IV. FUNKCIJOS RIBA.

4.1 Funkcijos riba

Taško $x_0 \in X \subset \mathbb{R}$ aplinka vadiname bet kokį atvirą intervalą, kuriam priklauso taškas x_0 išskyrus šį tašką. Taško x_0, $2t-$ ilgio aplinką žymėsime tokiu būdu: $V_t(x_0) = (x_0-t, x_0+t) \setminus \{x_0\}$. Pavyzdžiui intervalas $(-1;1)$ gali būti laikomas skaičiaus 0 aplinka, kurios ilgis lygus 2.

Sakykime, kad funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Tarkime, be to, kad $x_0 \in X$, bet x_0 nebūtinai priklauso aibei $D(f)$, tačiau šio taško bet kokioje aplinkoje yra aibės $D(f)$ taškų. Kitaip tariant, kai kalbame apie taško x_0 aplinką, taškas x_0 nebūtinai priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai, todėl kalbant apie taško aplinką natūralu eliminuoti tašką apie kurio aplinką kalbame.

Funkcija

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

apibrėžta realiųjų skaičių aibėje, išskyrus tašką $x_0 = 1$. Tada šio taško aplinka $V_{0,5}(1) = (0,5; 1,5) \setminus \{1\}$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad skaičius b yra funkcijos $y = f(x)$ riba taške x_0, jei bet kokiai realiųjų skaičių sekai $\{x_n\}$, konverguojančiai į tašką x_0, šią seką atitinkanti funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ konverguoja į skaičių b.*

Jei funkcijos $y = f(x)$ riba, taške x_0, yra skaičius b, tai

$$\lim_{\forall x_n, x_n \to x_0} f(x_n) = b.$$

Trumpai šį faktą žymėsime

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Ateityje naudosime ir kitais terminais suformuluotą funkcijos ribos apibrėžimą, kuris ekvivalentus pateiktąjam.

Apibrėžimas *Sakysime, kad skaičius b yra funkcijos $y = f(x)$ riba taške x_0, jei bet kokiam, laisvai parinktam skaičiui $\epsilon > 0$, egzistuoja teigiamas skaičius $\delta = \delta(\epsilon)$ toks, kad*

$$|f(x) - b| < \epsilon, \text{ kai } |x - x_0| < \delta \quad \big(x \in V_\delta(x_0)\big).$$

Kitaip tariant, skaičius x_0 yra funkcijos $y = f(x)$ riba taške x_0, jei argumento reikšmėms artėjant prie taško x_0, atitinkamos funkcijos reikšmės artėja prie skaičiaus b.

Pastaba Kalbant apie funkcijos ribą taške x_0 svarbu pastebėti, kad taškas x_0 gali ir nepriklausyti šios funkcijos apibrėžimo sričiai. T.y. funkcija apibrėžta šio taško aplinkoje $V_\delta(x_0)$, o taške x_0 gali ir neturėti prasmės arba nebūtų apibrėžta.

Kadangi funkcijos ribos apibrėžimas pateiktas sekos ribos terminais, tai natūralu naudoti analogiškas sąvokas kaip ir sekų atveju. Pavyzdžiui, jei funkcija $y = f(x)$ turi ribą taške x_0, tai tada teisingas sąryšis:

$$f(x) = b + \alpha(x), \text{ čia } \alpha(x) \text{ yra nykstamas dydis, kai } x \to x_0 \; (\forall x_n; \; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0).$$

Pasirodo, kad jei funkcija turi ribą taške x_0, tai tada riba yra vienintelė. Įrodykite!

Pastaba Analogiškai, kaip ir sekų atveju sakysime, kad funkcija $y = f(x)$ yra *nykstama* taške x_0, jei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Parodykime, kad funkcija

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1},$$

kuri nėra apibrėžta taške $x = -1$, turi ribą šiame taške ir ši riba lygi skaičiui $b = -0,5$.

Remiantis apibrėžimu reikia parodyti, kad skirtumas $f(x) - (-\frac{1}{2}) = \alpha, \quad \alpha$ yra nykstamas dydis, kai $x \to -1$.

Turime, kad

$$\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2(x^2-1)} = \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x-1)} =$$

$$\frac{x+1}{2(x-1)} =: \alpha. \tag{1}$$

Parodykime, kad bet kokiam $\epsilon > 0$ galima nurodyti taško $x_0 = -1$ aplinką $V_\delta(-1)$, $\delta = \delta(\epsilon)$ tokią, kad visiems $x \in V_\delta(-1)$ teisinga nelygybė $|\alpha| < \epsilon$.

Nagrinėjame taško -1 aplinką, todėl natūralu nagrinėti tik tuos x, kurie tenkina nelygybę $-2 < x < 0$ ir $x \neq -1$ (žinoma galima fiksuoti ir bet kokį kitą intervalą kuriam priklauso -1.)

Tegu $\epsilon > 0$ laisvai parinktas skaičius. Kokiems x

$$|\frac{x+1}{2(x-1)}| < \epsilon?$$

Remdamiesi prielaida turime, kad $|x+1| < 2\epsilon|x-1|$. Tada gauname, kad taško -1 aplinkoje galioja nelygybė $-2 < x < 0$ arba $1 < |x-1| < 3$. Pareikalavę, kad būtų $|x+1| < 2\epsilon =: \delta(\epsilon)$ gauname, kad dydis

$$|\alpha(x)| = |\frac{x+1}{2(x-1)}| < \frac{2\epsilon}{2 \cdot 1} < \epsilon.$$

Kitaip tariant, jei $x \in V_\delta(-1)$, tai $|\alpha| < \epsilon$.

Matome, kad α artėja į nulį, kai $x \to -1$. Tada

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}.$$

Apibrėžimas *Skaičių b_- vadinsime funkcijos $y = f(x)$ riba, taške x_0 iš kairės, jei bet kokiai sekai $\{x_n\}$ konverguojančiai į x_0, kai visi sekos nariai $x_n < x_0$, funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ konverguoja į skaičių b_-.*

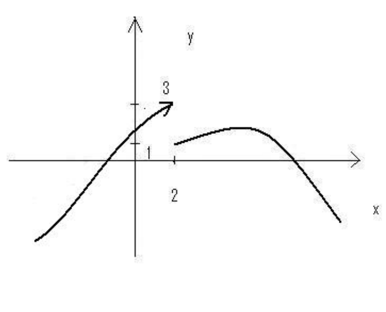
Apibrėžimas *Skaičių b_+ vadinsime funkcijos $y = f(x)$ riba, taške x_0 iš dešinės, jei bet kokiai sekai $\{x_n\}$ konverguojančiai į x_0, kai visi sekos nariai $x_n > x_0$, funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ konverguoja į skaičių b_+.*

Kairioji (dešinioji) funkcijos riba yra žymima

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = b_- \ (\lim_{x \to x_0+} f(x) = b_+).$$

Pavyzdys Žemiau pateiktame 1 pav. yra iliustruojamas funkcijos, turinčios taške $x_0 = 2$ ribą iš kairės ir dešinės, kurios beje yra skirtingos. Turime, kad

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 3 \quad (\lim_{x \to 2+} f(x) = 1).$$



1 pav.

Pastaba Dabar ir žemiau pateiktuose brėžiniuose rodyklė arba tuščiaviduris skritulys reikš, kad prie šios funkcijos reikšmės yra artėjama, bet ji neįgyjama. Pateiktame pavyzdyje matyti, kad taške 2 funkcijos reikšmė yra skaičiuojama iš dešinės, t.y. $f(2) = 1$.

1 pav. pateiktas grafinis pavyzdys funkcijos, kuri neturi ribos taške 2, kadangi ribos iš kairės ir dešinės šiame taške nesutampa.

Pavyzdys Panagrinėkime funkcijos

$$y = f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$$

elgesį, kai argumentas x artėja prie nulio.

Turime, kad

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Tada, remdamiesi arktangeto apibrėžimu, kai argumentas artėja į $\pm\infty$ gauname, kad

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Taigi, taške 0 funkcijos riba neegzistuoja. Apie šią ribą detaliau kalbėsime kiek vėliau.

Skaitytojui siūlome įsidėmėti tokį rezultatą.

Teorema 1. *Tam, kad seka turėtų ribą taške x_0 būtina ir pakanka, kad ribos iš kairės ir dešinės sutaptų.*

$\ominus$

Apibrėžimas *Skaičių b vadinsime funkcijos $f(x)$ riba, kai x neaprėžtai didėja, jei kiekvieną neaprėžtai didėjančią (mažėjančią) argumento reikšmių seką atitinkanti funkcijos reikšmių seka konverguoja į skaičių b, t.y.*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Apibrėžimas *Skaičių b vadinsime funkcijos $f(x)$ riba, kai x neaprėžtai mažėja, jei kiekvieną neaprėžtai mažėjančią argumento reikšmių seką atitinkanti funkcijos reikšmių seka konverguoja į skaičių b, t.y.*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Pavyzdys Suskaičiuokime ribą:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 2}.$$

Sakykime, kad $\{x_n\}$ bet kokia seka, tenkinanti sąlygą: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2 + x_n + 1}{x_n^2 + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2(2 + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2})}{x_n^2(1 + \frac{2}{x_n^2})} = 2,$$

kadangi remiantis sekų ribų savybėmis bei sąryšiu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{x_n^\alpha} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Tarkime, kad*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b, \ \lim_{x\to x_0} g(x) = c.$$

Tada $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = b + c$, $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = b - c$,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c, \ \lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = b/c \ (c \neq 0).$$

$\ominus$

Tarkime, kad $\{x_n\}$ kokia nors laisvai pasirinkta realiųjų skaičių seka, kurios riba yra skaičius x_0. Tada ir funkcijų sekos $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ konverguoja, be to jų ribos lygios skaičiams b, c atitinkamai. Remdamiesi sekų ribų teoremomis gauname, kad ir sekos

$$\{f(x_n)+g(x_n)\},\ \{f(x_n)-g(x_n)\},\ \{f(x_n)\cdot g(x_n)\},\ \{f(x_n)/g(x_n)\}$$

konverguoja, be to šių sekų ribos yra skaičiai $b+c$, $b-c$, $b\cdot c, b/c (c\neq 0)$, atitinkamai. Kadangi seka $\{x_n\}$ buvo pasirinkta laisvai, todėl gauname teoremos įrodymą.

$\oplus$

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija yra neaprėžta taške x_0, jei bent viena riba iš kairės arba dešinės šiame taške lygi $\pm\infty$;*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty, \text{ arba } +\infty$$

arba

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty, \text{ arba } +\infty.$$

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei funkcija neaprėžta taške x_0, tai šiame taške funkcija ir neapibrėžta, t.y. taškas nepriklauso funkcijos apibrėžimo sričiai. Paprastai ieškant taškų kuriuose funkcija yra neaprėžta reikia paiešką pradėti nuo taškų, kuriuose funkcija neapibrėžta, tyrimo. Atvirkštinis teiginys nėra teisingas. Pateikite pavyzdį.

Pavyzdys Tarkime, kad duota funkcija $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+4x-5}$. Matome, kad ši funkcija neapibrėžta taškuose $x_0 = 1$, $x_1 = -5$.

Raskime ribas iš kairės ir dešinės šiuose taškuose.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+5)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+5)} = \infty.$$

Skaičiuodami analogiškai gauname, kad

$$\lim_{x\to -5-} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+5)} = \infty, \quad \lim_{x\to -5+} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+5)} = -\infty.$$

Matome, kad taškuose, kuriuose funkcija neapibrėžta tuo pačiu ir neaprėžta. Atkreipsime dėmesį, kad neapibrėžtumas taške nėra pakankama sąlyga tam, kad funkcija būtų neaprėžta taške. Pavyzdžiui funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^3+2x+1; & |x|>2, \\ x^5-1; & |x|<2, \end{cases}$$

yra neapibrėžta taškuose 2, ir -2. Tačiau šiuose taškuose ji nėra neaprėžta, kadangi ribos iš kairės ir dešinės taške 2 nėra begalinės:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = 31, \text{ o } \lim_{x\to 2+} f(x) = 13.$$

4.2 Klasikinės ribos. Funkcijos tolydumas

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, jei*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Kitais žodžiais tariant, jei funkcija yra tolydi, tai ribą galime "perkelti" po funkcijos ženklu arba tiksliau kalbant, jei funkcijos riba sutampa su funkcijos reikšme tame taške.

Pastaba Pastebėsime, kad jei funkcija tolydi taškę x_0, tai egzistuoja šio taško aplinka $V_\delta(x_0)$, kurios visuose taškuose ši funkcija yra tolydi.

Skaitytojui siūlome tolydumo apibrėžimą perrašyti ϵ, δ terminais (atstumo terminais).

Jei funkcija $y = f(x)$ yra tolydi taške x_0, tai šiame taške funkcija apibrėžta ir jos reikšmė randama įrašius šį tašką kintamojo vietoje, t.y. gauname $y_0 = f(x_0)$. Be to riba iš dešinės ir kairės turi sutapti ir abi šios ribos turi būti lygios skaičiui y_0. Parodykime, kad funkcija $f(x) = x^2 + 2x$ yra tolydi taške $x_0 = 1$.

Funkcijos reikšmė šiame taške yra lygi $f(1) = 3$. Parodykime, kad

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 3.$$

Kitaip tariant, pakanka parodyti, kad skirtumas

$$x^2 + 2x - 3 = \alpha(x)$$

yra nykstamas dydis, kai $x \to 1$. Panagrinėkime šį skirtumą. Turime, kad

$$f(x) - 3 = x^2 - 1 + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 3) =: \alpha(x).$$

Tarkime, kad $0 < x < 2$. Tada $|\alpha(x)| < 5|x - 1|$. Tegu ϵ bet koks laisvai pasirinktas mažas skaičius. Panagrinėkime ar galima rasti $\delta(\epsilon)$ tokį, kad visiems $|x - 1| < \delta$ išplauktų, kad $|f(x) - 3| < \epsilon$. Tai reikš, kad dydis α nykstamas, o tuo pačiu, kad funkcijos riba lygi 3, kai $x \to 1$.

Kada $5|x - 1| < \epsilon$. O gi tada, kai $|x - 1| < \frac{\epsilon}{5} =: \delta(\epsilon)$. Matome, kad bet kokiam $\epsilon > 0$ (bet kokiam atstumui iki nulio, koks jis mažas būtų), visada galima nurodyti taško 1 aplinką $V_\delta(1)$, $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ tokią, kad visiems $x \in V_\delta(\epsilon)$, $|\alpha| < \epsilon$. Taigi, dydis $\alpha(x)$ yra nykstamas, o tuo pačiu funkcija yra tolydi taške 1.

Teorema 3. *Sakykime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos toje pat aibėje ir tolydžios taške x_0. Tada funkcijos $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ yra tolydžios taške x_0. Be to, jei funkcija $g(x_0) \neq 0$, tai ir funkcija $f(x)/g(x)$ yra tolydi taške x_0.*

$\ominus$

Žinome, kad tolydžios taške x_0 funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ šiame taške turi ribines reikšmes, kurios atitinkamai yra lygios $f(a)$ ir $g(a)$. Tuomet teoremos teiginio teisingumas išplaukia iš sekų ribų savybių.

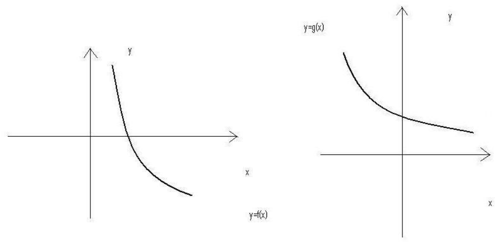
$\oplus$

Pastaba Iš pastarosios teoremos išplaukia, kad jei bent viena iš funkcijų nėra tolydi, tai ir funkcija sudaryta naudojant šias keturias operacijas taip pat bus netolydi.

Pateiksime, be įrodymo, keletą svarbių teiginių.

Teorema 4. *Jei intervale (a, b) funkcija $y = f(x)$ yra griežtai monotoninė ir tolydi, tai egzistuoja šiai funkcijai atvirkštinė funkcija, apibrėžta intervale $(f(a), f(b))$ $((f(b), f(a))$), kuri taip pat tolydi ir griežtai monotoninė.*

Pastebėsime, kad šiuo atveju funkcija yra bijekcija.



2 pav.

2 pav. yra iliustruojamas tiesioginės funkcijos $y = f(x)$ ir jai atvirkštinės funkcijos (toje pat koordinačių sistemoje) $g(x) = f^{-1}(x)$ grafikų eskizai. Matome, kad jei funkcija griežtai monotoninė ir tolydi, tai atvirkštinė funkcija turi tą pačią savybę.

Teorema 5. *Tarkime, kad funkcija $x = \psi(t)$ yra tolydi taške a, o funkcija $y = f(x)$ tolydi taške $b = \psi(a)$. Tada sudėtinė funkcija $y = F(t) = f(\psi(t))$ yra tolydi taške a.*

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 iš dešinės, jei*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Apibrėžimas *Sakysime, kad funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 iš kairės, jei*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

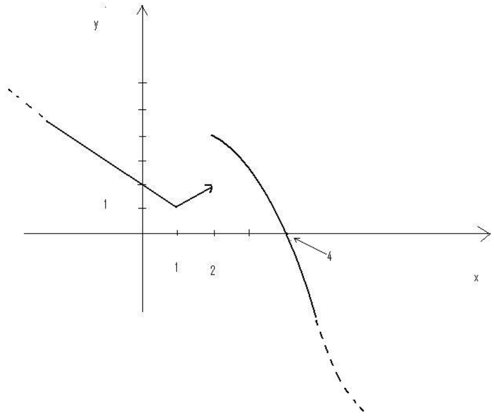
Taigi, funkcija tolydi taške tada ir tik tada, kai ji tolydi iš kairės ir dešinės šiame taške.

Pastaba Jei funkcija tolydi visuose aibės A taškuose, tai sakysime, kad funkcija yra tolydi aibėje A. Taškai, kuriuose funkcija nėra tolydi, vadinami funkcijos trūkio taškais.

Panagrinėkime funkciją:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x; & \text{jei } x \leq 1, \\ x; & \text{jei } 1 < x < 2, \\ -x^2 + 4x; & \text{jei } x \geq 2. \end{cases}$$

Funkcijos grafikas pateiktas žemiau



3 pav.

Ši funkcija apibrėžta intervale $D(f) = \mathcal{R}$. Ji tolydi visur išskyrus galbūt taškus 1 ir 2. Tačiau taške 1 iš kairės ir dešinės šios funkcijos ribinės reikšmės sutampa

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1+} f(x) = 1.$$

Be to $f(1) = 1$. Taigi, ši funkcija tolydi taške 1. Suskaičiuokime ribas iš kairės ir dešinės taške 2. Gauname, kad

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = 4, \qquad f(2) = 4.$$

Tad šiame taške funkcija yra trūki. Be to tolydi iš dešinės šiame taške.

Suformuluokime kelias tolydžių funkcijų teoremas.

Teorema 6. *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra griežtai monotoninė intervale $[a, b]$. Tada $y = f(x)$ yra tolydi šiame intervale tada ir tik tada, kai bet kokiam $\gamma \in [f(a), f(b)]$, egzistuoja $c \in [a, b]$, kad $f(c) = \gamma$.*

Kitais žodžiais kalbant, tolydi funkcija intervalą atvaizduoja į intervalą.

Funkcijos tolydumo savybė yra naudojama, kuomet yra skaičiuojamos funkcijos ribos. Jei funkcija yra tolydi nagrinėjamame taške, tarkime x_0, tai skaičiuojant ribą šiame taške pakanka įrašyti šį tašką į funkcijos formulę kintamojo vietoje. Gauta skaitinė reikšmė ir bus ieškomoji.

Pavyzdys Apskaičiuokime ribą:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+5}.$$

Matome, kad ši funkcija tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje, išskyrus tašką -5. Kadangi ribą skaičiuojame taške 2, kuriame funkcija yra tolydi, tai ribinė reikšmė bus lygi:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x+5}=\frac{2^2+2-2}{2+5}=\frac{4}{7}.$$

Pavyzdys Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}.$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju taške 1 funkcija nėra tolydi, skaitiklis ir vardiklis šiame taške lygus nuliui. Riba bus lygi kokiam nors baigtiniam skaičiui, jei skaitiklio "artėjimo" prie 1 greitis "panašus" į vardiklio artėjimo prie taško 1 greitį. Kaip palyginti šiuos greičius. Išskirkime skaitiklyje ir vardiklyje narius kurie charakterizuoja šį artėjimo greitį, t.y. narį $x-1$. Skaitiklyje šį narį išskiriame skaidydami kvadratinį trinarį, o vardiklyje taikydami kubų skirtumo formulę. Gauname:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Matome, kad paskutinysis reiškinys yra tolydus taške 1, tad ribinę reikšmę gauname įrašę kintamojo vietoje 1. Turime, kad

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=1.$$

Pavyzdys Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}.$$

Matome, kad ir ši funkcija nėra tolydi ribiniame taške -2. Be to, kaip ir pirmuoju atveju, tiek skaitiklis tiek vardiklis yra lygūs nuliui ribiniame taške. Išskirkime skaitiklyje ir vardiklyje narius kurie charakterizuoja artėjimo į nulį greitį, t.y. narį $x+2$, kuris artėja į nulį, kai $x\to -2$. Gauname,

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x-0.5)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9}=$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2(x-0.5)(\sqrt{x^2+5}+3}{x-2})=\frac{-5\cdot 6}{-4}=\frac{15}{2}.$$

Teorema 7. *Teisingas ribinis sąryšis:*

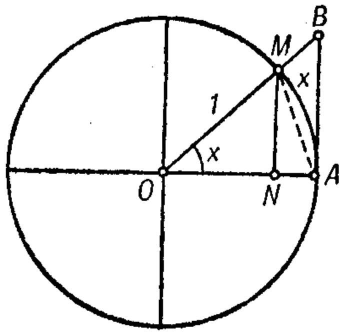
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\ominus$

Tarkime duota funkcija $f(x) = \sin x/x$. Parodysime, kad minėtoji funkcija turi ribą taške $x_0 = 0$, nors pati funkcija ir neapibrėžta šiame taške.

Visų pirma įrodysime keletą svarbių nelygybių. Tarkime, kad duotas vienetinis apskritimas, kurio centras taške O. (žr. 4 pav.). Taškas M yra apskritimo taškas, pirmąjame ketvirtyje, o x lanko AM ilgis. Beje, kampo AOM radianinis matas yra lygus x. Nesunku suprasti, kad $MN = \sin x$, $ON = \cos x$, $AB = \mathrm{tg} x$. Beje, trikampio OMA, skritulio OMA ir trikampio OAB plotai, atitinkamai lygūs: $0.5 \sin x$, $0.5x$, $0.5\mathrm{tg}x$. Vadinasi teisingos nelygybės:

$$0 < \sin x < x < \mathrm{tg}x,\ 0 < x < 0.5\pi. \tag{2}$$



1 Lema $\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$

$\ominus$

Remdamiesi lygybe

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

(2) nelygybe ir gerai žinomu sąryšiu $\cos x \leq 1$ gauname, kad

$$1 - 2|x| \leq \cos x \leq 1, \text{ kai } 0 < |x| < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Pastebėsime, kad kai x arti nulio, tai ir (3) nelygybės kairioji pusė artima nuliui. Perėję prie ribos, (3) nelygybėje, kai x artėja į nulį, gauname

$$\lim_{x\to 0}(1 - 2x) \leq \lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} 1.$$

Lemos įrodymas išplaukia iš teoremų apie ribinius sąryšius nelygybėse (policininkų principo).

$\ominus$

Mes nagrinėsime ribinį sąryšį, kai x artėja į nulį laikydami, kad $x \in (0, \frac{1}{2})$.

Iš (1) nelygybių gauname, kad

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Perėję prie ribos, kai $x \to 0$, ir naudodamiesi 1 Lema bei ribų nelygybių savybėmis, gauname teoremos įrodymą, tuo atveju, kai x artėja prie nulio iš dešinės. Antrąją teoremos dalį, kai x artėja prie nulio iš kairės, siūlome įrodyti skaitytojui.

$\oplus$

Be įrodymo pateiksime dar vieną teoremą apie svarbios ribos egzistavimą.

Teorema 8. *Funkcijos*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

ribinė reikšmė, kai $x \to \infty$ egzistuoja, ir lygi skaičiui e.

Šio teiginio teisingumu jau esame įsitikinę, kai $x \in \mathbb{N}$.

Tarkime, kad $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ ir $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$.

Tada 7 ir 8 Teoremas galime perrašyti tokiu būdu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1 \text{ ir } \lim_{x\to\infty} \big(1 + \frac{1}{g(x)}\big)^{g(x)} = e, \ \lim_{x\to 0} \big(1 + f(x)\big)^{\frac{1}{f(x)}} = e.$$

Šie ribiniai sąryšiai plačiai naudojami skaičiuojant ribas.

Pateiksime keletą pavyzdžių, kaip gali būti naudojami aukščiau pateikti ribiniai sąryšiai ribų skaičiavimuose.

Pavyzdys Apskaičiuokime ribą:

$$I := \lim_{x\to 0} (1 + \sin 2x)^{4x}.$$

Remdamiesi 8 Teoremos išvadomis gauname, kad

$$I = \lim_{x\to 0} \Big((1 + \sin(2x))^{\frac{1}{\sin(2x)}} \Big)^{\frac{\sin(2x)}{4x}}.$$

Naudodami 7 teoremą gauname, kad

$$I = \exp\big(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2\cdot 2x}\big) = \exp\big(\frac{1}{2}\big).$$

Pavyzdys Apskaičiuokime ribą:

$$I := \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin(4x)}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad skaičiuojant trigonometrines ribas visuomet nagrinėjamą reiškinį reikia pertvarkyti taip, kad galėtume taikyti 7 teoremą, t.y. reiškinyje esantį neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$ ribiniame taške pertvarkyti taip, kad atsirastų santykis $\frac{\sin f(x)}{f(x)}$, $f(x) \to 0$, kai $x \to x_0$.

Pakeitę skaitiklyje esantį skirtumą dydžiu $\sqrt{\cos x} - 1 = \frac{\cos x - 1}{\sqrt{\cos x} + 1}$ bei naudodamiesi lygybe $1 - \cos x = 2\sin(\frac{x}{2})$ gauname, kad

$$I := \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(\frac{x}{2})}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}{\frac{4\sin(4x)}{4x}} = -\frac{1}{4}.$$

4.3 Trūkio taškų klasifikavimas. Tolydumo tyrimas

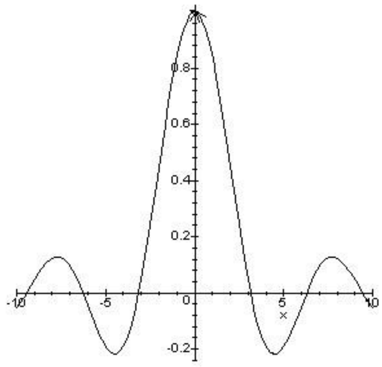
Tašką, tarkime x_0, kuriame funkcija nėra tolydi, bet šis taškas turi aplinką $V_\delta(x_0)$, kuriame funkcija tolydi, vadinsime funkcijos trūkio tašku. Funkcijos trūkio taškai yra klasifikuojami, pagal funkcijos elgesį aplinkoje $V_\delta(x_0)$.

1. **Pašalinamas trūkio taškas.** *Tašką a vadinsime funkcijos $y = f(x)$ pašalinamu trūkio tašku, jeigu šiame taške egzistuoja funkcijos riba, o pati funkcija taške a arba neapibrėžta, arba jos reikšmė taške nesutampa su funkcijos riba šiame taške.*

Pavyzdžiui, taškas $x = 0$ yra funkcijos

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

pašalinamas trūkio taškas. Šios funkcijos grafikas pateikiamas žemiau pav. Pastebėsime, kad taške 0 ši funkcija neapibrėžta, tad taške 0 iš kairės ir dešinės garfiko taškas žymimas su rodyklėmis.



4 pav.

Arba taškas $x = 1$ yra funkcijos

$$y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}; & x \neq 1 \\ 3; & x = 1, \end{cases}$$

pašalinamas trūkio taškas. Patikrinkite!

2. **Pirmos rūšies trūkio taškas.** *Taškas a yra vadinamas funkcijos $y = f(x)$ pirmos rūšies trūkio tašku, jeigu egzistuoja skirtingos baigtinės ribos iš kairės ir dešinės, šiame taške.*

Panagrinėkime funkciją

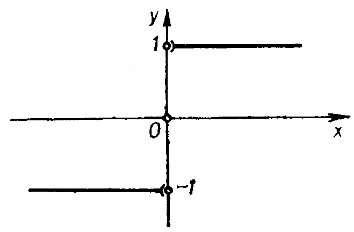
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Šios funkcijos grafikas pateiktas 5 pav..

Ši funkcija turi pirmos rūšies trūkio tašką $x = 0$, kadangi $f(0) = 0$, o

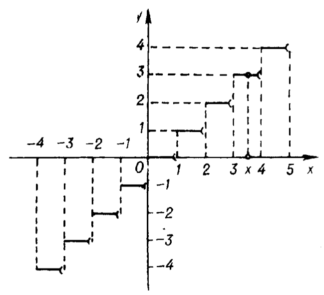
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$

Taigi, funkcijos reikšmė iš kairės ir dešinės yra skirtingi baigtiniai skaičiai.



5 pav.

Funkciją $f(x) = [x] = k, \ k \leq x < k+1, \ k \in \mathcal{Z}$ vadiname sveikąja dalimi. Jos grafikas pateiktas 6 pav.



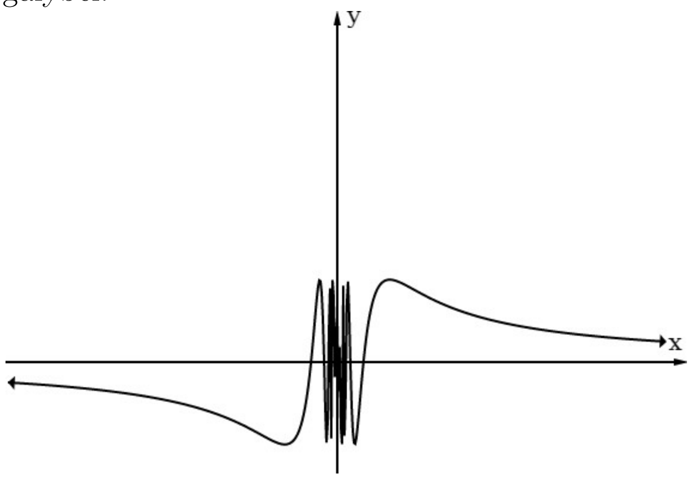
6 pav.

Visi sveiki skaičiai yra funkcijos $y = [x]$ pirmos rūšies trūkio taškai, kadangi $f(k) = k$,

$$\lim_{x \to k-} f(x) = k - 1, \quad \lim_{x \to k+} f(x) = k,$$

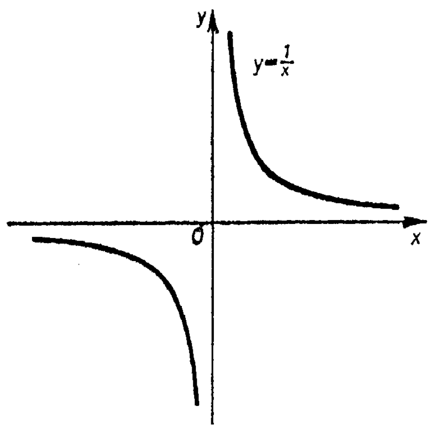
kiekvienam $k \in \mathcal{Z}$.

3. **Antros rūšies trūkio taškai.** *Taškas a yra vadinamas funkcijos $y = f(x)$ antros rūšies trūkio tašku, jeigu riba iš kairės arba dešinės neegzistuoja, arba bent viena riba (iš kairės arba dešinės) lygi begalybei.*



7 pav.

7 pav. pateiktas funkcijos $y = \sin(1/x)$ grafiko eskizas, kuri taške $x = 0$ turi antros rūšies trūkio tašką. Beje, šiame taške ribinė reikšmė neegzistuoja. 8 pav. pateiktas funkcijos $y = 1/x$, kuri taške $x = 0$ turi antros rūšies trūkį, be to, šiame taške ribinė reikšmė yra $\pm\infty$, priklausomai nuo artėjimo, prie šio taško, krypties.



8 pav.

Panagrinėkime funkciją

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \leq 0, \\ -\frac{1}{x}; & x > 0. \end{cases}$$

Ši funkcija turi antros rūšies trūkio tašką $x = 0$, kadangi riba iš dešinės yra lygi $-\infty$. Beje, riba iš kairės ir funkcijos reikšmė taške $x = 0$ sutampa ir lygios $f(0) = 1$.

4.4 Funkcijos pokytis ir tolydumas

Apibrėžimas *Tarkime, kad duotas taškas x_0, o Δx koks nors skaičius. Tada sumą $x_0 + \Delta x$ vadinsime argumento pokyčiu taške x_0.*

Ateityje skaičių Δx vadinsime pokyčiu. Tarkime, kad x_0 ir x du taškai. Tada pokytį galime apibrėžti taip: $\Delta x = x - x_0$.

Tegu $x_0 = 3$. Suteikime šiam taškui pokytį $\Delta x = 0.1$. Tada suma $3 + 0.1 = x$ mus "perkels" į tašką 3.1.

Pokyčio sąvoka taške svarbi tada, kai nagrinėjame funkcijos elgseną šio taško aplinkoje.

Apibrėžimas *Funkcijos $f(x)$ pokyčiu taške x_0, atitinkančiu argumento pokytį Δx, vadinsime tokį skirtumą:*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =: \Delta f(x_0).$$

Pavyzdys Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = x^2 - 3x + 1$ pokytį taške 2, kai argumento pokytis $\Delta x = 0.2$.

Remdamiesi apibrėžimu skaičiuojame:

$$f(2 + 0.2) - f(2) = (2 + 0.2)^2 - 3(2 + 0.2) + 1 - (2^2 - 3 \cdot 2 + 1) = 0.2 + 0.04 = 0.24.$$

Taigi, argumentui pasikeitus dydžiu 0.2, funkcijos reikšmė šiame taške keičiasi dydžiu 0.24.

Pavyzdys Tarkime, kad produkto paklausa su kaina siejama tokia lygtimi

$$Q(p) = -2p^2 + 20p.$$

Tarkime nagrinėjamu laikotarpiu šio produkto kaina yra $p = 5$. Esant šiai kaina yra suvartojama $Q(5) = 50$ produkto vienetų. Tada pokytis

$$\Delta Q(5) = Q(6) - Q(5) = 48 - 50 = -2$$

reiškia, kad padidinus kaina vienu vienetu, vartojimas nukris 2 vienetais.

Teorema 9. *Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 tada ir tik tada, jei funkcijos pokyčio taške x_0 riba, kai Δx artėja į nulį, yra lygi nuliui.*

$\ominus$

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi taške x_0. Vadinasi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tada pastarąją ribą galime perrašyti taip:

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

čia $\alpha(\Delta x)$ yra nykstamas dydis, kai $\Delta x \to 0$. Pažymėję $x = x_0 + \Delta x$ gauname, kad

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \alpha(\Delta x), \ \Delta x \to 0.$$

Paskutinioji lygybė reiškia, kad funkcijos pokytis taške x_0 yra nykstamas dydis, kai $\Delta x \to 0$.

Tarkime, kad funkcijos pokytis taške x_0 yra nykstamas dydis. Parodysime, kad tuomet funkcija yra tolydi taške x_0. Turime, kad

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \alpha(\Delta x), \ \Delta x \to 0.$$

Pažymėję $x = x_0 + \Delta x$ gauname, kad $x \to x_0$ tada ir tik tada, kai $\Delta x \to 0$. Vadinasi teisingas sąryšis:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Taigi, funkcija yra tolydi.

$\oplus$

4.5 Elementariųjų funkcijų tolydumas

Šiame skyrelyje įrodysime kai kurių, skaitytojui gerai žinomų funkcijų, tolydumą apibrėžimo srityse.

Teorema 10. *Funkcijos,* $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$ *yra tolydžios apibrėžimo srityse,* $x \in \mathbb{R}$.

$\ominus$

Funkcijos $f(x) = a^x$ tolydumas įrodomas gana sudėtingai, todėl jo nepateiksime. Jei skaitytojas domėtųsi, siūlome apie tai paskaityti A. Kabailos, vadovėlyje, 'Matematinės analizė, Id.'.

Nagrinėsime funkciją $f(x) = x^n$. Užrašykime šios funkcijos pokytį, taške x, atitinkantį argumento pokytį Δx. Turime,

$$\Delta f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta)^n - x^n$$
$$= C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots (\Delta x)^n.$$

Iš paskutiniosios lygybės matyti, kad šios funkcijos pokyčio riba, kai $\Delta x \to 0$, yra lygi nuliui, bet kokiam $x \in \mathbb{R}$. Taigi, remdamiesi 9 Teorema galime tvirtinti, kad funkcija x^n yra tolydi realiųjų skaičių aibėje.

Užrašykime funkcijos $f(x) = \sin x$ pokytį taške $x \in \mathbb{R}$. Turime, kad

$$\Delta f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2}) =$$

$$2\cos(x + \frac{\Delta x}{2})\frac{\Delta x}{2}\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$, taigi (9 Teorema), funkcija $\sin x$ yra tolydi visoje realiųjų skaičių aibėje.

Funkcijos $\cos x$ tolydumas įrodomas visiškai analogiškai.

Remdamiesi 3 Teorema galime tvirtinti, kad funkcija

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

yra tolydi aibėje $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{N}\}$, kadangi šioje aibėje funkcijos $\sin x$ ir $\cos x$ yra tolydžios, be to funkcija $\cos x \neq 0$.

Analogiškai samprotaudami galime pagrįsti ir funkcijos $y = ctg\, x$ tolydumą, jos apibrėžimo srityje.

Teorema 11. *Funkcijos* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$, $\ln x$ *ir* x^α *yra tolydžios apibrėžimo srityse.*

$\ominus$

Trigonometrinių atvirkštinių funkcijų ir funkcijos $f(x) = \log_a x$ tolydumas išplaukia iš 4 teoremos. Remdamiesi 5 teorema įrodysime funkcijos x^α tolydumą. Priminsime, kad funkcija $y = x^\alpha$ apibrėžta, kai $x > 0$.

Tarkime, kad $\alpha \in \mathbb{R}$. Laipsninę funkciją perrašykime taip:

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Matome, kad jei $\alpha > 0$, tai laipsninė funkcija didėja, jei $\alpha < 0$, tai ši funkcija mažėja. Taigi, remdamiesi sudėtinės funkcijos tolydumo teorema gauname, kad funkcija x^α yra tolydi, nagrinėjamoje srityje.

$\oplus$

Įrodykime, kad

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Naudodamiesi logaritmo savybėmis, paskutiniojo reiškinio kairę pusę perrašome tokiu būdu:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Naudodamiesi logaritminės funkcijos tolydumu, ribą "perkeliame" po logaritmo ženklu. Pasinaudoję tuo, kad $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ gauname, kad

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\mathrm{e}=1.$$

Skaitytojui siūlome įrodyti, kad

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad \text{ir} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

Pastebėsime, kad šias ribas galima apibendrinti posekiams. Aptarkime tai. Sakykime, kad $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. Tada teisingi ribiniai sąryšiai:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1;\quad \lim_{x\to x_0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\ln a;\quad \lim_{x\to x_0}\frac{(1+f(x))^\alpha-1}{f(x)}=\alpha.$$

Remiantis paskutiniais ribiniais sąryšiais gauname, kad

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x^2+x-2))}{x^2+x-2}=1 \quad \text{arba} \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin^2 x)^3-1}{\sin^2 x}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin^2 x)^3-1}{2\sin^2 x}=2\cdot 3=6.$$

Teoriniai klausimai

1. Skaičiuoti funkcijos ribas nurodytame taške remiantis a) ribos apibrėžimu ($\epsilon-\delta$ terminais); b) remiantis klasikinėmis ribomis.
2. Remiantis $\epsilon-\delta$ terminais apibrėžti nykstamumą, artėjimą į $\pm\infty$.
3. Žinoti ir taikyti klasikines ribas skaičiuojant įvairias ribas.
4. Remiantis apibrėžimu ir klaikinėmis ribomis įrodyti įvairių funkcijų tolydumą murodytuose taškuose.
5. Nustatyti ir klasifikuoti trūkio taškus. Skaičiuoti ribas iš kairės- dešinės. Pateiktus trūkio taškus iliustruoti grafikais (nurodant funkcijos grafiko elgseną šio taško aplinkoje).
6. Mokėti įrodyti teoremą, kurioje nurodomas ryšys tarp funkcijos pokyčio ir tolydumo. Mokėti taikyti šią teoremą įrodant tolydumą taškuose, konkrečioms funkcijoms.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Naudodami funkcijos ribos apibrėžimą ($\epsilon-\delta$ terminais) įrodykite, kad: funkcijos $y=x^3-2$ riba, taške $x_0=1$, lygi -1, o funkcijos $y=\frac{1}{x^2+1}$ riba, kai $x\to\infty$, lygi 0.
2. Suformuluokite ($\epsilon-\delta$ terminais) pateiktus teiginius

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \text{b)}\quad \lim_{x\to a}f(x)=-\infty,$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to a-0}f(x)=+\infty,\quad \text{d)}\quad \lim_{x\to -\infty}f(x)=+\infty.$$

3. Naudodami tolydumo apibrėžimą įrodykite, kad pateiktos funkcijos yra tolydžios nurodytuose taškuose: $y = \cos x^2$ taške π; $y = \ln^2(2x+1)$ taške 3; $y = 3^{x^2}$ taške 0.

4. Įrodykite, kad

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/n} - 1}{x} = \frac{1}{n}, \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

5. Apskaičiuokite pateiktų funkcijų ribines reikšmes:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^4 - (1+4x)}{x}; \ b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)^{10}(4x+3)^{15}}{(16x+1)^{25}};$$

$$c)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}; \ d)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; \ e)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^m - 1}{x^n - 2}.$$

Ats: a) 0; b) 2^{-60}; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{m}{n}$; b) ; $\frac{1}{2}$.

6. Apskaičiuokite ribines reikšmes:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/5} - 1}{x}; \ b)\ \lim_{x\to -2} \frac{(x-6)^{1/3} + 2}{x^2 + 8};$$

$$c)\ \lim_{x\to 8} \frac{(2x+9)^{1/2} - 5}{x^{1/3} - 2}; \ d)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/5} - (1+3x)^{1/4}}{x}$$

Ats: a) $\frac{1}{5}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) $\frac{12}{5}$; d) $-\frac{7}{20}$.

7. Apskaičiuokite trigonometrines ribas:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}; \ b)\ \lim_{x\to 1} (1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2};$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \mathrm{ctg}^3 x}{2 - \mathrm{ctg} x - \mathrm{ctg}^3 x}; \ d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \cos^{\frac{1}{3}} x}{\sin^2 x}.$$

Ats: a) 1; b) $\frac{2}{\pi}$; c) 1; d) $\frac{1}{12}$.

8. Apskaičiuokite ribas:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}; \ b)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{x^2};$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} (\cos\sqrt{x})^{1/x}; \ d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}.$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{9^x - 1}{\sin(2x)}; \ f)\ \lim_{x\to 0} \left(x + e^x\right)^{1/x}.$$

Ats: a) 0; b) e^3; c) $e^{-\frac{1}{2}}$; d) $\frac{3}{2}$ e) $\ln 3$; f) e^2.

9. Raskite nurodytas vienpuses ribas:

$$a)\ \lim_{x\to -\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{|x|}\right); \ b)\ \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$$

$$c)\ \lim_{x\to -1-} \frac{2x}{1+x}; \ d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x}$$

Ats: a) $-\infty$; b) 0; c) ∞; d) 2.

Raskite žemiau pateiktų funkcijų trūkio taškus (jei egzistuoja) ir juos klasifikuokite:

10.

$$a)\quad f(x)=\frac{\sin x}{|x|};\quad b)\quad f(x)=\frac{x}{x^2-4}.$$

Ats: a) 0, pirmos r.t.t. ; b) ±2,antros r. t.taškai.
11.

$$a)\quad f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)\quad b)\quad f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}.$$

Ats: a) $x\in\mathbb{Z}$,pirmos r.t. taškai ; b) 1, pašalinamas t.t. ; 2 antros r.t.t.
12.

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{1-2^{\frac{x^2}{x-1}}},\quad b)\quad f(x)=\begin{cases}x^2,\ x<2,\\ x+2, 2\le x\le 4\\ 4\sin\frac{\pi x}{4},\ x>4\end{cases}.$$

Ats: a) $x=0$,antros r.t. t. ; 1, pirmos r. t.t. ; b) 4, pirmos r. t.t.
13. Įrodykite, kad žemiau nurodytos funkcijos yra tolydžios taške $x_0=0$:
a) $f(x)=\sin(4x)$
b) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$
c) $f(x)=\ln(5x+2)$

Privalomos savarankiško darbo užduotys.

1. Naudodami funkcijos ribos apibrėžimą ($\epsilon-\delta$ terminais) įrodykite, kad:
a) funkcijos $f(x)=x^4-3$ riba, taške $x_0=1$, lygi -2;
b) funkcijos $f(x)=\frac{1}{x+4}$ riba, kai $x\to\infty$, lygi 0;
c) funkcijos $f(x)=\frac{x-1}{x^2+4x-5}$ riba taške $x=1$ lygi $\frac{1}{6}$.
2. Suformuluokite ($\epsilon-\delta$ terminais) pateiktus teiginius

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \text{b)}\quad \lim_{x\to a}f(x)=-\infty,$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to a-0}f(x)=+\infty,\quad \text{d)}\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

3. Apskaičiuokite pateiktų funkcijų ribines reikšmes:

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{(1+32x)^4-(1+12x)}{x};\ b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(7x-10)^{10}(4x+3)^{15}}{(28x+1)^{25}};$$

$$c)\ \lim_{x\to-1}\frac{x^3+4x+5}{x^6-2x-1};\ d)\ \lim_{x\to0}\frac{x^6-1}{x^9-1}.$$

4. Apskaičiuokite ribines reikšmes:

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{x};\ b)\ \lim_{x\to-2}\frac{(3x-2)^{1/3}+2}{x^3+8};$$

$$c)\ \lim_{x\to8}\frac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2};\ d)\ \lim_{x\to0}\frac{(1+5x)^{1/4}-(1+8x)^{1/6}}{x}$$

5. Apskaičiuokite trigonometrines ribas:

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos10x}{x};\ b)\ \lim_{x\to1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{3\pi x}{2};$$

6. Apskaičiuokite ribas:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-10}\right)^{x};\ b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-10}\right)^{4x^2};$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{1/x};\quad d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+\mathrm{e}^{3x})}{\ln(3+\mathrm{e}^{2x})}.$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{2^{\sin(2x)}-1}{x};\quad f)\ \lim_{x\to 0}\big(x+\mathrm{e}^{x}\big)^{1/4x}.$$

7. Raskite nurodytas vienpuses ribas:

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\ln\big(\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\big);\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\ln\big(\frac{1+\mathrm{e}^x}{x}\big)$$

$$c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x};\quad d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1-x};\quad e)\ \lim_{x\to-1-}\frac{2x+1}{1+x};$$

8. Raskite pateiktų funkcijų trūkio taškus (jei egzistuoja) ir juos klasifikuokite:

$$a)\quad f(x)=\frac{\sin x}{x+1};\quad b)\quad f(x)=\sin\frac{1}{x+2},\quad c)\ f(x)=\frac{\frac{x+1}{x-2}+\frac{x}{x+3}}{\frac{x+2}{x}-\frac{x-3}{x+2}}.$$

9.

$$a)\quad f(x)=\mathrm{sgn}(\cos\pi x);\quad b)\quad f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

10.

$$f(x)=\frac{1}{1-2^{\frac{x^2-1}{x+4}}}.$$

11.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1,\ x<1;\\ 2x+2, 1\le x\le 2\\ \frac{x+1}{x+2},\ 2<x<3;\\ 3,\quad x\ge 3\end{cases};\quad b)\ f(x)=\mathrm{arctg}\big(\frac{x-1}{x^2+3x-4}\big).$$

12. Duota funkcija:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{2x},\quad x<2;\\ \frac{4}{x},\quad x\ge 2.\end{cases}$$

Raskite šios funkcijos nurodytas vienpuses ribas:
$\lim\limits_{x\to 2-}f(x),\ \lim\limits_{x\to 2+}f(x),\ \lim\limits_{x\to 2}f(x),\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x).$

13. Naudodami teoremą apie funkcijos tolydumą (argumento pokyčiui nykstant, funkcijos pokytis taip pat nyksta) įrodykite, kad pateiktos funkcijos yra tolydžios nurodytuose taškuose: $f(x)=\cos^2 2x$ taške 4; $f(x)=\ln(2x+1)$ taške 3; $f(x)=3^{5x}$, taške 0; $f(x)=\sqrt{5x+2}$, bet kokiame taške $x\in D(f)$.