V. DIFERENCIALINIS SKAIČIAVIMAS

5.1 Išvestinė.

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra apibrėžta kokiame nors intervale $[a, b]$. Kaip paprastai, $\Delta f(x)$ vadinsime funkcijos pokyčiu taške x, atitinkančiu argumento pokytį Δx. Laikysime, kad argumento pokytis $\Delta x \neq 0$.

Apibrėžimas *Funkcijos $y = f(x)$ išvestine taške x (žymėsime $f'(x)$), vadinsime tokią santykio ribą:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

jeigu ši riba egzistuoja.

Sakysime, kad funkcija turi išvestinę intervale $(a; b)$ jei bet kokiame šio intervalo taške išvestinė egzistuoja.

Atkreipsime dėmesį, kad jei funkcija turi išvestinę, bet kokiame intervalo (a, b) taške, tai išvestinė bus kintamojo x funkcija.

Pastaba Jei funkcija turi išvestinę taške x, tai ši funkcija yra tolydi šiame taške (kodėl?).

Išvestinės samprata istoriškai susiformavo ieškant ryšio tarp materialaus taško nueito kelio ir greičio. Tarkime, kad materialus taškas juda pagal tokį dėsnį:

$$s(t) = t^2 + 2t,$$

čia t yra laikas. Tuomet santykis $\Delta s(t)/\Delta t$ reiškia vidutinį taško greitį, per laiko momentą Δt. Perėję prie ribos, kai $\Delta t \to 0$, gauname materialaus taško greitį, laiko momentu t. Kitaip tariant, taško judėjimo funkcijos išvestinė nusako greičio, bet kuriuo laiko momentu, formulę.

Pateiksime keletą ekonominių interpretacijų.

Tarkime, kad funkcija $y = R(q)$ reiškia pajamas, kurias gauna gamintojas, pagaminęs produkcijos kiekį q. Paprastai ši funkcija vadinama pajamų (revenue) funkcija. Santykis

$$\frac{\Delta R(q)}{\Delta q} = \frac{R(q + \Delta q) - R(q)}{\Delta q}$$

yra vidutinis naudingumo kitimo greitis, atitinkantis gamybos prieaugį Δq. *R*ibinėmis pajamomis (marginal revenue) vadinsime tokią santykio ribą:

$$R'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{R(q + \Delta q) - R(q)}{\Delta q}.$$

Ribinės pajamos nurodo kokios papildomos pajamos, esant gamybos apimčiai q, bus gautos pagaminus vieną papildomą produktą.

Tarkime, kad x reiškia nacionalines pajamas. Funkciją $v = h(x)$ siejančią nacionalines pajamas x su bendru vidaus vartojimu v, vadinsime *v*artojimo funkcija. Tada *r*ibiniu vartojimu (the marginal propensity to consume) vadinsime tokią santykio ribą:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}.$$

Ribinis vartojimas nurodo kaip pasikeis (keliais vienetais) nacionalinės pajamos, esant vartojimo lygiui v, jei vartojimas padidės vienu sąlyginiu vienetu.

Skirtumą $s = x - v$, s vadinsime kaupimo funkcija. Tada ribiniu kaupimu vadinsime tokią funkciją

$$s' = 1 - h'(x).$$

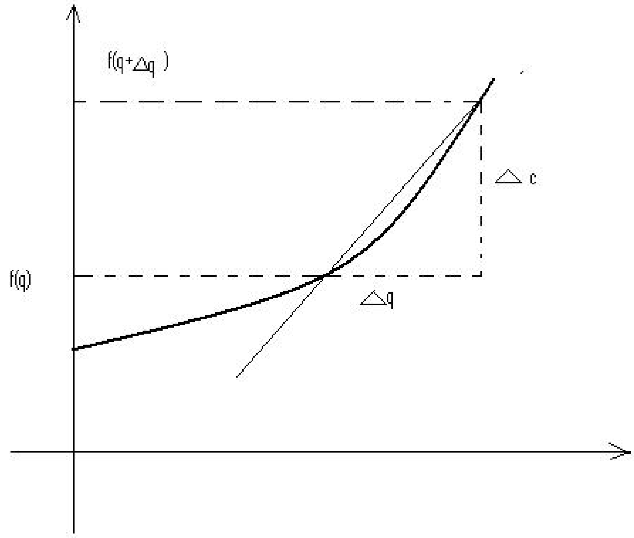
Pastarosios funkcijos dėka galime nustatyti, kaip keičiasi kaupimas, priklausomai nuo vartojimo lygio.

Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad funkcijos $y = f(x)$ išvestinė, taške x_0, yra lygi tiesės, liečiančios funkcijos $y = f(x)$ grafiką taške $(x_0, f(x_0))$, krypties koeficientui. Taigi, jei žinome funkcijos išvestinę, tai galime nurodyti liestinės, bet kokiame taške, lygtį. Tiesės lygtis, kai žinomas taškas ir krypties koeficientas yra tokia:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Analogiškai, kaip ir apibrėžėme funkcijos ribas iš dešinės ir kairės, apibrėšime funkcijos išvestines iš kairės ir dešinės.

Tarkime, kad $c = f(q)$ yra gamintojo bendrųjų kaštų (išlaidų) funkcija, čia $q-$ pagamintos produkcijos kiekis. Žemiau pateiktame 1 pav. iliustruojama bendrųjų kaštų (išlaidų) kreivė.



1 pav.

Tarkime, kad gamybos apimtį padidinome dydžiu Δq, t.y. iki lygio $q + \Delta q$. Tuomet išlaidos padidėja dydžiu $f(q + \Delta) - f(q)$. Pažymėję bendrą kaštų pokytį dydžiu Δc gauname, kad vidutiniai kaštai, produkcijos apimtį padidinus dydžiu Δq, sudaro tokį dydį:

$$\frac{\Delta c}{\Delta q} = \frac{f(q + \Delta q) - f(q)}{\Delta q}.$$

Beje šis santykis yra vadinamas vidutiniu kaštų (išlaidų) kitimo greičiu q atžvilgiu intervale $[q, q + \Delta q]$.

Tada

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta q} = c'_q$$

yra vadinama ribiniais kaštais esant gamybos apimčiai q. Tad ribiniai kaštai, esant gamybos lygiui q, reiškia papildomo produkto vieneto gamybines išlaidas, kai gamyba didinama esant gamybos apimčiai q.

Apibrėžimas *Funkcijos $y = f(x)$ dešiniąja išvestine, taške x, vadinsime santykio ribą:*

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

jei ši riba egzistuoja.

Apibrėžimas *Funkcijos $y = f(x)$ kairiąja išvestine, taške x, vadinsime santykio ribą:*

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

jeigu ši riba egzistuoja.

Kadangi išvestinė apibrėžiama ribos terminais, tai funkcijos $y = f(x)$ išvestinė taške x egzistuoja tada ir tik tada, kai $f'_+(x) = f'_-(x)$.

Pavyzdys Raskime funkcijos $y = |\sin x|$ išvestinę taške 0. Pasirodo, kad ši išvestinė minėtame taške neegzistuoja, kadangi

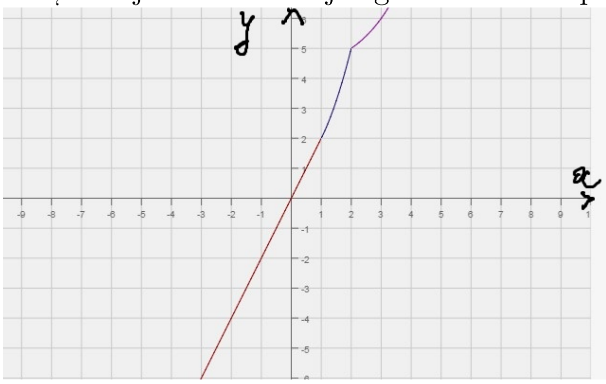
$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\sin(0+\Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\sin(0+\Delta x) - \sin 0}{\Delta x} = -1.$$

Pavyzdys Raskime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ x^2 + 1, & 1 \le x \le 2, \\ 2^{x-2} + 4, & x > 2, \end{cases}$$

išvestinę visoje realiųjų skaičių tiesėje. Šios funkcijos grafiko eskizas pateiktas pav 2.



2 pav.

Suskaičiavę funkcijos išvestinę kiekviename intervale atskirai, išskyrus intervalų galus gauname:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 2x, & 1 < x < 2, \\ 2^{x-2} \ln 2, & x > 2. \end{cases}$$

Raskime išvestinės reikšmę tolydumo taškuose $x_1 = 1$ ir $x_2 = 2$. Suskaičiavę gauname, kad $f'_-(1) = 2 = f'_+(1) = 2$. Taigi, taške x_1 išvestinė egzistuoja. Tuo tarpu $f'_-(2) = 4 \neq f'_+(2) = \ln 2$ gauname, kad išvestinė taške x_2 neegzistuoja.

Teorema 1. *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi taško x_0 aplinkoje ir be to griežtai monotoninė taško x_0 aplinkoje. Jei funkcija $y = f(x)$ turi išvestinę šio taško aplinkoje, su sąlyga $f'(x) \neq 0$, tai taško $y_0 = f(x_0)$ aplinkoje egzistuoja funkcija $f^{-1}(y)$, turinti išvestinę taške y_0, kurią galime skaičiuoti tokiu būdu:*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\ominus$

Funkcija $y = f(x)$ yra tolydi ir griežtai monotoninė taško x_0 aplinkoje, taigi funkcija yra bijekcija šioje aplinkoje todėl, remdamiesi 4 skyriaus 4 Teorema gauname, kad egzistuoja funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinė, kuri tolydi taško $y_0 = f(x_0)$ aplinkoje. Suteikime taškui y_0 argumento pokytį Δy. Šį pokytį atitinka atvirkštinės funkcijos pokytis $\Delta x \neq 0$, nes funkcija griežtai monotoniška, be to pokytis $\Delta x \to 0$, kai $\Delta y \to 0$, kadangi funkcija $x = f^{-1}(y)$ yra tolydi. Tada gauname, kad

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\oplus$

Teorema 2. *Tarkime, kad egzistuoja funkcijos $x = \psi(t)$ išvestinė taške t_0 ir funkcijos $y = f(x)$ išvestinė taške $x_0 = \psi(t_0)$. Tada egzistuoja ir sudėtinės funkcijos $f(\psi(t))$ išvestinė taške t_0, kuri skaičiuojama taip:*

$$\Big(f(\psi(t))\Big)' = f'(x_0) \cdot \psi'(t_0).$$

$\ominus$

Argumentui t suteikime pokytį $\Delta t \neq 0$. Jį atitinkantis argumento pokytis $\Delta x = \Delta\psi(t_0)$. Antra vertus, pokytis Δx indukuoja funkcijos pokytį $\Delta y = \Delta f(x_0)$. Funkcijos išvestinė taške x_0 egzistuoja, todėl teisingas sąryšis

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \alpha(\Delta x),\ \alpha \to 0,\ \text{kai } \Delta x \to 0.$$

Padalinę panariui šią lygybę iš Δt gauname

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\alpha. \tag{1}$$

Tarkime, kad $\Delta t \to 0$, o kadangi funkcija $x = \psi(t)$ tolydi nagrinėjamame taške, tai tada ir $\Delta x \to 0$. Bet tuomet ir $\alpha \to 0$, kai $\Delta t \to 0$. Tada

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \psi'(t_0).$$

Iš (1) ir paskutiniojo sąryšio išplaukia teoremos tvirtinimas.

$\oplus$

5.2 Išvestinės skaičiavimo taisyklės

Teorema 3. *Tarkime, kad egzistuoja funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ išvestinės taške x. Tada egzistuoja ir šių funkcijų sumos, skirtumos, sandaugos ir dalmens (jei daliklis nelygus nuliui) išvestinės. Be to šias išvestines galime skaičiuoti tokiu būdu:*

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x),\ \ [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ir

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ \ (g(x) \neq 0).$$

$\ominus$

1. Įrodykime pirmąją, išvestinės skaičiavimo formulę. Pažymėkime $h(x) = f(x) + g(x)$.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \big(\frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x\big)} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x} \Big) = f'(x) + g'(x).$$

2. Suskaičiuokime dviejų funkcijų sandaugos išvestinę. Pažymėkime $v(x) = f(x)g(x)$. Tada

$$v'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \Big) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x} + \frac{(g(x+\Delta x) - g(x))f(x)}{\Delta x} \Big) =$$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

3. Rasime funkcijų santykio išvestinės skaičiavimo formulę. Pažymėkime $u(x) = f(x)/g(x)$. Tada

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(f(x+\Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x g(x+\Delta x)g(x)} - \frac{(g(x+\Delta x) - g(x))f(x)}{\Delta x g(x)g(x+\Delta x)} \right) =$$

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

5.3 Elementariųjų funkcijų išvestinės

Naudodamiesi išvestinės apibrėžimu suskaičiuosime elementariųjų funkcijų išvestines.

Visų pirma pastebėsime, kad konstantos išvestinė yra lygi nuliui. Turime, $y = c$. Skaičiuokime

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Apskaičiuokime funkcijos $y = \sin x$ išvestinę.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = \cos x.$$

Skaitytojui siūlome įrodyti, kad $(\cos x)' = -\sin x$. Beje, įrodymas analogiškas paskutiniąjam.

Panagrinėkime funkciją $y = \mathrm{tg} x = \sin x / \cos x$. Šios funkcijos išvestinę (apibrėžimo srityje) skaičiuosime remdamiesi funkcijų santykio išvestinės formule. Turime:

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x.}$$

Visiškai analogiškai skaičiuojant nesunku parodyti, kad $(\mathrm{ctg} x)' = 1/(-\sin^2 x)$.

Nagrinėsime funkciją $y = \log_a x$. Turime, kad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Tuo atveju, kai $a = e$ gauname, kad $(\ln x)' = 1/x$.

Rasime funkcijų $\arcsin x, \arccos x, \mathrm{arctg}\, x, \mathrm{arcctg}\, c$ ir a^x išvestines, remdamiesi Teorema 1. Apskaičiuokime funkcijos $y = \arccos x$ išvestinę. Ši funkcija apibrėžta intervale $[-1, 1]$ ir šiame intervale ji turi atvirkštinę funkciją $x = \sin y$. Intervale $(-\pi/2, \pi/2)$ funkcija $\sin y$ tenkina visas 1 teoremos sąlygas, todėl jos atvirkštinė funkcija $y = \arccos x$ taip pat turi išvestinę, bet kokiame intervalo $(-1, 1)$ taške, kuri skaičiuojama taip:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Skaitytojas, samprotaudamas analogiškai, nesunkiai įrodys, kad

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Apskaičiuokime funkcijos $y = \mathrm{arctg}\, x$ išvestinę. Ši funkcija apibrėžta aibėje $\mathbb{R}$ yra atvirkštinė funkcijai $x = \mathrm{tg} y$, apibrėžtai intervale $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Kadangi funkcija $x = \mathrm{tg}\, y$ tenkina visas Teoremos 1 sąlygas, tai

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}\,^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Skaitytojui paliekame įrodyti, kad

$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Apskaičiuokime funkcijos $y = a^x$ išvestinę. Žinome, kad rodiklinė funkcija $y = a^x$ yra apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir atvirkštinė funkcijai $x = \log_a y$, apibrėžtai ir tolydžiai aibėje $y > 0$. Vadinasi funkcija $y = a^x$ tenkina Teoremos 1 sąlygas, todėl jos išvestinę skaičiuojame taip:

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Jei $a = e$, tai

$$(e^x)' = e^x.$$

Naudodamiesi Teorema 2 apskaičiuokime funkcijos $y = x^\alpha$ išvestinę, kai $\alpha \in \mathbb{R}$. Jei nekeliame papildomų apribojimų laipsniui α, tai tada šios funkcijos apibrėžimo aibė yra $(0; \infty)$. Todėl

$$\left(x^\alpha\right)' = \left(\mathrm{e}^{\alpha \ln x}\right)' = \alpha\frac{1}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Pateiksime elementariųjų funkcijų išvestinių lentelę.

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$.
4. $(\sin x)' = \cos x$.
5. $(\cos x)' = -\sin x$.
6. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
7. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
11. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Užrašykime apibendrintą lentelę, kai funkcija yra sudėtinė. Gauname, kad
1. $((f(x))^{\alpha})' = \alpha(f(x))^{\alpha-1}f'(x)$.
2. $(\log_a f(x))' = \frac{1}{f(x)\ln a}f'(x)$.
3. $(a^{f(x)})' = a^{f(x)}\ln a f'(x)$.
4. $(\sin f(x))' = f'(x)\cos f(x)$.
5. $(\cos f(x))' = -f'(x)\sin x$.
6. $(\mathrm{tg} f(x))' = \frac{f'(x)}{\cos^2 x}$.
7. $(\mathrm{ctg} f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sin^2 x}$.
8. $(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. $(\arccos f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $(\mathrm{arctg} f(x))' = \frac{f'(x)}{1+x^2}$.
11. $(\mathrm{arcctg} f(x))' = -\frac{f'(x)}{1+x^2}$.

Pastaba Aptarkime, kaip rasti sudėtinės funkcijos

$$y = \Big(f(x)\Big)^{g(x)}, \quad f(x) > 0,$$

išvestinę.

Visų pirma logaritmuojame šią funkciją. Gauname

$$\ln y = g(x)\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big).$$

Skaičiuojame abiejų reiškinio pusių išvestinę. Turime, kad

$$\frac{y'}{y} = g'(x)\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big) + g(x)\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'$$

arba

$$y' = \Big(f(x)\Big)^{g(x)}\Big(g'(x)\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big) + g(x)\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'\Big).$$

Pavyzdys Raskime funkcijos

$$y = \Big(\ln x\Big)^{x}$$

išvestinę. Logaritmuodami abi šio reiškinio lygybės puses ir skaičiuodami abiejų lygybės pusių išvestines gauname

$$\ln y = x\ln\ln x, \quad \text{ir} \quad \frac{y'}{y} = x'\ln\ln x + x(\ln\ln x)'.$$

Tada

$$y' = y\cdot(\ln\ln x + \frac{x}{x\ln x}), \quad \text{arba} \quad y = \big(\ln x\big)^{x}\Big(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\Big)$$

5.4 Aukštesnių eilių išvestinės

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi ir be to turi išvestinę taške x. Jei funkcija $y = f'(x)$ turi išvestinę taške x, tai šią išvestinę vadinsime funkcijos $y = f(x)$ antrąja išvestine ir žymėsime $y'' = y^{(2)} = \big(f'(x)\big)'$. Tarkime, kad egzistuoja funkcijos $y = f(x)$ $n-1-oji$ išvestinė taške x. Tada funkcijos $\big(f^{(n-1)}(x)\big)'$ išvestinę vadinsime funkcijos $y = f(x)$ $n-$ąja išvestine ir žymėsime $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Kai kurių funkcijų $n-$os eilės išvestines galima skaičiuoti naudojant rekurentines formules. Panagrinėkime funkciją $y = x^\alpha$. Turime, kad

$$f'(x) = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \text{ Tada } f^{(2)}(x) = (\alpha-1)\alpha x^{\alpha-2}.$$

Nesunku suprasti, kad $f^{(n)}(x) = (\alpha - n + 1)\ldots(\alpha-1)x^{\alpha-n}$.

Suskaičiuokime funkcijos $y = \sin x$ $n-$ ąją išvestinę. Turime, kad $y' = \cos x$. Skaičiuodami išvestines paeiliui gauname:

$$y^{(2)} = \sin x, \quad y^{(3)} = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x.$$

Tada, $y^{(5)} = \cos x$, ir t.t. Matome, kad $4-$ oji išvestinė yra lygi pradinei funkcijai ir t.t.. Tad apibendrindami galime rašyti:

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2}n).$$

Samprotaudami visiškai analogiškai galime parodyti, kad $y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}n)$.

Suskaičiuokime funkcijos $y = \ln x$ $n-$ąją išvestinę. Turime, kad

$$y' = 1/x. \text{ Tada } y^{(2)} = -1/x^2.$$

Nesunku suprasti, kad

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}.$$

Nagrinėsime funkciją $y = e^x$. Šios funkcijos pirmoji išvestinė lygi pradinei funkcijai. Todėl ir bet kuri aukštesnės eilės išvestinė lygi pradinei funkcijai. Taigi,

$$y^{(n)} = e^x.$$

Tarkime, kad $f(x) = u(x) + v(x)$. Aišku, kad $f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x)$. Tegu $g(x) = u(x) \cdot v(x)$. Tada teisinga Leibnico formulė sumos $n-$ ąjai išvestinei skaičiuoti. Būtent:

$$g^{(n)}(x) = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + C_n^2 u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots uv^{(n)}.$$

Pastebėsime, kad Leibnico formulės dešinioji pusė sutampa su reiškinio $(u+v)^n$ binominiu dėstiniu, tik Leibnico formulėje vietoje u ir v laipsnių parašytos atitinkamų eilių išvestinės. Įrodymas irgi analogiškas binomo formulės įrodymui, t.y. įrodydami naudojame indukcijos metodą. Tai atlikti siūlome pačiam skaitytojui.

Pateikėme kelių klasikinių funkcijų, aukštesnių išvestinių skaičiavimo, rekurentines formules. Deja, paprastai norint rasti aukštesnių eilių išvestines, tenka iš eilės skaičiuoti visas išvestines.

5.5 Funkcijos diferencialas

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške x, jei funkcijos pokytį Δy, taške x, atitinkantį argumento pokytį Δx, galima išreikšti šitaip:*

$$\Delta y = A\Delta x + \Delta x \alpha,$$

čia $A-$ koks nors skaičius, nepriklausantis nuo Δx, o $\alpha-$ nykstanti funkcija, kai $\Delta x \to 0$.

Aptarkime diferencijuojamumo sąvoką kiek detaliau. Iš apibrėžimo išplaukia, kad jei funkcija diferencijuojama, tai nedidelėje taško x aplinkoje šią funkciją, su nedidele paklaida, galime pakeisti tiesine funkcija, kurios krypties koeficientas yra skaičius A. Kalbant kitaip, funkcijos grafikas nedidelėje taško aplinkoje "panašus" į tiesinės funkcijos grafiką. Pasirodo, kad diferencijuojamumo sąvoka labai glaudžiai susijusi su išvestinės sąvoka.

Teorema 4. *Funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške x tada ir tik tada, kai funkcija šiame taške turi baigtinę išvestinę.*

$\ominus$

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške x. Laikome, kad pokytis $\Delta x \neq 0$. Tada, remdamiesi diferencijuojamumo apibrėžimu galime užrašyti, kad

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x).$$

Įrodykime atvirkštinį teiginį. T.y., tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ taške x turi išvestinę, t.y. egzistuoja ribinė reikšmė

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Remdamiesi ribos apibrėžimu, pastarąją ribinę lygybę galime perrašyti taip:

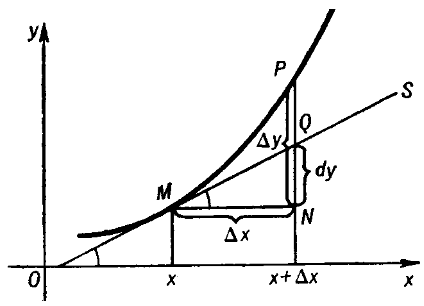
$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

čia α yra nykstamas dydis, kai $\Delta x \to 0$. Pažymėję $f'(x) = A(x)$, pastebėsime, kad $f'(x)$ nepriklauso nuo Δx, taigi, funkcija yra diferencijuojama.

$\oplus$

Remdamiesi pastarąja teorema galime tvirtinti, kad diferencijuojamumas ir išvestinės egzistavimas yra ekvivalenčios sąvokos. Taigi, galime tvirtinti, kad diferencijuojama, taške x, funkcija yra tolydi.

Tarkime, kad funkcija yra diferencijuojama. Pastebėkime, kad jei funkcija diferencijuojama taške x, tai ją galime išreikšti dviejų dėmenų suma: pirmasis dėmuo $A\Delta x$, kai $A \neq 0$, yra argumento pokyčio Δx funkcija, kuri yra tiesinė Δx atžvilgiu (pirmojo laipsnio Δx atžvilgiu), nes A nepriklauso nuo Δx taigi, yra tos pat eilės nykstama funkcija kaip ir Δx. Tuo tarpu antrasis diferencijuojamos funkcijos pokyčio narys yra aukštesnės eilės, negu Δx, nykstama funkcija, t.y. $\alpha(\Delta x)/\Delta x \to 0$, kai $\Delta x \to 0$. Funkcijos pokyčio, taške x, tiesinę dalį, Δx atžvilgiu, vadinsime funkcijos *d*iferencialu taške x, atitinkančiu argumento pokytį Δx.



3 pav.

Funkcijos diferencialą žymėsime

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

Tuo atveju, kai $A = 0$, tai laikysime, kad funkcijos diferencialas yra lygus 0. Turėdami omenyje, kad $A = f'(x)$ ir pažymėję argumento pokytį $\mathrm{d}x = \Delta x$, funkcijos diferencialą galime perrašyti taip:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x. \text{ Bet tada } \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Kokia diferencialo geometrinė prasmė? Panagrinėkime funkcijos $y = f(x)$ grafiką (žr. 3 pav.). Tarkime, kad taško M abscisė x, o taško P abscisė yra lygi $x + \Delta x$. Be to, laikome, kad liestinei priklauso taškai M, S. Tarkime, kad atkarpa MN yra lygiagreti abscisių ašiai, o atkarpa PN lygiagreti ordinačių ašiai. Brėžinyje matyti, kad taškas Q, yra liestinės MS susikirtimo su atkarpa PN taškas. Tuo tarpu pokytis Δy yra lygus atkarpos NP ilgiui. Be to, diferencialas $\mathrm{d}y$ lygus atkarpos NQ ilgiui. Beje, matome, kad diferencialas skiriasi nuo funkcijos pokyčio. Atkarpa PQ yra nykstamas dydis, priklausantis nuo Δx.

Remiantis diferencialo sąvoka galime tvirtinti, kad jei funkcija yra diferencijuojama, tai esant pokyčiui $\mathrm{d}x$ "arti " 0, funkcijos diferencialas $\mathrm{d}y$ yra "arti" funkcijos pokyčio. Kitaip tariant funkcijos pokytį galima keisti diferencialu, kuris skaičiuojamas žymiai paprasčiau negu funkcijos pokytis. Taigi

$$f(x+\mathrm{d}x)-f(x)\approx \mathrm{d}y.$$

Pavyzdys Raskime funkcijos $f(x)=\ln x$ apytikslę reikšmę taške $1,06$. Turime, kad

$$f(1+0,06)\approx f(1)+f'(x)\mathrm{d}x=\ln 1+\frac{0,06}{1}=0,06.$$

5.6 Diferencialo formos invariantiškumas

Parodysime, kad diferencialo forma

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

yra universali. T.y., ji nepriklauso nuo to ar argumentas nepriklausomas kintamasis ar yra kokio nors kintamojo, tarkime t, funkcija.

Tarkime, kad funkcija $y=f(x)$ yra diferencijuojama taške x funkcija, kurios argumentas, kintamojo t funkcija, $x=\psi(t)$. Remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės teorema turime, kad

$$y'=f'(x)\psi'(t).$$

t laikykime nepriklausomu kintamuoju. Tada funkcijų $x=\psi(t)$ ir $y=f(\psi(t))$ išvestinės, t atžvilgiu, yra tokios

$$\psi'(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \ y'=\big(f(\psi(t))\big)'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Bet tuomet iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Pastarąją lygybę padauginę iš $\mathrm{d}t$ gauname, kad

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

Taigi, gauname, kad nepriklausomai nuo to ar funkcija sudėtinė ar ne, diferencialo forma yra ta pati.

5.7 Diferencialų skaičiavimo taisyklės. Aukštesnių eilių diferencialai

Tarkime, kad $u=u(x),\ v=v(x)$. Tada

$$\mathrm{d(u\pm v)=du\pm dv,\ d(uv)=vdu+udv,\ d}\Big(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\Big)=\frac{\mathrm{vdu-udv}}{\mathrm{v}^2}.$$

Įrodykime antrąją lygybę. Remdamiesi diferencialo apibrėžimu, randame

$$\mathrm{d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=u'dxv+uv'dx=vdu+udv}.$$

Likusias diferencialo skaičiavimo taisykles siūlome skaitytojui įrodyti pačiam.

Naudodamiesi elementariųjų funkcijų išvestinių lentele, sudarykime šių funkcijų diferencialų lentelę.

1. $\mathrm{d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx}$.
2. $\mathrm{d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx}$.
3. $\mathrm{d(a^x) = a^x \ln a dx}$.
4. $\mathrm{d(\sin x) = \cos x dx}$.
5. $\mathrm{d(\cos x) = -\sin x dx}$.
6. $\mathrm{d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}}$.
7. $\mathrm{d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}}$.
8. $\mathrm{d(arcsinx) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$.
9. $\mathrm{d(arccosx) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$.
10. $\mathrm{d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}}$.
11. $\mathrm{d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}}$.

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taško x_0 aplinkoje. Tada šios funkcijos diferencialas lygus: $\mathrm{dy = y'dx}$. Taigi, diferencialas yra dviejų dydžių y' ir dx funkcija. Tarkime, kad visuose taško x_0 aplinkos taškuose pokytis dx yra tas pat. Kitaip tariant, fiksuokime argumento pokytį. Esant šioms sąlygoms apibrėžkime šio diferencialo diferencialą:

$$\mathrm{d(dy) = (y'dx)'dx = y^{(2)}dxdx = f^{(2)}(x_0)dx^2}.$$

Pažymėję $\mathrm{d^2y = d(dy)}$ ir $\mathrm{dx^2 = dxdx}$. Paskutiniąją lygybę perrašome taip:

$$\mathrm{d^2y = f^{(2)}(x_0)dx^2}.$$

Rekurentiniu būdu apibrėžkime ir bet kokios eilės diferencialą. T.y. $y = f(x)$ $n-$ os eilės diferencialu, vadinsime $n-1-$os eilės diferencialo, diferencialą. Trumpai

$$\mathrm{d(d^{(n-1)}y) = d^ny = f^{(n)}(x_0)dx^n}.$$

Paskutiniosios formulės teisingumą skaitytojui siūlome pasitikrinti naudojant indukcijos metodą.

5.8 Neišreikštinės funkcijos išvestinė

Mes nagrinėjome funkcijas, kuomet funkcijos reikšmės buvo skaičiuojamos formule $y = f(x)$. Kitaip tariant, funcija buvo pateikiama išreikšine forma. Šis funkcijos užašymo būdas vadinamas "išreikštine" funkcijos forma. Kitaip tariant funkcija pateikiama išreikštine forma, jei priklausomas kintamasis y yra išreiškiamas laisvuoju kintamuoju x.

Panagrinėkime funkcinį sąryšį pateiktą lygtimi: $y^5 + xy = 3$. Matome, kad kintamojo y negalime išreikšti x atžvilgiu. Matome, kad taškas $x = 2, y = 1$ priklauso funkcijos grafikui. Pasirodo, kad nors ir negalime rasti šios funkcijos lygties $y = f(x)$, bet galime rasti $y'(x)$. Metodas, kai yra randama funkcijos y išvestinė atžvilgiu x, kai funkcija pateikta neišreikštine forma, vadinamas neišreikštiniu diferencijavimu.

Skaičiuodami funkcijos išvestinę $y'(x)$ laikome, kad nagrinėjama funkcija yra priklausoma nuo laisvojo kintamojo x, tik mes nežinome šios priklausomybės lygties.

Pavyzdys Raskime $y'(x)$, kai $y(x)$ yra lygties

$$y^2 - xy = 0$$

sprendinys. Be to apskaičiuokime $y"(x)$.

Laikome, kad funkcija $y = f(x)$, kuri tenkina paskutiniąją lygtį, egzistuoja. Be to ši funkcija turi išvestines iki antros eilės imtinai. Diferencijuojame abi lygybės puses kintamojo x atžvilgiu. Gauname

$$2yy' - y - xy' = 0.$$

Ieškomą išvestinę randame išsprendę paskutiniąją lygtį y' atžvilgiu

$$y'(x) = \frac{y}{2y - x}.$$

Skaičiuojame antrąją išvestinę remdamiesi apibrėžimu. Gauname
$y"(x) = (y'(x))' = (\frac{y}{2y-x})' = \frac{y'(2y-x)+y(2y'-1)}{(2y-x)^2}$.
Pavyzdys Rasti $y'(2) =$, kai $y(2) = 3, ofunkcija$ y=y(x) $tenkinalygtį :$

$$y + x\ln(y - 2) = x^2 - 1.$$

Skaičiuodami abiejų pusių išvestines gauname, kad

$$y' + \ln(y - 2) + \frac{xy'}{y - 2} = 2x.$$

Įrašę duotas reikšmes gauname, kad

$$y'(2) + \ln 1 + \frac{2y'(2)}{1} = 4.$$

Iš paskutiniosios lygties gauname, kad

$$y'(2) = \frac{4}{3}.$$

Papildomas skyrius. Taikymai ekonomikoje

Tarkime, kad įmonėje dirba m darbuotojų, kurie per tam tikrą laikotarpį pagamina q vienetų produkcijos. Laikykime, kad $q = q(m)$. Tarkime, kad r yra pajamos, kurias gauna įmonė pardavusi q produkcijos vienetų. Tada $r = f(m)$. Santykis dr/dm reiškia pajamų kitimo greitį, priklausomai nuo darbuotojų skaičiaus. Antra vertus, $r = pq$, čia p produkto vieneto kaina. Be to p yra q funkcija $p = t(q)$. Vadinasi, pajamų kitimo greitį galime užrašyti taip:

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dm}} = (pq)' = p\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dm}} + q\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dm}}.$$

Be to

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dm}} = \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} \cdot \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dm}}.$$

Tokiu būdu

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dm}} = p\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dm}} + q\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}} \cdot \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dm}}$$

arba perrašę kitaip turime, kad

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dm}} = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dm}}\big(p + q\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}\big).$$

Paskutinioji išvestinė yra vadinama *r*ibiniu pajamų produktu (marginal revenue product).

Elastingumas

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra apibrėžta intervale (a, b). Tarkime, kad taške x funkcija $y = f(x)$ turi išvestinę. Tada funkcijos $y = f(x)$ elastingumu, kintamojo x atžvilgiu, vadinsime tokią santykio ribą:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\Big(\frac{\Delta y}{y}\frac{x}{\Delta x}\Big) = \frac{x}{y} \cdot f'(x).$$

Elastingumą galime interpretuoti kaip procentinį funkcijos pokytį, argumento reikšmei pakitus vienu procentu. Paprastai elastingumui nustatyti naudojami procentiniai skaičiavimai.

Pastaba Kartais tenka skaičiuoti funkcijos y elastingumą x atžvilgiu, kai duota funkcija $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Tada aukščiau užrašyta formulė bus tokia:

$$E_x(y) = \frac{g(y)}{y} \frac{1}{(f^{-1}(y))'}.$$

Tarkime, kad $y = f(x)$ yra bendrieji kaštai, atitinkantys produkcijos kiekį x. Tada kaštų elastingumas $E_x(y)$ reiškia bendrųjų kaštų procentinį kitimą, padidėjus gaminamos produkcijos kiekiui vienu procentu. Kadangi $f'(x)$ yra ribiniai kaštai, o $f(x)/x$ yra vidutiniai gamybos kaštai, tai elastingumą galime interpretuoti taip: elastingumas yra ribinių ir vidutinių kaštų santykis.

Dažnai, modeliuojant rinkos elgseną svarbu žinoti, kaip reaguoja paklausa (paklausos kiekis) į kainos pokyčius. Tarkime, kad p yra produkto kaina, o $q = f(p)-$ paklausa (paklausos kiekis), kuri yra kainos funkcija. Suskaičiavę šios funkcijos elastingumo koeficientą gauname, kad

$$E_p(q) = \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p).$$

Žinome, kad jei funkcija mažėja kokiame nors intervale, tai šiame intervale funkcijos išvestinė yra neigiama. Kad išvengti neigiamų skaičių, paprastai vietoje šio elastingumo koeficiento dažnai yra naudojamas modulis, t.y.

$$\eta := |E_p(q)|.$$

Šis koeficientas reiškia paklausos kiekio procentinį kitimą, produkto kainai pakitus vienu procentu. Laikoma, kad paklausa yra elastinga, jeigu $\eta \geq 1$, ne elastinga, jeigu $\eta < 1$.

Pavyzdys Tarkime, kad poreikių funkcija $p = f(q) = 1200 - q^2$. Randame elastingmo koeficientą (priklausantį nuo produktų kiekio):

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}} = \frac{q^2 - 1200}{2q^2}.$$

Matome, kad jei $q = 10$, tai $|E_p(10)| = \eta = 5,5$. Gauname, kad jei kainą padidinsime vienu procentu, kai produkcijos kiekis yra $10vnt.$, tai poreikis sumažės maždaug $5,5\%$.

Pavyzdys Panagrinėkime tokią poreikio funkciją: $f(q) = \frac{k}{q}, \quad k > 0$. Šios funkcijos elastingumo koeficientas yra lygus

$$\eta = |\frac{\frac{k}{q^2}}{\frac{-k}{q^2}}| = 1,$$

nepriklausomai nuo q reikšmės. Tokiu būdu apibrėžta poreikių funkcija atlieka "arbitro" vaidmenį, kadangi esant mažesnei koeficiento η reikšmei paklausa jau neelastinga.

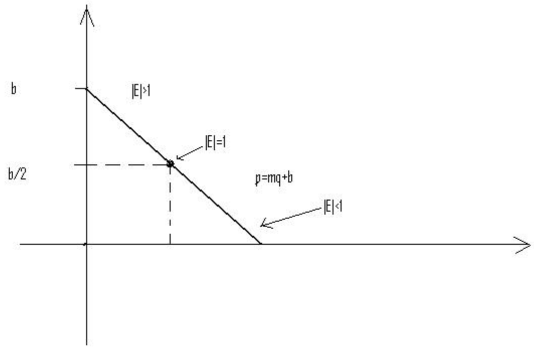
Tarkime, kad paklausa apibrėžta tiesine funkcija: $p = mq + b, \quad m < 0, \ b > 0$. Laikome kad $q > 0$ ir be to tegu $p < b$. Šios funkcijos elastingumo koeficientas yra lygus:

$$\eta = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}} = \frac{p}{mq} = \frac{p}{p-b}.$$

Panagrinėkime šį elastingumo koeficientą detaliau. Suskaičiavę išvestinę gauname, kad

$$\eta_p' = -\frac{b}{(p-b)^2}.$$

Vadinasi koeficientas yra mažėjanti funkcija, kadangi $b > 0$. Tad poreikiams augant elastingumas mažėja. Matome, kad jei $p = \frac{b}{2}$, tai $\eta = -1$. Antra vertus, jei $p < \frac{b}{2}$, tai $|\eta| < 1-$ poreikiai nėra elastingi; jei $\frac{b}{2} < p < b$, tai $|\eta| > 1$ ir poreikiai yra elastingi. Matome, kad elastingumas susijęs su paklausa ir kinta priklausomai nuo paklausos (4 pav.).



4 pav.

Panagrinėkime, kaip paklauso elastingumas įtakoja ribines pajamas. Tarkime, kad gamintojo pelnas yra $r = pq, \quad p = f(q)$. Tada ribinės pajamos esant gamybos apimčiai q yra tokios:

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} = p + q\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dq}}.$$

Tada elastingumo koeficientas

$$\eta = \frac{p\mathrm{dq}}{\mathrm{qdp}}$$

arba

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} = p(1 + \frac{1}{\eta}).$$

Matome, kad jei paklausa yra elastinga ($\eta < -1$), o tada $1 + \frac{1}{\eta} > 0$. Je ne elastinga, tai $1 + \frac{1}{\eta} < 0$. Natūralu laikyti, kad $p > 0$. Tada $r'_q > 0$ intervale, kuriame paklausa yra elastinga, o šiuo atveju bendrosios pajamos auga. Kita vertus intervale, kur paklausa ne elastinga, ribinės pajamos yra neigiamos, taigi šiame intervale bendrosios pajamos mažėja.

Apibendrinkime. Vadinasi jei paklausa elastinga, tai žemiausi kaina didins pajamas. Taigi žemiausia kaina šiuo atveju didina paklausą, o tuo pačiu ir gamintojo pajamas.

Apibrėžimas *Santykiniu funkcijos $y = f(x)$ kitimo greičiu, taške x, vadinsime santykį*

$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Procentiniu funkcijos $y = f(x)$ kitimo greičiu, taške x, vadinsime santykį

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100.$$

Santykinis kitimo greitis parodo, keliais procentais pasikeis funkcijos reikšmė, taške x, vienu vienetu pakeitus (padidinus arba sumažinus) x.

Pavyzdys Tarkime, kad gamintojas parduota savo produktą po 2 piniginius vienetus. Tada bendrosios pajamos- pardavus q produktų yra $r = 2q$. Akivaizdu, kad ribinės pajamos yra

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} = 2.$$

matome, kad ribinės pajamos nepriklauso nuo parduotų produktų kiekio ir visada yra vienodos ir lygios 2. Palyginkime pajamų r kitimą lygindami kitimo greitį su pardavimo mastu (kiekiu). Tuo tikslu nagrinėjame santykį $\frac{r'_q}{r.}$ Jis ir yra santykinis pajamų kitimo greitis esant pajamų lygiui r. Tarkime, kad buvo parduota 50 vnt. produkcijos, tuomet pajamų kitimo greitis yra

$$\frac{\mathrm{dr}/\mathrm{dq}}{r} = 0,02,$$

o procentis kitimo greitis - 2%. Tuo tarpu pardavus 5000 vnt. produkcijos santykis lygus

$$\frac{\mathrm{dr}/\mathrm{dq}}{r} = 0,0002,$$

arba $0,02\%$.

Ekonominio gyvenimo analizėje svarbų vaidmenį atlieka vartojimo funkcija $C = f(I)$, kuri apibrėžia ryšį tarp bendrųjų nacionalinių pajamų I ir bendro nacionalinio vartojimo C. Tada ribinis vartojimas yra apibrėžiamas santykiu:

$$C'(I) = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}I}.$$

Skirtumą tarp nacionalinių pajamų ir vartojimo vadinsime taupimu ir žymėsime

$$S = I - C.$$

Tada ribinis taupymas yra apibrėžiamas lygybe:

$$S'(I) = 1 - \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}I}.$$

Tarkime, kad $p = f(q)$ yra įmonės produkcijos paklausos funkcija, $p-$ produkto kaina, o $q-$ parduotų produktų kiekis. Tada bendrosios pajamos $r = pq = qf(q)$. Tarkime, kad q produktams pagaminti reikalingi bendrieji kaštai yra $c = g(q)$. Tada bendrasis pelnas P, kuris yra lygus bendrųjų pajamų ir bendrųjų kaštų skirtumui, yra q funkcija:

$$P = r - c = qf(q) - g(q).$$

Pabandykime išsiaiškinti, kada firma gauna didžiausią pelną? Žinome, kad būtina, funkcijos turinčios išvestinę, ekstremumo sąlyga- jos išvestinė yra lygi nuliui, taigi

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dq}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dq}}(r - c) = 0.$$

Taigi, ekstremali reikšmė pasiekiama, kai

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} = \frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dq}},$$

čia, dr/dq ribinės pajamos, o dc/dq yra ribiniai kaštai. Taigi gavome, kad norint maksimizuoti pelną būtina, kad ribinės pajamos būtų lygios ribiniam pelnui.

Norint įsitikinti, kad esant šioms sąlygoms iš tiesų gauname maksimalų pelną, turime patikrinti, funkcijos antroji išvestinė yra neigiama. Taigi

$$\frac{\mathrm{d^2P}}{\mathrm{dq^2}} = \frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{dq^2}} - \frac{\mathrm{d^2c}}{\mathrm{dq^2}} < 0,$$

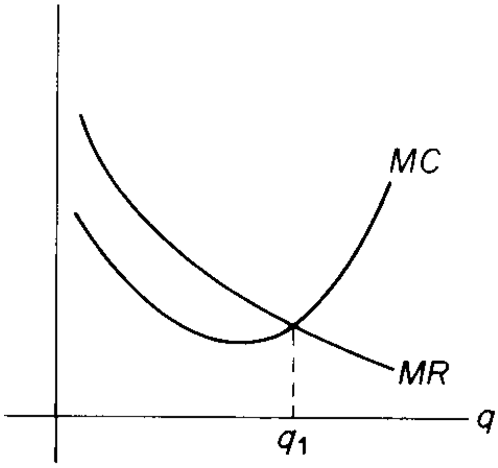
arba

$$\frac{\mathrm{d^2r}}{\mathrm{dq^2}} < \frac{\mathrm{d^2c}}{\mathrm{dq^2}}.$$

Pastaroji sąlyga ekvivalenti sąlygai, kad skirtumo

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dq}} - \frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dq}}$$

ženklas keičiasi iš (+) į (−), o ne atvirkščiai. Tai reiškia, kad maksimumo taške q_1, kuriame pasiekiamas maksimalus pelnas, ribinių išlaidų kreivė (I) susikerta su ribinių pajamų kreive (žr. 5 pav.)



5 pav.

Teoriniai klausimai

1. Žinoti funkcijos išvestinės apibrėžimą bei skaičiuoti funkcijų išvestines remiantis apibrėžimu.
2. Mokėti įrodyti išvestinių skaičiavimo taisykles.
3. Skaičiuoti išvestines taikant išvestinių skaičiavimo taisykles.
4. Mokėti įrodyti teoremas apie atvirkštinės ir sudėtinės funkcijų išvestinių skaičiavimą.
5. Žinoti taikymus ekonomikoje (elastingumo koeficientas, santykinis ir procentiniai prieaugiai, ribiniai (marginalieji) dydžiai).

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Apskaičiuokite pateiktų funkcijų išvestines ir diferencialus iki antros eilės imtinai:

$$a)\ f(x) = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3+1}} \quad b)\ f(x) = 2^{x^2+x}\cdot x^3 \quad c)\ f(x) = \sin^2(x^3)\cdot \ln x^3 + 1.$$

2. Apskaičiuokite pateiktų funkcijų išvestines $y', y^{(2)}$ taške $A(3,1), jei:$

$$1)\quad x^2 - xy + y^2 = 7; \quad 2)\quad \sqrt{x^2+y^2+6} = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x}} + 3.$$

Ats:

$$1)\ y' = \frac{2x-y}{x-2y},\quad y^{(2)} = \frac{6}{(x-2y)^3},\ 2)\ y' = \frac{x+y}{x-y},\quad y^{(2)} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^2}.$$

3. Nustatykite, kuomet poreikių funkcija elastinga, o kada ne elastinga, jei

$$f(q) = pq.$$

4. Poreikių funkcija yra apibrėžta tokia lygybe:

$$p = 500 - 2q.$$

Nustatykite kokioms q reikšmėms poreikių funkcija elastinga, o kokioms ne.

Ats: Elastinga, jei $0 < q < 125$; ne elastinga, jei $125 < q < 250$.

5. Produkcijos poreikių funkcija apibrėžta tokiu būdu:

$$q = 500 - 40p + p^2,$$

čia produkto vieneto kaina, o $q-$ poreikis tūkstančiais. Nustatykite elastingumo koeficientą, kai vieneto kaina $p = 15$. Nustatykite kaip pasikeis poreikiai, jei šią kainą padidinsime puse procento?

Ats: 0,99

6. Žinoma, kad x darbuotų pagamina q vnt. produktų per dieną, čia $q = \frac{10x^2}{\sqrt{m^2+19}}$. Be to žinoma, kad poreikio funkcija tenkina lygtį;

$$p = \frac{900}{q+9}.$$

Apibrėžkite ribines pajamas, kai $x = 9$.

Ats: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}|_{x=9} = 10,71$.

7. Sudarykite ribinę pajamų funkciją bei raskite šios funkcijos reikšmę esant gamybos apimčiai $q = 45$, jei žinoma, kad poreikių funkcija yra tokia:

$$p = \frac{1000}{q+5}.$$

Ats:$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}|_{x=45} \approx 2$.

8. Tarkime, kad vartojimo funkcija apibrėžta lygybe:

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3}+3)}{I+3}.$$

Nustatykite ribinį vartojimą bei ribinį taupymą esant pajamų lygiui $I = 100$.

Ats:$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}I}|_{I=100} \approx 0.536$

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Remdamiesi funkcijos išvestinės apibrėžimu apskaičiuokite funkcijos išvestines nurodytuose taškuose:

$$a)\ \ f'(3),\ \ f(x) = \ln^2(2+3x);\quad b)\ \ f'(1),\ \ f(x) = \sqrt[3]{1+4x},$$
$$c)\ \ f'(x), x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x^4 + 3x + 1,\quad d)\ \ f'(x), x \in \mathbb{R}, f(x) = 3^{x^2+1}.$$

2. Remdamiesi teorema apie atvirkštinės funkcijos išvestinę, raskite funkcijų išvestines:

$$a)\quad f(x) = \operatorname{arctg}(4+3x);\quad b)\quad f(x) = \sqrt[3]{7+4x}.$$

3.

a) Raskite žemiau pateiktų funkcijų išvestines iki 2-os eilės imtinai;

$$f(x) = \arcsin{(2-5x^2)};\qquad f(x) = \ln{(7+4x)};$$
$$f(x) = \sqrt{x^3+x+1}\cdot(1+2x);\quad f(x) = x^2\cdot(\ln x)^x.$$

b) Apskaičiuokite aukščiau pateiktų funkcijų diferencialų, iki antros eilės imtinai, reikšmes taške $x = 2$.

4. Apskaičiuokite pateiktų funkcijų išvestines $y', y^{(2)}$ taške $A(0,1)$, jei:

$$1)\quad x^3 - xy^2 + y = 1;\quad 2)\quad \sqrt{x^2+y^2} - 1 = \operatorname{arctg}(y^2x).$$

Raskite $dy(0)$ abiem atvejais.

5. Paklausos funkcija yra apibrėžta tokia lygybe:

$$p = 1500 + q - 2q^3.$$

Nustatykite kokioms q reikšmėms poreikių funkcija elastinga, o kokioms ne. Tegu $q = 12$ sąlyginių vienetų. Nustatykite kaip pasikeis vartojimas (absoliučiai ir procentiškai) esant tokiai paklausai, jei kainą padidinsime 2% .

6. Produkcijos poreikio funkcija apibrėžta tokiu būdu:

$$q = 500 - 40p + p^2,$$

čia $p-$ produkto vieneto kaina, o $q-$ poreikis tūkstančiais. Nustatykite elastingumo koeficientą, kai vieneto kaina $p = 25$. Nustatykite kaip pasikeis poreikiai (procentais), jei šią kainą padidinsime puse procento?

7. Žinoma, kad x darbuotų pagamina q vnt. produktų per dieną, čia $q = \frac{10x^2+x+1}{x+1}$. Be to žinoma, kad pajamų funkcija tenkina lygtį;

$$p = \frac{900}{q+8}.$$

Nustatykite, kaip pasikeis pajamos, jei esant darbuotojų skaičiui $x = 9$, jį padidinsime iki 10.

8. Sudarykite ribinę pajamų funkciją bei raskite šios funkcijos reikšmę esant gamybos apimčiai $q = 20$, jei žinoma, kad pajamų funkcija yra tokia:

$$p = \frac{2000q + 3q^3}{\sqrt{3q^2 + 400}} - 2q.$$

1)Keliais procentais pasikeis pajamos, jei gamybą padidinsime vienu vienetu.

2) Keliais procentais šiuo atveju pasikeis pajamos, jei gamybos apimtis padidinsime vienu procentu?

9. Tarkime, kad vartojimo funkcija apibrėžta lygybe:

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3 + I} + 3)}{2I + 3}.$$

Nustatykite ribinį vartojimą, esant pajamų lygiui $I = 200$. Keliais vienetais pasikeis taupymas, jei pajamų lygis padidės iki 201?

10. Tarkime, kad paklausa ir kaina siejamos lygtimi:

$$q = \sqrt{2500 + p - 2p^2}.$$

Raskite elastingumo koeficiento reikšmę esant kainai $p = 20$. Nustatykite, keliais procentais pasikeis paklausa, jei kainą pakeisime 0.25%.

11. Raskite pateiktų funkcijų santykinį ir procentinį augimo greičius nurodytuose taškuose:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x - 1}{\sqrt{2x + 10}}, \quad x = 3; \quad r = q^3(25 - \frac{q}{50}), \quad q = 5.$$

12. Bendroji gamybos kaštų funkcija apibrėžta tokiu būdu:

$$c = \frac{4q^3 + q + 2}{\sqrt{q^3 + 5q^2}} + 5000.$$

Nustatykite ribinius gamybos kaštus esant gamybos apimčiai $q = 750$ bei procentinį kaštų kitimą šiame taške.

13. Tarkime, kad vartojimo funkcija apibrėžta lygybe:

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3 + I} + 3)}{2I + 3}.$$

Nustatykite ribinį vartojimą bei ribinį taupymą esant pajamų lygiui $I = 200$. Keliais vienetais ir keliais procentais pasikeis vartojimas, jei pajamos padidės vienu vienetu.

14. Tarkime, kad paklausa ir kaina siejamos lygtimi:

$$p = \frac{q^2 + 5q + 150}{q + 5}.$$

1) Raskite elastingumo koeficiento reikšmę esant paklausai $q = 10$. Nustatykite, keliais procentais pasikeis paklausa, jei kainą pakeisime 0.5%.

2) Keliais procentais pasikeis paklausa, jei kainai esant $p = 22,5$ (šiuo atveju paklausa bus $q = 450$) ją pakeisime $0,75\%$.