ \text{ kai }\begin{cases}x=s+4t,\\ y=6s-\ln t\\ z=t^3+s\end{cases},\quad s=0,t=1.$$

9. Nustatykite ar produktai A ir B yra konkuruojantys, papildantys ar kitaip susiję, jei paklausa pateikta tokiais sąryšiais:

$$q_A=\frac{100}{(p_A^2+4)\sqrt{p_B^2+p_B+3}},\qquad q_B=\frac{100}{(p_B+6)\sqrt[3]{p_B^2+p_B+4}}.$$

10. Raskite pateiktų funkcijų kritinius taškus, bei nustatykite jų pobūdį:

$$a)\quad fx,y=(x-y)(y-3)(x+y-3),\quad b)\quad f(x,y)=x^3+y^3+3y^2-7y+7x.$$

12. Raskite funkcijų sąlyginio ekstremumo taškus, naudodami Lagranžo metodą bei nustatykite šių taškų pobūdį:

$$a) \quad f(x,y,z) = xyz^2, \quad \text{kai} \quad x - y + z = 20.$$

$$b) \quad f(x,y,z) = xyz, \quad \text{kai} \quad x + y + z = 12, \ \ x + y - z = 0.$$

12. Raskite funkcijų sąlyginio ekstremumo taškus, naudodami eliminavimo metodą bei nustatykite šių taškų pobūdį:

$$a) \quad f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \text{kai} \ \ x - 3y - 4z = 10;$$

$$b) \quad f(x,y,z,u) = x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 6u^2, \quad \text{kai} \ \ 2x - 3y + 6z + u = 8.$$

13. Firma valdanti du fabrikus A ir B, 1400 vienetų produkcijos norėtų paskirstyti dviems šioms įmonėms. Tarkime, kad įmonė A gamins q_1 produktų skaičių, o įmonė B- q_2. Bendri gamybos kaštai yra apibrėžti lygtimi $c = 3q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2$. Kaip turi būti paskirstyta gamyba, kad gamybos kaštai būtų minimalūs?

14. Tarkime, kad $P = f(l,k) = 1,08l^2 - 0,03l^3 + 1,68k^2 - 0,08k^3$ yra firmos gamybinė funkcija, čia l, k yra dviejų rūšių žaliavų kiekiai, $P-$ produkcijos kiekis. Raskite k, l, kurie maksimizuotų gamybos apimtis.

15. Tarkime, kad firmos gamybinė funkcija yra tokia:

$$f(l,k) = 60k + 30l - 2k^2 - 3l^2.$$

Be to duota biudžeto lygtis: $2k + 3l = 44$. Raskite maksimalią gamybos apimtį esant nurodytai biudžeto lygčiai.

16. Duota duomenų lentelė, kurioje nurodyti metai ir firmos paimta paskola nurodytais metais:

metai	2003	2004	2005	2006	2007	2008	
paskola	15	22	21	27	26	34	

Naudodami mažiausių kvadratų metodą raskite "geriausiai" aproksimuojančią šiuos duomenis, tiesę. Pateikite prognozę, kokios išlaidos bus 2012?

17. Tegu $\bar{c}$ yra vidutiniai kaštai, o q produkcijos kiekis:

q	3	4	5	9	10	
$\bar{c}$	4	6	7	6	5	

Raskite kvadratinės regresijos lygtį, kurioje būtų nurodyta vidutinių kaštų priklausomybė nuo pagamintos produkcijos kiekio. Be to raskite kaštus, jei produkcijos kiekis lygus 7.