VI. TOLYDŽIŲ IR DIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIJŲ TEOREMOS

6.1 Teoremos apie tolydžių funkcijų tarpines reikšmes

Skaitytojui priminsime, kad nagrinėdami realiųjų skaičių savybes atkreipėme dėmesį į tokią šios aibės elementų savybę: kokie bebūtų du realieji skaičiai, visuomet galima nurodyti trečią, esantį tarp šių skaičių. Natūralu tikėtis, kad ir tolydi funkcija, turi panašią savybę, t.y. jei parinksime dvi tolydžios funkcijos reikšmes tai ir visi skaičiai, esantys tarp šių dviejų funkcijos reikšmių, yra tos pačios funkcijos reikšmės.

Tarkime, kad $\delta > 0$. Primename, kad taško x_0 *delta* aplinka vadinsime tokį atvirą intervalą: $V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Taško x_0 dešiniąja delta aplinka vadinsime intervalą $V_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$. Taško x_0 *kairiąja delta* aplinka vadinsime intervalą $V_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$.

Teorema 1. *Tarkime, kad funkcija yra tolydi taške x_0 ir $f(x_0) \neq 0$. Tada egzistuoja taško x_0 aplinka $V_\delta(x_0)$ tokia, kad visiems $x \in V_\delta(x_0)$ funkcijos reikšmės nelygios nuliui ir šios funkcijos reikšmės turi tą patį ženklą kaip ir $f(x_0)$.*

$\ominus$

Funkcija yra tolydi taške x_0, todėl egzistuoja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b = f(x_0) \neq 0$. Kitaip tariant, bet kokiam $\epsilon > 0$ egzistuoja $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tokie, kad

$$b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon, \text{ jei tik } \quad x \in V_\delta(x_0). \tag{1}$$

Pastebėsime, kad ϵ galime parinkti laisvai, todėl nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $\epsilon < |b|$. Taip parinkus ϵ gauname, kad skaičiai $b - \epsilon, b + \epsilon, b$ bus vienodo ženklo, todėl iš (1) nelygybių išplaukia, kad $f(x)$ reikšmės nurodytoje taško aplinkoje bus tokio paties ženklo kaip ir skaičiaus $b = f(x)$.

$\oplus$

Teorema 2. *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$ ir be to $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$. Jei $f(a)$ ir $f(b)$ nelygios nuliui, tai egzistuoja intervale (a, b) taškas x_0 toks, kad $f(x_0) = 0$.*

$\ominus$

Tarkime, kad $f(a) < 0$, o $f(b) > 0$. Pastebėkime, kad aibė $\{x \in [a, b]; f(x) < 0\}$ netuščia ir aprėžta iš viršaus. Taigi, egzistuoja šios aibės tikslus viršutinis rėžis, tarkime M_0. Atkreipsime dėmesį, kad $M_0 \in (a, b)$. Kadangi funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale (a, b), tai išplaukia, kad egzistuoja taško x_0 dešinioji aplinka, kurioje $f(x) < 0$ ir taško b kairioji aplinka, kurioje $f(x) > 0$. Tarkime, kad neegzistuoja tokio taško ψ, kad $f(\psi) = 0$. Bet tuomet remdamiesi 5.1 teorema galime tvirtinti, kad egzistuoja taško ψ delta aplinka, kurioje funkcijos $f(x)$ reikšmės būtų to paties ženklo. Tačiau tai neįmanoma, kadangi iš tikslaus viršutiniojo rėžio apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja bent vienas intervalo $(\psi - \delta < x \leq \psi)$ taškas x_0, kuriam $f(x_0) < 0$, o visiems kitiems intervalo taškams x, $f(x) \geq 0$. Taigi gavome prieštaravimą. Vadinasi $f(\psi) = 0$.

Teorema 3. *Tarkime, kad $f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$. Tegu $f(a) = A$, $f(b) = B$. Tegu C bet koks taškas, tenkinantis nelygybę: $A < C < B$. Tada egzistuoja taškas $\psi \in [a, b]$ toks, kad $f(\psi) = C$.*

$\ominus$

Tarkime, kad $A \neq B$ ir $C \neq A$. Apibrėžkime $\gamma(x) = f(x) - C$. Ši funkcija yra tolydi intervale $[a, b]$. Be to ši funkcija intervalo galuose įgyja skirtingų ženklų reikšmes:

$$g(a) = A - C < 0 \text{ ir } \quad g(b) = B - C > 0.$$

Remdamiesi 2 teorema gauname, kad egzistuoja $\psi \in [a, b]$ toks, kad $g(\psi) = 0$. Taigi $f(\psi) - C = 0$ ir $f(\psi) = 0$.

$\oplus$

Teorema 4. *Tolydi uždarame intervale funkcija yra aprėžta ir be to šio intervalo taškuose įgyja savo didžiausią ir mažiausią reikšmes.*

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ didėja (mažėja) taške x_0, jeigu egzistuoja taško x_0 aplinka $V_\delta(x_0)$ tokia, kad visiems $x < y; x, y \in V_\delta(x_0)$ $f(x) < f(y)(f(x) > f(y))$. Sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ didėja (mažėja) intervale (a, b), jeigu ši funkcija didėja (mažėja) visuose šio intervalo taškuose.*

Sakoma, kad funkcija $f(x)$ nemažėja (nedidėja) intervale (a, b), jeigu visiems šio intervalo taškams tenkinantiems nelygybę $x_1 < x_2$ gauname, kad atitinkamos funkcijos reikšmės tenkina nelygybę $f(x_1) \leq f(x_2)(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Teisinga tokia teorema:

Teorema 5. *Jei funkcija f(x) diferencijuojama taške x_0 ir $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, tai ši funkcija didėja (mažėja) taške x_0.*

$\ominus$

Įrodysime vieną atvejį, t.y. kai $f'(x_0) < 0$, kitą atvejį paliekame įrodyti skaitytojui.

Naudodamiesi išvestinės apibrėžimu galime užrašyti

$$f'(x_0) - \epsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \epsilon, \quad \text{kai} \ \ 0 < |x - x_0| < \delta. \tag{2}$$

Beje, kadangi $\epsilon > 0$ bet koks, laisvai pasirinktas mažas skaičius, tai parinkime $\epsilon > 0$ tokį, kad $|f'(x_0)| > \epsilon$. Iš (2) nelygybės išplaukia, kad

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \quad \text{kai} \ \ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Iš paskutiniųjų sąryšių išplaukia, kad funkcija $f(x)$ mažėja taške x_0.

$\oplus$

Pastebėsime, kad sąlyga '*išvestinė* yra teigiama (neigiama)' yra pakankama funkcijos didėjimo sąlyga, tačiau nebūtina. Pavyzdžiui, funkcija $y = x^5$ yra didėjanti taške $x = 0$, tačiau išvestinė šiame taške nėra teigiama.

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ turi lokalinį maksimumą (minimumą) taške x_0, jeigu egzistuoja taško x_0 aplinka $V_\delta(x_0)$ tokia, kad $f(x_0) > f(x)$, $(f(x_0) < f(x))$, kai $x \in V_\delta(x_0)$. Funkcijos lokalinio maksimumo ir minimumo taškai yra vadinami lokalinio ekstremumo taškais.*

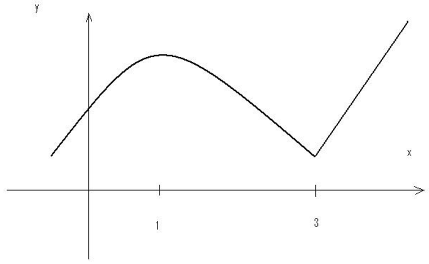
Pasirodo, kad kai kada lokalinio ekstremumo taškus galime nustatyti naudodamiesi funkcijos išvestine. Suformuluosime būtiną diferencijuojamos funkcijos išvestinės egistavimo sąlygą.

Teorema 6. *Jei funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške x_0 ir tame taške turi lokalinį ekstremumą, tai šiame taške $f'(x_0) = 0$.*

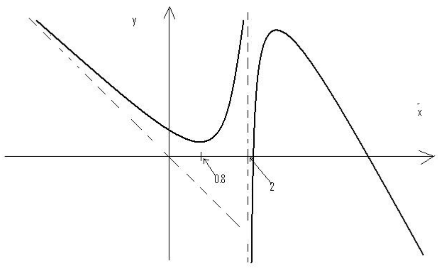
$\ominus$

Šios teoremos įrodymas yra susijęs su 5 Teorema. Pastebėsime, kad jeigu funkcija taške turi lokalinį ekstremumą, tai šiame taške funkcija nei didėja nei mažėja. Bet tuomet remiantis minėtąja teorema gauname, kad funkcija negali būti šio taško aplinkoje nei teigiama nei neigiama. Lieka vienintelė galimybė - $f'(x_0) = 0$.

Interpretuokime šį teiginį grafiškai. Matome, kad ekstremumo taškuose, kuriuose išvestinė egzistuoja (grafiškai interpretuojant, taške išvestinė egzistuoja, jei šiame taške galima nubrėžti vienintelę liestinę, o funkcijos grafiko taškas glodus, t.y. nėra "aštrus" dviejų kreivių susidūrimo taškas. Pateiktame 1 pav. taške 1 liestinė egzistuoja, o taške 3- neegzistuoja (kodėl)?



1 pav.



2 pav.

$\oplus$

Teorema 7. *(Rolio) Tarkime, kad funkcija yra tolydi intervale $[a, b]$ ir diferencijuojama intervale (a, b). Jeigu $f(a) = f(b)$, tai egzistuoja taškas $x_0 \in (a, b)$ toks, kad $f'(x_0) = 0$.*

$\ominus$

Funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$, vadinasi šiame intervale ji įgyja mažiausią ir didžiausią reikšmes. Tarkime, kad $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ ir $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Aptarkime galimus atvejus, t.y. tarkime, kad 1) $M = m$ ir 2) $M > m$. Jeigu išpildyta 1) sąlyga, tai nagrinėjamoji funkcija yra pastovi. Žinome, kad konstantos išvestinė lygi nuliui, taigi šiuo atveju teorema yra teisinga.

Tarkime, kad $M > m$. Remdamiesi tuo, kad $f(a) = f(b)$ gauname, kad bent vieną iš šių reikšmių funkcija įgyja intervalo $[a, b]$ viduje. O tai reiškia, kad intervale (a, b) funkcija įgyja ekstremumą. Kadangi funkcija diferencijuojama, tai remdamiesi 6 Teorema gauname, kad šiame ekstremumo taške išvestinės reikšmė lygi nuliui.

$\oplus$

Teorema 8. *Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra tolydžios intervale $[a, b]$ ir diferencijuojamos intervale (a, b). Be to $g'(x) \neq 0$ šiame intervale. Tada egzistuoja taškas $x_0 \in (a, b)$ toks, kad*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

$\ominus$

Pastaroji formulė yra vadinama Koši baigtinių pokyčių formule.

Visų pirma, reikėtų įsitikinti, kad sąlyga $g'(x) \neq 0$ tuo pačiu reiškia, kad $g(a) \neq g(b)$. Tarkime priešingai, t.y. $g(a) = g(b)$. Bet tada funkcija $g(x)$ tenkina visas Rolio teoremos sąlygas. Vadinasi egzistuoja taškas $x_0 \in (a, b)$ toks, kad $g'(x_0) = 0$. Bet tai prieštarauja pradinei teoremos prielaidai. Taigi, jei $g'(x) \neq 0$ intervale (a, b), tai $g(a) \neq g(b)$.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\{g(x) - g(a)\}.$$

Remdamiesi funkcijų $g(x)$ ir $f(x)$ savybėmis gauname, kad funkcija $F(x)$ yra tolydi (prisiminkite tolydžių funkcijų veiksmus). Be to funkcija $F(x)$ taip pat diferencijuojama intervale (a, b).

Pastebėkime, kad $F(a) = F(b) = 0$. Taigi, funkcija $F(x)$ išpildo visas Rolio teoremos sąlygas. Tad darome išvadą, kad egzistuoja taškas $x_0 \in (a, b)$ toks, kad $F'(x_0) = 0$. Arba

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0).$$

Kadangi $g'(x_0) \neq 0$, tai iš paskutiniosios lygybės ir gauname teoremos įrodymą.

$\oplus$

Tegu Koši baigtinių pokyčių formulėje funkcija $g(x) = x$. Šiuo atveju Koši baigtinių pokyčių formulė yra vadinama Lagranžo baigtinių pokyčių formule. T.y. Lagranžo baigtinių pokyčių formulė yra tokia:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Pastebėsime, kad dažnai Lagranžo formulę, diferencijuojamai intervale (a, b) funkcijai $f(x)$ patogu užrašyti tokiu būdu:

$$f(x) - f(x_0) = f'(u)(x - x_0), \quad x, x_0 \in (a, b), \quad u \in (x, x_0).$$

Pastaroji lygybė galima, kadangi $(x, x_0) \subset (a, b)$.

Lagranžo formulė turi nemažai taikymų. Apie tai ir kalbėsime.

Teorema 9. *(Funkcijos pastovumo požymis) Tarkime, kad funkcija yra diferencijuojama intervale* (a, b) *ir be to visiems* $x \in (a, b)$, $f'(x) = 0$. *Tada intervale* (a, b) *funkcija* $y = f(x)$ *yra pastovi.*

$\ominus$

Tarkime, kad $x_0 < x$, $x_0, x \in (a, b)$ du intervalo taškai, tik pirmasis fiksuotas, o antrasis bet koks, laisvai pasirenkamas. Tada $(x_0, x) \subset (a, b)$. Aišku, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[x_0, x]$. Tad galime taikyti Lagranžo teoremą, šiai funkcijai, intervale $[x_0, x]$. Gauname

$$f(x) - f(x_0) = f'(u)(x - x_0), \quad x, x_0 \in (a, b), \quad u \in (x, x_0).$$

Bet $f'(u) = 0$. Tad gauname, kad $f(x) = f(x_0)$. Pastaroji lygybė reiškia, kad funkcijos $f(x)$ reikšmė, bet kokiame taške x (šis taškas laisvai pasirinktas), yra lygi tam pačiam skaičiui. Taigi, funkcija yra pastovi intervale (a, b).

$\oplus$

6.2 Lopitalio taisyklė

Apibrėžimas *Sakome, kad dviejų funkcijų santykis* $f(x)/g(x)$ *, kai* $x \to a$, *yra neapibrėžtumas* $0/0(\infty/\infty)$, *jeigu*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \ (\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty)$$

Teorema 10. *(Lopitalio taisyklė)Tarkime, kad funkcijos* $f(x)$, $g(x)$ *yra diferencijuojamos kokioje nors taško* x_0 *aplinkoje* $V_\delta(x_0)$, *galbūt išskyrus šį tašką. Be to* $g'(x) \neq 0$, *kai* $x \in V_{\delta(x_0)}$. *Tegu*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Jeigu egzistuoja riba

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

tai egzistuoja ir riba

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Be to teisinga lygybė:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tarkime, kad $\{x_n\}\subset V_\delta(x_0)$ kokia nors seka, kurios riba yra taškas x_0. Turime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra tolydžios intervaluose $[x_0,x_n]$ (nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $x_0<x_n$) ir diferencijuojamos šiuose intervaluose. Be to šiuose intervaluose funkcija $g'(x)\neq 0$. Taigi, intervaluose $[x_0,x_n]$, funkcijos $g(x)$ ir $f(x)$ išpildo Teoremos 8 sąlygas. Gauname, kad intervaluose $[x_0,x_n]$ egzistuoja taškai u_n, tokie, kad

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{g(x_n)-g(x_0)}=\frac{f'(u_n)}{g'(u_n)}.$$

Kadangi $f(x_0)=g(x_0)=0$, tai paskutiniąją lygybę perrašome taip:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(u_n)}{g'(u_n)}.$$

Perėję prie ribos, kai $n\to\infty$ gauname, kad $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x_0$. Iš teoremos prielaidų turime, kad dešinioji lygybės pusė egzistuoja, kai $n\to\infty$, todėl egzistuoja ir kairioji pusė. Teorema įrodyta.

$\oplus$

Pastebėsime, kad tuo atveju, kai

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$$

tai šią teoremą taip pat galime taikyti, kadangi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Matome, kad paskutiniosios lygybės dešinioji yra neapibrėžtumas 0/0.

Pavyzdys Naudodami Lopitalio taisyklę apskaičiuokime ribas.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^5-1}$$

Matome, kad po ribos ženklu esanti funkcija taške 1 turi neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Tad galime taikyti Lopitalio taisyklę. Taigi, ši riba lygi išvestinių santykio ribai:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x+5}{5x^4}=\frac{7}{4}.$$

Pavyzdys

$$\lim_{x\to 0}x\ln x.$$

Po ribos ženklu esanti funkcija netenkina Lopitalio taisyklės sąlygų, t.y. nėra neapibrėžtumas 0/ 0 arba ∞/∞. Pertvarkykime šį reiškinį tokiu būdu, kad jis tenkintų šią neapibrėžtumo savybę:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-x=0.$$

Taigi, pradinės sekos riba lygi 0.

Pavyzdys

$$\lim_{x\to 0+} x^x.$$

Ši riba taip pat nėra neapibrėžtumas, kuriam būtų galima taikyti Lopitalio taisyklę. Pertvarkykime šį reiškinį tokiu būdu:

$$\lim_{x\to 0+} \exp(x\ln x).$$

Atkeipsime dėmesį į tai, kad po eksponentės ženklu esančio reiškinio ribą esame suskaičiavę aukščiau. Remdamiesi eksponentės tolydumu gauname, kad

$$\lim_{x\to 0+} \exp(x\ln x) = \exp\big(\lim_{x\to 0+} x\ln x\big) = \mathrm{e}^0 = 1.$$

6.3 Teiloro formulė

Tarkime, kad f yra bet kokia n kartų diferencijuojama, taške x_0, funkcija. Pažymėkime

$$r_n(x) = f(x) - \Big(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big).$$

Tada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \tag{3}$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x).$$

Paskutinioji lygybė yra vadinama funkcijos $y = f(x)$ *Teiloro eilute (formule)* taško x_0 aplinkoje. Funkcija $r_n(x)$ yra vadinama (3) formulės liekamuoju nariu, o skaičiai $f^{(k)}(x_0)/k!$ yra vadinami funkcijos f Teiloro koeficientais, $k = 0, 1, \ldots$.

(3) lygybė yra- funkcijos $f(x)$ reiškimas laipsninių funkcijų sumomis, o funkcija $r_n(x)$ nurodo šio keitimo paklaidą.

Teorema 11. *Jei funkcija f yra $n+1$ kartą diferencijuojama intervale (a,b), o taškai $x, x_0,\ x > x_0$ priklauso šiam intervalui, tai egzistuoja toks taškas $\eta \in (x_0, x)$, kad*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!};$$

čia $r_n(x)-$ Teiloro formulės liekamasis narys.

$\ominus$

Pastebėsime, kad tuo atveju, kai $n = 0$, tai ši teorema sutampa su Lagranžo vidurinių reikšmių teorema.

Tarkime, kad $x > x_0$. Apibrėžkime pagalbinę funkciją $\psi : [x_0, x] \to \mathcal{R}$ tokiu būdu:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

čia $x-$ bet koks pastovus skaičius, $t \in [x_0, x]$. Kadangi f yra $n+1$ kartą diferencijuojama intervale (a,b), tai funkcijos $f, f', \ldots, f^{(n)}$ yra tolydžios šiame intervale, taigi ir funkcija ψ yra tolydi intervale $[x_0, x]$. Be to šio intervalo vidiniuose taškuose $t \in (x_0, x)$ funkcija ψ yra diferencijuojama, ir

$$\psi'(t) = -f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \ldots$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Tarkime, kad funkcija ξ, bet kokia tolydi intervale $[x_0, x]$, diferencijuojama intervale (x_0, x) ir be to $\xi'(t) \neq 0$. Tada remiantis Koši viduriniųjų reikšmių teorema gauname, kad egzistuoja taškas $\eta \in (x_0, x)$

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\xi(x) - \xi(x_0)} = \frac{\psi'(\eta)}{\xi'(\eta)}.$$

Pastebėję, kad $\psi(x) = 0$, $\psi(x_0) = r_n(x)$ ir

$$\psi'(\eta) = -\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n,$$

iš Koši teoremos gauname, kad

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(\xi(x) - \xi(x_0))\frac{1}{\xi'(\eta)}.$$

Parinkę $\xi(t) = (x-t)^{n+1}$, iš paskutiniosios lygybės gauname teoremos įrodymą.
$\oplus$

Teoremos formuluotėje esantis liekamasis narys r_n yra vadinamas *L*agranžo formos liekamuoju nariu. Praktiškai yra naudojamos ir kitokios liekamojo nario formos. Apie jas plačiau skaitytojas galėtų paskai- tyti, pvz. V. Kabailos 'Matematinės analizės' vadovėlyje.

Pateiksime kai kurių funkcijų Teiloro eilutes, taške $x_0 = 0$, kurių teisingumu siūlome įsitikinti patiems. Teiloro eilutės taške $x_0 = 0$ dar vadinamos *Makloreno eilutėmis.*

1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

2) $$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_{2n}(x),$$

3) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n+1}(x),$$

4) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1)\frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

5) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + r_n(x).$$

Jeigu funkcija $y = f(x)$ turi $n+1$ eilės išvestinę, kokiame nors atvirame intervale, tai galime užrašyti šios funkcijos Teiloro eilutę, bet kokiame šio intervalo taške. Natūraliai kyla klausimas, kokia šios eilutės liekana? Suprantama, kad jei liekana neartėja į nulį, kai $n \to \infty$, tai tokia Teiloro eilutė funkcijos neapibrėžia. Panagrinėkime funkcijos $y = e^x$ Teiloro eilutės liekamąjį narį ir nustatykime sritį, kurioje šis liekamasis narys yra nykstamas dydžis, kai $n \to \infty$.

Žinome, kad $(e^x)^{(n)} = e^x$. Tada Lagranžo formos liekamasis narys yra toks:

$$r_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1};$$

čia $0 < \xi < x$, jei $x > 0$. Beje, visais atvejais $e^\xi \leq e^{|x|}$. Taigi gauname, kad

$$|r_n(x)| \le \mathrm{e}^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

kai $n \to \infty$. T.y., bet kokiam fiksuotam $x \in \mathbb{R}$ liekamasis narys artėja į nulį. Taigi, funkcijos e^x Teiloro eilutė konverguoja bet kokiame taške.

Po šio pavyzdžio reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį, kad auksčiau pateiktos penkių funkcijų Teiloro formulės tėra formalus užrašas. Jis turi prasmę tik tiems x, kuriems liekamieji nariai yra nykstami dydžiai, kai $n \to \infty$. Apie tai plačiau galima pasiskaityti V.Kabailos vadovėlyje "Matematinė analizė." Beje skaitytojas, naudodamasis Koši arba Dalambero konvergavimo požymiais, galėtų nesunkiai rasti aukščiau pateiktų eilučių konvergavimo intervalus.

Taigi, Teiloro formulė- tai dar vienas, funkcijos aprašymo būdas. Tikimės, kad atidesnis skaitytojas pastebėjo, jog jei Teiloro eilutėje kintamąjį x pakeisime skaičiumi, tai gausime jau nagrinėtą skaitinę eilutę.

6.4 Ekstremumo taškų tyrimas. Didėjimo- mažėjimo intervalai

Teorema 12. *Diferencijuojama intervale (a, b) funkcija nemažėja (nedidėja) šiame intervale tada ir tik tada, kai visuose šio intervalo taškuose funkcijos išvestinė yra neneigiama (neteigiama).*

$\ominus$

Visų pirma tarkime, kad visuose intervalo (a, b) taškuose $f'(x) \ge 0$. Tegu $x_1 < x_2$, bet kokie šio intervalo vidiniai taškai. Kadangi $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, tai šiame intervale, taikydami Lagranžo teoremą gauname,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(u)(x_2 - x_1), \quad u \in (x_1, x_2).$$

Kadangi $f'(u) \ge 0$, o $x_2 - x_1 > 0$, tai paskutiniosios lygybės dešinioji pusė yra neneigiama. Taigi, funkcija $f(x)$ yra nemažėjanti intervale (a, b), kadangi taškai x_1, x_2 buvo bet kokie. Jeigu $f'(x) \le 0$, tai įrodymas analogiškas.

Įrodysime atvirkščią teiginį. Tarkime, kad funkcija $f(x)$ nemažėja intervale (a, b). Kadangi funkcija $f(x)$ nemažėja šiame intervale, tai ji nemažėja ir kiekviename šio intervalo taške. Remdamiesi Lagranžo teorema gauname šios teoremos įrodymą.

$\oplus$

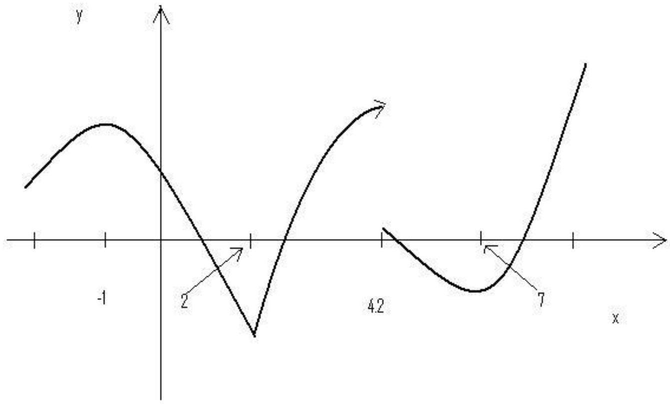
Teorema 13. *Tarkime, kad funkcijos $y = f(x)$ išvestinė yra teigiama (neigiama) visuose intervalo (a, b) taškuose. Tada visuose šio intervalo taškuose funkcija didėja.*

Šios teoremos įrodymą paliekame skaitytojui, tik pastebėsime, kad jis analogiškas prieš tai įrodytai teoremai.

Apibendrinkime auksčiau gautus rezultatus. Visų pirma tai: *j*ei funkcija yra diferencijuojama kokiame nors intervale ir šio intervalo taške x_0 turi ekstremumą, tai šiame taške išvestinė lygi nuliui. Tačiau, *j*ei funkcijos išvestinė yra lygi nuliui, tai ne būtinai šis taškas yra funkcijos ekstremumo taškas. Paprastai yra pateikiamas funkcijos $y = x^3$ pavyzdys. Taške $x_0 = 0$ šios funkcijos išvestinė yra lygi nuliui, tačiau šis taškas nėra funkcijos ekstremumo taškas. Kalbant plačiau apie ekstremumo taškus reikia pastebėti, kad taškas x_0 gali būti ekstremumo tašku ir tuo atveju, kai nagrinėjamame taške išvestinė neegzistuoja. Apibendrinant reikia pasakyti, kad funkcijos $y = f(x)$ tolydumo taškas x_0 gali būti ekstremumo tašku, jeigu šiame taške išvestinė neegzistuoja arba ji lygi nuliui. Ateityje tokius taškus vadinsime kritiniais. Aišku, kad ne visi kritiniai taškai yra ekstremumo taškai. Tačiau jeigu taškas x_0 yra ekstremumo taškas, tai tuo pačiu šis taškas yra ir kritinis. Tad trumpai aptarkime tolydžios funkcijos, ekstremumo taškų ieškojimo algoritmą.

1) Visų pirma randame tolydumo taškus, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja.

2) Nustatome, kaip šių taškų aplinkose elgiasi išvestinė, t.y. ar šios išvestinės ženklai kairioje ir dešinioje nagrinėjamo taško aplinkoje yra skirtingi. Jei taip, tai šis taškas yra ekstremumo taškas, priešingu atveju ne. Beje, taškas x_0 yra lokalinio minimumo taškas, jeigu išvestinės ženklas kairėje aplinkoje yra neigiamas, o dešinėje aplinkoje teigiamas. Lokalinio maksimumo taškui- priešingai. Pastaroji išvada išplaukia iš 5 arba 11 teoremų ir ekstremumo taško apibrėžimo. Žemiau pateiktame 3 pav. demostruojamas pavyzdys funkcijos, kuri įgyja lokalinį maksimumą taške -1, o lokalinį minimumą taškuose 2 ir 7. Pastebėsime, kad taške $4,2$ funkcija yra trūki, šis taškas yra pirmos rūšies trūkio taškas, jei šiame taške funkcijos reikšmė apibrėžta iš vienos pusės. Jei taškas nėra tolydumo taškas ir šio taško aplinkoje yra tenkinamos visus ekstremumo savybės, tai šį taip pat galėtume laikysime ekstremumo tašku. 3 pav. taškas $4,2$ yra lokalinio maksimumo taškas, o funkcija yra tolydi tik iš dešinės šiame taške. Mes nagrinėsime tik tolydžias funkcijas, todėl tokie atvejai nebus nagrinėjami.



3 pav.

Parodysime, kokias funkcijos grafiko charakteristikas "slepia" antros eilės funkcijos išvestinė.

Tarkime, kad $f'(x_1) = 0$. Be to tarkime, kad taške x_1 antroji išvestinė egzistuoja ir yra tolydi šio taško aplinkoje. Tada teisinga tokia teorema:

Teorema 14. *Tarkime, kad taške x_1 egzistuoja antroji funkcijos išvestinė ir $f''(x_1) \neq 0$. Tada nagrinėjamas taškas yra maksimumo (minimumo) taškas, jeigu $f''(x_1) < 0$ $(f''(x_1) > 0)$.*

Šią teoremą siūlome įrodyti skaitytojui.

Aptarsime didžiausios (mažiausios), tolydžios funkcijos, reikšmės uždarame intervale, radimo algoritmą. Visų pirma panagrinėkime didžiausios reikšmės radimo uždavinį. 1) Randame šios funkcijos visus lokalinio maksimumo taškus. Iš visų šių taškų išrenkame tą, kuriame funkcija įgyja pačią didžiausią reikšmę. Naudodamiesi 6.4 Teorema gauname, kad funkcija apibrėžta ir intervalo galiniuose taškuose. 2) Suskaičiuojame šios funkcijos reikšmes galiniuose taškuose. Palyginę šias reikšmes su reikšme gauta 1) dalyje išrenkame iš jų didžiausią. Tai ir bus ieškomoji, maksimali funkcijos reikšmė, duotame intervale.

Minimali funkcijos reikšmė, uždarame intervale, randama visiškai analogiškai.

6.4 Funkcijos iškilumas. Perlinkio (vingio) taškai

Apibrėžimas *S*akysime, kad funkcijos grafikas yra iškila aukštyn (žemyn) intervale (a, b) kreivė, jeigu šiame intervale visi funkcijos grafiko taškai yra po liestine (virš liestinės).

Įrodysime tokią teoremą:

Teorema 15. *Jeigu visuose intervalo (a, b) taškuose, funkcijos $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, tai šios funkcijos grafikas yra iškila aukštyn (žemyn) kreivė.*

$\ominus$ Panagrinėkime pirmąjį atvejį, t.y. tarsime, kad $f''(x) < 0$ intervale (a, b). Pasirinkime $x_0 \in (a, b)$ ir per šį tašką nubrėžkime funkcijos grafiko liestinę. Parodysime, kad šiuo atveju liestinės taškai yra ne žemiau negu funkcijos $y = f(x)$ grafiko taškai.

Jei nagrinėjame funkciją $y = f(x)$, tai šios funkcijos grafiko liestinės lygtis, taške x_0, yra tokia:

$$z(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{5}$$

Tada pradinės funkcijos ir liestinės ordinačių skirtumas yra toks:

$$y - z = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Naudodami Lagranžo teoremą, skirtumui $f(x) - f(x_0)$, paskutiniąją lygybę perrašome taip

$$y - z = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$

Dar kartą taikydami Lagranžo teoremą skirtumui $f'(\xi) - f'(x_0)$ gauname

$$y - z = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0), \ \ x_0 < \eta < \xi < x. \tag{6}$$

Turime, kad $x - x_0 > 0$ ir $\xi - x_0 > 0$, o be to $f''(\eta) < 0$. Tada iš (6) lygybės išplaukia, kad $y(x) - z(x) < 0$, intervale (a, b). Taigi, funkcijos grafikas yra žemiau negu liestinė (lyginame ordinates). Visiškai analogiškai samprotaujame, jeigu $x < x_0$. Tik šiuo atveju

$$x < \xi < \eta < x_0, \ \ x - x_0 < 0, \ \xi - x_0 < 0.$$

Remdamiesi (6) lygybe, bei teoremos prielaida $f''(x_0) < 0$ gauname, kad $y - z < 0$. Taigi ir šiuo atveju funkcijos grafikas yra žemiau liestinės.

Antroji teoremos dalis įrodoma samprotaujant visiškai analogiškai. Tai tikimės atliks skaitytojas.

$\oplus$

Apibrėžimas Taškas, kurio dešinėje ir kairėje aplinkose yra skirtingas funkcijos grafiko iškilumas, yra vadinamas grafiko perlinkio tašku.

Teorema 16. *Tegu x_0 yra funkcijos $y = f(x)$ tolydumo taškas. Tarkime, kad $f''(x_0) = 0$ arba taške x_0 antroji funkcijos išvestinė neegzistuoja. Jeigu šio taško aplinkose $V_\delta^+(x_0)$ ir $V_\delta^-(x_0)$ yra skirtingas funkcijos grafiko iškilumas, tai taškas x_0 yra funkcijos grafiko perlinkio taškas.*

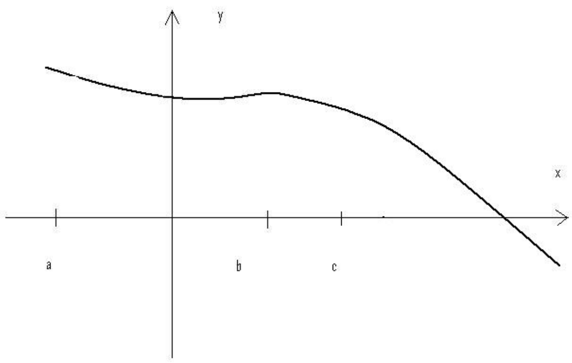
$\ominus$

Tarkime, kad $f''(x) < 0$, kai $x \in V_\delta^-(x_0)$ ir $f''(x) > 0$, kai $x \in V_\delta^+(x_0)$. Taigi, jei $x \in V_\delta^-(x_0)$ tai funkcijos grafikas iškilas aukštyn, o kai $x \in V_\delta^+(x_0)$ tai grafikas iškilas žemyn. Vadinasi taškas x_0 yra perlinkio taškas.

Tuo atveju, kai $f''(x) > 0$, kai $x \in V_\delta^-(x_0)$ ir $f''(x) < 0$, kai $x \in V_\delta^+(x_0)$, tai intervale $V_\delta^-(x_0)$ funkcija iškila žemyn, o intervale $V_\delta^+(x_0)$ iškila aukštyn. Taigi, šiuo atveju taškas x_0 taip pat perlinkio taškas.

$\oplus$

4 pav. pateiktame funkcijos grafike matome, kad intervale (a, b) funkcija yra iškila žemyn, o intervale (b, c) iškila aukštyn. Beje, taškas b yra perlinkio taškas.



4 pav.

6.5 Funkcijos grafiko asimptotės. Funkcijos tyrimo schema

Kartais tenka nagrinėti funkcijos grafikus, kai funkcijos grafiko ordinatė, argumento reikšmei artėjant prie x_0 (šis taškas gali būti ir $\pm\infty$) arba neaprėžta, arba turi kokią nors baigtinę ribą.

Apibrėžimas Tiesę $y = z(x)$ vadinsime funkcijos $y = f(x)$ grafiko asimptote (arba tiesiog funkcijos asimptote), kai $x \to \pm\infty$, $(x \to x_0)$ jeigu atstumas tarp tiesės $y = z(x)$ ir funkcijos $y = f(x)$ grafiko taškų artėja į nulį, kai $x \to \pm\infty$, $(x \to x_0)$.

Asimptotę vadinsime $v$ertikalia, jeigu ji statmena Ox ašiai, $h$orizontalia, jeigu ji statmena Oy ašiai. Likusiais atvejais asimptotę vadinsime $p$asvirąja.

Turime, kad jei funkcijos grafikas turi vertikalią asimptotę, tai bent viena lygybė yra teisinga: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. Šiuo atveju tiesė $y = x_0$ yra vertikali asimptotė.

Norint nustatyti vertikalią asimptotę, reikia nustatyti funkcijos apibrėžimo srities taškus, kurių aplinkoje funkcija yra neaprėžtai didėjanti (mažėjanti).

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ turi pasvirąją asimptotę, tegu $z = kx + b$. Rasime šios tiesės koeficientus k, b.

Iš asimptotės apibrėžimo išplaukia, kad turi būti teisinga asimptotinė lygybė:

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx - b\big) = 0. \tag{7}$$

Beje, simbolis ∞ reiškia bet kurį iš simbolių $\pm\infty$. Antra vertus, remiantis tuo pačiu apibrėžimu galime tvirtinti, kad

$$\lim_{x\to\infty} \big(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\big) = 0.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty} b/x = 0$, tai

$$\lim_{x\to\infty} \big(\frac{f(x)}{x} - k\big) = 0.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

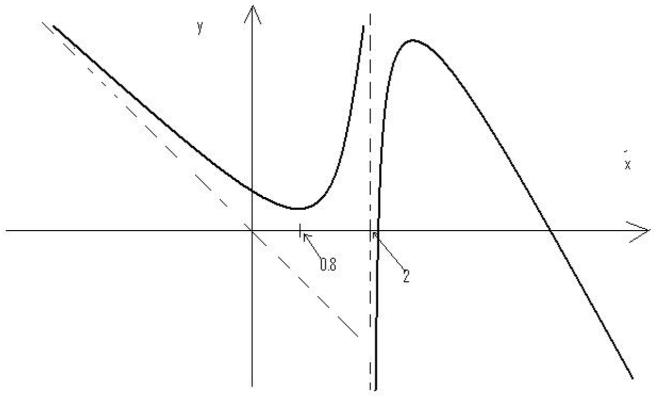
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Gavome formulę, pasvirosios asimptotės krypties koeficientui skaičiuoti. Žinodami k, iš (7) lygybės gauname, kad

$$b = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - xk\big).$$

Taigi, radome ir antrąjį pasvirosios asimptotės koeficientą.

5 pav. yra pateiktas funkcijos, kurios grafikas turi vertikaliąją asimptotę $x = 2$ ir pasvirąją $y = -x$, eskizas.



5 pav.

6.6 Funkcijos grafiko braižymas

Braižant funkcijos grafiką siūlome laikytis tokios funkcijos tyrimo schemos:

1) randame funkcijos apibrėžimo bei reikšmių sritis bei nustatome funkcijos lygiškumą;

2) randame funkcijos grafiko taškus, kuriose grafikas kerta koordinatines ašis, bei trūkio taškus;

3) funkcijos didėjimo bei mažėjimo intervalus;

4) funkcijos lokalinio minimumo ir maksimumo taškus, bei didžiausias ir mažiausias reikšmes apibrėžimo srityje, jeigu jos egzistuoja;

5) išgaubtumo intervalus, bei perlinkio taškus;

6) funkcijos grafiko asimptotes.

Remdamiesi šiais duomenimis braižome funkcijos grafiką.

Pavyzdys Remdamiesi pateikta schema ištirkime funkciją

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

1. Matome, kad šios funkcijos apibrėžimo sritį sudaro aibė $D(f) = \mathcal{R} \setminus \{-1, 1\}$. Nesunku suprasti kad ši funkcija yra lyginė. Vadinasi grafikas simetriškas koordinatinės ašies Oy atžvilgiu.

2. Jei $x = 0$, tai $y = 0$. Tad šios funkcijos grafikui priklauso koordinačių pradžios taškas. Taškai $x_1 = -1, x_2 = 1$ yra funkcijos antros rūšies trūkio taškai.

3. Šios funkcijos išvestinė

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Matome, kad taške $x_3 = 0$ išvestinė lygi nuliui. Be to šio taško aplinkoje išvestinė keičia ženklą iš $+ \to -$. Tad taškas x_3 yra lokalinio maksimumo taškas. Remiantis išvestine nustatome,kad funkcija didėja, kai $x < 0$ ir mažėja, kai $x > 0$.

4. Šios funkcijos antroji išvestinė

$$f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}.$$

Matome, kad skaitiklis visada teigiamas, tad antroji išvestinė nelygi nuliui. Todėl perlinkio taškų nėra. Kita vertus, jei $|x| < 1$, tai antroji išvestinė neigiama (šioje srityje funkcija iškila aukštyn) ir jei $|x| > 1$, tai $f''(x) > 0$, vadinasi šioje srityje funkcija iškila žemyn.

5. Funkcija turi dvi vertikalias asimptotes taškuose -1 ir 1. Beje,

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

ir

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty, \quad \lim_{x \to -1+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Nustatykime ar funkcija turi pasvirąją asimptotę. Skaičiuojame ribą:

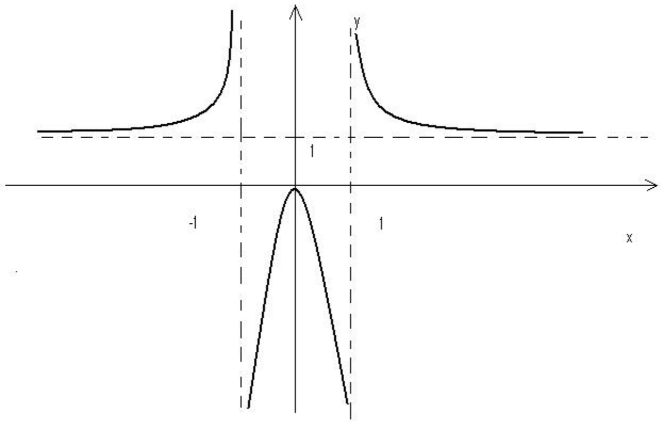
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x^2 - 1)} = 0.$$

Tad pasvirosios asimptotės krypties koeficientas $k = 0$. Skaičiuojame laisvąjį narį

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - 0x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Vadinasi egzistuoja pasviroji asimptotė $y = 1$.

Remdamiesi turimais duomenimis braižome grafiko eskizą:



6 pav.

Teoriniai klausimai

1. Rolio, Koši (Lagranžo), Lopitalio teoremos.
2. Skaičiuoti funkcijų Teiloro eilutes, vertinti liekanas.
3. Pirmos ir antros eilės išvestinės (pirmos ir antros eilės diferencialo) taikymai tiriant funkcijos bei jos grafiko ekstremumus bei išgaubtumus.
4. Tirti funkciją bei brėžti jos grafiko eskizą.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite nurodytų funkcijų didėjimo ir mažėjimo intervalus:

$$1)\quad y=\frac{2x}{1+x^2};\quad 2)\quad y=x+\sin x;\quad 3)\quad y=\cos\frac{\pi}{x};$$

$$4)\quad y=e^{-x}x^2;\quad 5)\quad y=x^2-\ln(x^2);\quad 6)\quad y=\frac{x^2}{2^x}.$$

$$7)\quad y=\frac{x^2+2x}{x+1};\quad 8\quad y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}};\quad 9)\quad y=\frac{x^2-1}{x+1}.$$

Ats: 1) mažėja, kai $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; didėja, kai $x\in(-1,1)$;

2) funkcija didėja visoje aibėje $\mathbb{R}$;
3) didėja aibėje $(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k})\cup(-\frac{1}{2k+1},-\frac{1}{2k+2}),\ k=0,1,\ldots;$
mažėja aibėje $(\frac{1}{2k+2},\frac{1}{2k+1})\cup(-\frac{1}{2k},-\frac{1}{2k+1}),\ k=0,1,\ldots;$
4) didėja aibėje $x\in(0,n)$; mažėja aibėje $x\in(n,\infty)$;
5) mažėja, kai $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$; didėja, kai $x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$;
6) mažėja, kai $x\in(-\infty,0)\cup(\frac{2}{\ln 2},\infty)$; didėja, kai $x\in(0,\frac{2}{\ln 2})$.

2. Nustatykime pateiktų funkcijų iškilumą bei perlinkio taškus:

$$1)\quad y=3x^2-x^3;\quad 2)\quad y=x+\sin x;\quad 3)\quad y=\ln(1+x^2;4)\quad y=x+x^{\frac{5}{3}};$$

Ats:

1) grafikas iškila žemyn kreivė, kai $x\in(-\infty,-1)$, iškila aukštyn kreivė- $x\in(1,\infty)$; $x=1-$ perlinkio taškas;

2) grafikas iškila aukštyn kreivė, kai $x\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi),\ k\in\mathbb{Z}$; iškila žemyn kreivė- $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}$; $x=k\pi-$ perlinkio taškai;

3) grafikas iškila aukštyn kreivė, kai $|x|<1$, iškila žemyn kreivė- $|x|>1$; $x=\pm1-$ perlinkio taškas;

4) grafikas iškila aukštyn kreivė, kai $x>0$, iškila žemyn kreivė- $x<0$; $x=0-$ perlinkio taškai;

3. Raskite nurodytų funkcijų mažiausias ir didžiausias reikšmes nurodytuose intervaluose;

$$1)\quad f(x) = x + \frac{1}{x},\ x \in [0.01, 100]\quad 2)\quad f(x) = |x^2 - 3x + 2|,\ x \in [-10, 10];$$

$$3) f(x) = \sqrt{x}\ln x,\quad x \in [1, e],\quad 4)\quad f(x) = x^2 \mathrm{e}^x,\quad x \in [1, 2].$$

Ats:
1) 2, 100.01; 2) 0, 132; 3) 1, 3.

4. Raskite funkcijų lokalinio ekstremumo taškus bei funkcijų reikšmes šiuose taškuose:

$$1)\quad y = \frac{2x}{1+x^2};\quad 2)\quad y = \sqrt{x}\ln x;\quad y = \sin x \mathrm{e}^x;\quad 4)\quad y = |x|\mathrm{e}^{-|x-1|}.$$

Ats:
1) $f(-1) = -1$, -1 lok min. taškas; $f(1) = 1$, 1 lok max. taškas; 2) $f(\mathrm{e}^2) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$, e^2- lok min. taškas. 3) Taškai $x_k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ yra lok. minimumo taškai, $f(x_k) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$; taškai $u_k = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ yra lok. maksimumo taškai, $f(u_k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. 4) $x = -1$, lok. maksimumo taškas,$f(-1) = \mathrm{e}^{-2}$; $x = 0$, lok. minimumo taškas,$f(0) = 0$; $x = 1$, lok. maksimumo taškas,$f(1) = 1$.

5. Ištirkite funkcijas ir nubraižykite jų grafikus;

$$y = \frac{x^2-1}{x^2-2x+4};\quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x;\quad y = \Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^2;\quad y = \frac{e^x}{1+x};\quad y = \frac{x^2+2}{2x+1};$$

$$y = x + 2\mathrm{arctg}x;\quad y = |e^x - 1|;\quad f(x) = \frac{1+x^2}{1-x};\quad f(x) = (x-3)\sqrt{x}\quad f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

6. Naudodami Lopitalio taisyklę apskaičiuokite ribas:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x - x}{x - \sin x};\quad 2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{ctg}x - 1}{x^2};\quad 3)\quad \lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x-a};\quad 4)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 4x)};$$

$$5)\quad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}};\quad 6)\quad \lim_{x\to 0}\{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}\};\quad 7)\quad \lim_{x\to 0+} x^x,\quad 8)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\mathrm{tg}x)^{1/3} - 1}{2\sin^2 x - 1};$$

$$9)\quad \lim_{x\to 0}\big(\frac{\sin x}{x}\big)^{\frac{1}{x^2}};\quad 10)\quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{\pi}\big(\mathrm{arccos}x\big)^{\frac{1}{x}}.$$

Ats:
1) 2; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $a^a(\ln a - 1)$; 4) 1; 5) $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$; 6) $-\frac{e}{2}$; 7) 1; 8) $\frac{1}{3}$; 9) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$; 10) $\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$.

7. Kokioms q reikšmėms elastingumo koeficientas η įgyja maksimumą, ir kokioms minimumą, jei:

$$p = 1000 - q^2.$$

Ats: 5; 30.

8. Įmonės vadybininkas pastebėjo, kad pagamintos produkcijos kiekis priklauso nuo darbuotojų skaičiaus tokiu būdu:

$$q = 80m^2 - 0,1m^4.$$

Nustatykite, koks darbuotojų skaičius turėtų dirbti įmonėje, kad būtų gaminamas maksimalus produkcijos kiekis?

Ats: 20.

9. Monopolinės įmonės produkcijos poreikių funkcija yra tokia: $p = 400 - 2q$, čia p piniginė (tarkime litais) išraiška. Tarkime, kad q produktų gamybos vidutiniai kaštai yra $\overline{c} = q + 160 + \frac{200}{q}$. Koks įmonės galimas maksimalus pelnas?

Ats: 2800

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Raskite nurodytų funkcijų didėjimo ir mažėjimo intervalus bei ekstremumo taškus. Nurodykite perlinkio taškus:

$$1)\quad y=\frac{x}{1-x^2};\quad 2)\quad y=e^{-x^2}(x+4);\quad 3)\quad y=x+\ln(x^2);\quad 4)\quad y=\frac{x^2+x}{2^{x+2}}.$$

$$5)\quad y=\frac{x^2+2x-3}{x+4};\quad 6\quad y=\frac{\ln^2 x}{x};\quad 7)\quad y=\frac{x^2-1}{x^2-9}.$$

2. Ištirkite funkcijas bei nubrėžkite šių funkcijų grafikų eskizus remdamiesi tyrimo medžiaga:

$$1)\quad y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}};\quad 2)\quad y=e^{-x}x^2;\quad 3)\quad y=x^2-\ln(x^2).$$

$$4)\quad y=\frac{x^2+2x}{x+1};\quad 5)\quad y=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}.$$

3. Tarkime, kad duotas l ilgio vielos gabalėlis. Kokių matmentų turėtų būti stačiakampis, kad jo plotas būtų didžiausias.

4. Gamykla A nutolusi nuo geležinkelio 300 kilometrų, kuris driekiasi per B miestą. Be to atstumas nuo A gamyklos iki miesto B yra 1000 kilometrų. Kokiu kampu nuo gamyklos A link geležinkelio reikėtų nutiesti kelią, kad krovinių pristatymas iš A į B būtų pats pigiausias. Žinoma, kad krovinio pervežimas magistrale 3 kartų brangesnis negu geležinkeliu.

5. Raskite trikampio $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ vidaus tašką, nuo kurio skaičiuojama atstumų iki viršūnių kvadratų suma būtų mažiausia.

6. Į stačiąją trapeciją, kurios pagrindai 24 ir 8, o aukštinė 12 įbrėžtas stačiakampis. Kokios turi būti stačiakampio kraštinės, kad stačiakampio plotas būtų didžiausias? Apskaičiuokite kiek procentų trapecijos ploto sudaro šio stačiakampio plotas.

7. Įmonės vadybininkas pastebėjo, kad pagamintos produkcijos kiekis priklauso nuo darbuotojų skaičiaus tokiu būdu:

$$q=80m^2-0,1m^4.$$

Nustatykite, koks darbuotojų skaičius turėtų dirbti įmonėje, kad būtų gaminamas maksimalus produkcijos kiekis?

8. Naudodami Lopitalio taisyklę apskaičiuokite ribas:

$$1)\quad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}};\quad 2)\quad \lim_{x\to 0}\{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}\};$$

$$3)\quad \lim_{x\to 0+}x^x,\quad 4)\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\mathrm{tg}x)^{1/3}-1}{2\sin^2 x-1};\quad 5)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

9. Reikia pagaminti stačiakampio gretasienio formos dėžutę. Dėžutės dugno plotas turi būti lygus $10dm^2$, o šoninio paviršiaus plotas- $40dm^2$. Kokie turi būti dėžutės matmenys, kad jos visų briaunų ilgių suma būtų mažiausia?

10. Monopolinės įmonės produkcijos poreikių funkcija yra tokia: $p=400-2q$, čia p piniginė (tarkime litais) išraiška. Tarkime, kad q produktų gamybos vidutiniai kaštai yra $\bar{c}=q+1600+\frac{300}{q}$. Koks įmonės galimas maksimalus pelnas?

11. Užrašykite pateiktų funkcijų Teiloro eilutes iki x^5 laipsnio (taško 0 aplinkoje) imtinai:

$$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x-1};\quad b)\ f(x)=\mathrm{e}^{3x+1};\quad c)\ f(x)=x\ln(x+1).$$