Gintautas Bareikis

Aukštoji matematika.

I. Matematinės analizės pagrindai

Paskaitų ciklas (2+2) skirtas ekonomikos specialybės studentams. Klausantys šį paskaitų ciklą bus supažindinti su matematinės analizės pagrindais, kurie būtini sėkmingoms tolimesnėms studijoms.

Vertinimo kriterijai. Semestro metu bus rašomi mini kontroliniai darbai, kuriais bus tikrinamas studentų savarankiško darbo medžiagos įsisavinimas. Rašant šiuos kontrolinius maksimaliai galima surinkti 2 taškus. Be to semestro metu bus rašomi du atsiskaitomieji (kontroliniai KL_1, KL_2) darbai bei teorinis testas (TT).

Bendras pažymys BP sudaromas taip:

$$BP = \frac{0,2}{n} \cdot \sum_{n=1}^{n} K_i + 0,3 \cdot (KL_1 + KL_2) + 0,2 \cdot TT.$$

Kontroliniai $KL_1,\ KL_2$ gali būti perrašomi egzamino metu.

Literatūra

1.BŪDA Vytautas 2013 Matematiniai ekonominės analizės pagrindai, Vilnius, TEV.

2. PIEKARSKAS Vidmantas 2014 Trumpas matematikos kursas Kaunas, Technologija.

Papildoma literatūra

1. APYNIS, Antanas; STANKUS, Eugenijus 2009 Matematikos pagrindai, Vilnius TEV.

2. TAYLOR, Rebecca; HAWKINS, Simon 2008 Mathematics for economics and business, Boston:McGrawhill.

3. BRADLEY Teresa 2009 Essential Mathematics for economics and business. 30th edition, Wiley & Sons.

Vilnius 2017

Turinys

VI. TOLYDŽIŲJŲ IR DIFERENCIJUOJAMŲ FUNKCIJŲ TEOREMOS

VII. DAUGELIO KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS

VIII. INTEGRALAI

1.1* Įvadinės pastabos

Matematika, kaip ir bet kuri kita mokslo sritis, visų pirma yra kalba. Ši kalba iš kitų kalbų išsiskiria tuo, kad yra formalizuota ir dar daugiau, vartojami sakiniai tenkina papildomas sąlygas, apie kurias kalbėsime žemiau.

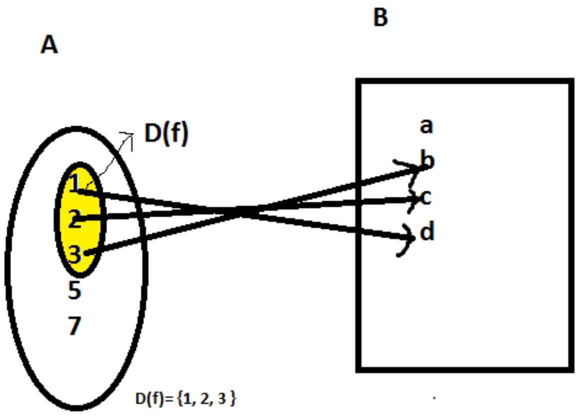
Mokslinės veiklos medžiaga yra patirties išbandyti ir mąstymo apibendrinti produktai, kuriuos vadiname sąvokomis. Sąvokos ištakos yra terminai, kuriuos, bendru sutarimu, suvokiama vienodai. Sąvokos struktūrą sudaro- turinys ir apimtis. Sąvokos turinį sudaro *požymių visuma, kuriais pasižymi suvokiamas objektas.* Sąvokos apimtis- tai *visuma objektų, pasižyminčių savybėmis, išvardytomis sąvokos turinyje.* Jei išplečiame sąvokos apimtį, tai sumažiname jos turinį ir atvirkščiai. Pavyzdžiui, sąvoką "trikampis" išplėskime tokiu požymiu - " trikampio kraštinės lygios". Gauname naują, lygiakraščio trikampio sąvoką. Suprantama, kad *trikampio* sąvokos turinį sudaro daugiau objektų, negu *lygiakraščio* trikampio sąvokos turinį.

Matematinėje kalboje naudojamos sąvokos, paprastai skirstomos į pirmines (neapibrėžiamas) ir išvestines (apibrėžiamas) sąvokas. Su šiomis sąvokomis esame susidūrę jau mokykloje. Prisiminkime kelias iš jų- *aibė, tiesė, taškas, plokštuma, atstumas ir t.t.*. Sąvokos, kurios nusakomos naudojant kitas sąvokas yra vadinamos išvestinėmis sąvokomis (apibrėžiamomis). Sąvokos (apibrėžiamos ar pirminės) nusakomas tam tikrais požymiais, kuriais pasižymi nagrinėjamasis objektas arba appriori laikome, kad sąvokos požymiai žinomi ir visi jas supranta vienodai, tad jų apibrėžti nereikia. Tai būdinga neapibrėžiamoms sąvokoms. Pavyzdžiui, mes *aibės* sąvokos neapibrėžiame, bendru sutarimu laikydami, kad aibė tai bet kokių objektų rinkinys. Tuo tarpu *kvadrato* sąvoka yra apibrėžiama. Apibrėžiamos sąvokos apimtį sudaro objektai, kurie turi savybes išvardintas sąvokos turinyje. Pastebėsime, kad keičiantis sąvokos turiniui kinta ir sąvokos apimtis ir atvirkščiai. (Pateikite pavyzdžių!) Apibrėžiamos sąvokos būtinai nusakomos remiantis jau apibrėžtomis sąvokomis. Suprantama, kad pirminių sąvokų apibrėžti negalime, nes norėdami jas apibrėžti turėtume naudoti apibrėžtas sąvokas ir taip toliau. Tad neišvengiamai susiduriame su problema- turi egzistuoti sąvokos, kurios iš anksto (pagal susitarimą) turi būti pirminės t.y. neapibrėžiamos. Apibrėždami sąvokas dažnai naudojame įvairias tekstines bei grafines priemones, kurios su pačia sąvoka susiję tik tiek, kad jos padeda suvokti ir įsisavinti naujos sąvokos turinį.

1.2 Teiginių veiksmai. Loginės formos

Aibe vadinsime bet kokį objektų rinkinį. Objektus sudarančius aibę vadinsime aibės elementais. Aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o elementus- mažosiomis. Suteikdami aibei vardą (žymenį) naudosime lygybės ženklą, elementus nurodydami tarp riestinių skliaustų. Pavyzdžiui, jei aibę A sudaro elementai s, m, a, b, tai šią priklausomybę žymėsime tokiu būdu $A = \{s, m, a, b\}$. Matematinę kalbą sudarantys sakiniai yra arba klaidingi arba teisingi. Tokio pobūdžio sakiniai vadinami *teiginiais.* Pastebėsime, kad šnekamoje kalboje mes labai dažnai naudoje teiginius. Tuo tarpu visi klausiamieji, atkreipiantys dėmesį, šaukiamieji ir kt. nėra teiginiai. Pateiksime teiginio apibrėžimą, paaiškindami sąvokas 'teisingas' ir 'klaidingas'.

Taisyklę f, kuria aibės A kai kuriems elementams ($a \in A$,) priskiriame po kokį nors vieną aibės $b \in B$ elementą, vadinsime *funkcija* (žymėsime šį priskyrimą $f(a) = b$), apibrėžta aibėje A ir įgyjančia reikšmes aibėje B (arba $f : A \longrightarrow B$). Aibė A, vadinama funkcijos f apibrėžimo aibe, o aibė B, funkcijos reikšmių aibe. Funkcijos apibrėžimo sritimi vadinsime aibę $D(f)$, kurią sudaro visi apibrėžimo aibės elementai kuriuos funkcija f priskiria reikšmių aibės elementams. Pavyzdžiui, funkcija apibrėžta aibėje A ir reikšmes įgyja aibėje B. Šios funkcijos apibrėžimo sritį sudaro aibė $D(f) = \{1, 2, 3\}$ (žr. pav. žemiau).



Pažymėkime raide S aibę, kurią sudaro visi sakiniai. Tarkime, kad funkcija $\mathcal{T}$ kokiems nors aibės S elementams priskiria aibės $\{0,1\}$ elementus, trumpai $\mathcal{T}:S \to \{0,1\}$. Aibės $D(\tau)$ elementus vadinsime teiginiais, funkciją $\mathcal{T}$ vadinsime *teisingumo funkcija,* o skaičius $\{0,1\}$ teisingumo reikšmėmis, kurios priešingos viena kitai. Pažymėkime teiginių aibę raide $T = D(\tau)$. Jeigu sakiniui $s \in T$, priskiriamas 0, t.y., $(\mathcal{T}(s) = 0)$ tai sakysime, kad sakinys klaidingas, kitu atveju $(\mathcal{T}(s) = 1)$ - teisingas. Vadinasi, šios funkcijos pagalba visus sakinius galime suskirstyti į dvi aibes- teiginių aibę ir sakinių, kurie neutralūs taisyklės atžvilgiu, aibes. Trumpai tariant, *teiginys yra sakinys, kuris arba klaidingas arba teisingas.* Matematikoje, aksiomų teisingumo reikšmės yra žinomos, tuo tarpu kitų teiginių teisngumo reikšmės yra nustatomos naudojant loginius argumentus, kurie vadinami įrodymu.

Teisingumo aibėje T apibrėžkime operacijas (jungtis), kurių atžvilgiu ši aibė būtų uždara. Kitaip tariant, atlikdami teiginių veiksmus, vėl gausime teiginį.

Teiginių aibėje naudojamos tokios teiginių jungtys (operacijų ženklai): 'ne', 'arba', 'ir', 'jei..., tai', 'tada ir tik tada' , o matematiniai šių jungčių žymenys yra $\overline{(\dots)}$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Apibrėžkime operacijas teiginių aibėje. Šios operacijos dar vadinamos logikos operacijų aksiomomis.

1. **Neigimo operacija.** Tegu $p \in T$. Tuomet sakinį 'ne p' (žymėsime $\overline{p}$) vadinsime duotojo teiginio p neiginiu. Jo teisingumo reikšmė priešinga teiginio p teisingumo reikšmei. Pavyzdžiui paneigę teiginį "$2 > 0$" gausime teiginį "$2 \leq 0$".

Tegu p; yra teiginys *dabar lyja.* Tada šiam teiginiui priešingas teiginys $\overline{p}$ yra *dabar nelyja.*

2. **Teiginių disjunkcija.** Sakinį ' p arba q ' vadinsime teiginių p, q disjunkcija, (žymėsime $p \vee q$). Šis sakinys laikomas klaidingu tuo atveju, kai abu teiginiai p, q yra klaidingi. Taigi, likusiais atvejais teiginys bus teisingas.

Teiginys 'skaičius 7 dalo skaičių 222446666777' arba 'skaičius 7 nedalo skaičiaus 222446666777' yra teisingas, kadangi abu teiginiai kartu būti neteisingi negali. Šis loginis veiksmas kartais vadinamas logine sudėtimi.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. **Teiginių konjunkcija.** Sakinį 'p ir q ' vadinsime teiginių konjunkcija (žymėsime $p \wedge q$). Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abu teiginiai p, q teisingi. Vadinasi teiginys 'duotojo trikampio kampų suma ne didesnė už 180 laipsnių' ir 'duotojo trikampio kampų suma

didesnė už 180 laipsnių'- neteisingas, kadangi abu pateikti teiginiai tuo pat metu negali būti teisingais. Šis veiksmas kartais dar vadinamas logine daugyba.

4. **Teiginių implikacija.** Sakinį 'jei p, tai q ' vadinsime šių teiginių implikacija (žymėsime $p \Rightarrow q$). Šis sakinys laikomas klaidingu tik tuo atveju, kai p teisingas, o q klaidingas.

Remiantis šia aksioma galime teigti, kad teiginys, jei 'lygiakraščio trikampio kraštinės nelygios,' tai 'lygiakraščio trikampio kampai nelygūs' yra teisingas, nes abu teiginiai klaidingi. Teiginys 'p' yra vadinamas prielaida, o 'q' išvada.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

5. **Teiginių ekvivalencija.** Sakinį 'p tada ir tik tada kai q ' vadinsime šių teiginių ekvivalencija. Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa. Šią operaciją žymėsime $p \Leftrightarrow q$. Kartais šis teiginys dar vadinamas logine lygybe.

Sakykime, kad teiginys q yra sakinys 'trikampis yra status', o teiginys p nusakomas sakiniu 'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'. Tuomet teiginys '$p \Leftrightarrow q-$ ' skaitytojui gerai žinoma Pitagoro teorema.

Naudojant šias logines operacijas, galime sudaryti sudėtinius teiginius.

Sakinius, sudarytus baigtinį skaičių kartų atlikus teiginių logines operacijas, nurodydant jų atlikimo tvarką skliaustais, vadinsime sudėtiniais teiginiais arba dažniau- *loginėmis formomis.*

Elementariuosius teiginius, sudarančius loginę formą vadinsime *propoziciniais kintamaisiais.* Tada, kai propoziciniams kintamiesiems priskiriamos konkrečios teisingumo reikšmės, tai gauname *loginės formos interpretaciją.* Kitaip tariant elementarusis sakinys (neskaidomas į smulkesnius sakinius), kuriam gali būti suteikiamos skirtingos teisingumo reikšmės, yra propozicinis kintamasis.

Aukščiau apibrėžtos dviejų teiginių loginės operacijos vadinamos paprasčiausiomis loginėmis formomis.

Teiginys

$$\alpha(p,q,r) := \overline{((p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r))}$$

yra loginė forma priklausanti nuo elementariųjų teiginių p, q, r. Simbolį $l(\cdot) := b, \ b \in T$ naudosime tuo atveju, kai loginei formai b suteikiame vardą, skliaustuose nurodydami elementariuosius teiginius, kurie sudaro loginę formą b.

Procesą, kuomet įprastinį sakinį keičiame simboliniu sakiniu vadinsime *sudėtinio sakinio formalizavimu.*

Formalizuokime tokį sakinį: "Šiandien eisiu į biblioteką ir jei ten rasiu norimą knygą, tai ją pasiimsiu į namus."

Pastebėsime, kad šiame sakinyje turime tris propozicinius kintamuosius:

p: "Šiandien eisiu į biblioteką;" q: "rasiu norimą knygą" r: "ją" pasiimsiu į namus.

Formalizavę šį sakinį gauname:

$$L(p,q,r) = p \wedge (q \Rightarrow r).$$

Trumpai aptarkime loginių interpretacijų prasmę. Kai nagrinėjame įvairius sakinius savaime aišku, kad tas pats sakinys skirtingame kontekste gali įgyti skirtingas teisingumo reikšmes.

Todėl nagrinėdami sudėtinius teiginius jų teisingumo reikšmes gali nustatyti tik žinodami elementariųjų teiginių teisingumo reikšmes, t.y. interpetacijas. Panagrinėkime tokį pavyzdį.

L: "Jei ruduo bus drėgnas ir šiltas, tai miške užaugs daug grybų ir uogų."

Formalizuodami šį teiginį gauname tokią formalią loginę formą

$$L(p, q, r, s) := (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r).$$

Iš patirtie žinome, kad pastarasis teiginys (loginė forma) yra teisingas teiginys jei visų elementariųjų teiginių interpretacijos teisingi teiginiai.

Panagrinėkime šį teiginį kai elementariuosius teiginius interpretuosime tokiu būdu p^1, q^0, r^1, s^0. Kitaip tariant, ruduo yra lietingas ir be to grybai auga, o uogos ne. Kyla klausimas - kokia šio sakinio teisingumo reikšmė, jei formos teisingumo reikšmę nustatome naudodami logikos taisykles (aksiomas). Siūlome skaitytojui įsitikinti, kad šiuo atveju teiginys yra teisingas, o jei teiginiams suteiksime tokią interpretaciją: p^1, q^1, r^1, s^0, tai loginė forma bus klaidingas teiginys.

Sudarykime loginės formos $\alpha(p, q, r) := \overline{((p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r))}$ teisingumo lentelę. Visų pirma, kai kuriems teiginiams suteikime vardus:

$$p_1 := p \Rightarrow q, \; p_2 := p \vee r, \; p_3 := p_1 \wedge p_2, \; L := \overline{p_3}.$$

Tada

p	q	r	p_1	p_2	p_3	L
1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1

Tarkime, kad $p \in T$ yra teiginys. Sakykime, kad jis teisingas. Tada šį teiginį patogu žymėti $p^1 := p$. Jeigu teiginys p yra klaidingas, tai šį teiginį žymėsime $p^0 := p$. Naudodami šiuos žymėjimus visas loginės formos interpretacijas galime užrašyti tokiu būdu:

$$\alpha(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_n^{k_n}), \quad k_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n.$$

Matome, kad jei loginė forma priklauso nuo n elementariųjų teiginių, tai ši forma turi 2^n interpretacijų. Iš paskutiniosios lentelės matyti, kad nagrinėjamos loginės formos interpretacija $\alpha(p^0, q^1, r^1)$ yra klaidingas teiginys.

Panagrinėkime žinomą matematinį teiginį.

L: "Trikampis status tik tada, kai apibrėžto apie šį trikampį apskritimo centras dalija įstrižainę pusiau." Formalizavus gauname: L: "$p \Leftrightarrow (r)$." Žinoma, kad šis teiginys yra teisingas. Interpretavus šį teiginį tokiu būdu: p^0, q^1 (t.y. teigdami, kad trikampis nėra status, o apibrėžto apie šį trikampį apskritimo centras dalija įstrižainę pusiau) gauname, kad esant šiai interpretacijai teiginys yra klaidingas.

Dvi logines formas $\alpha(p_1, \ldots p_n)$ ir $\beta(p_1, \ldots p_n)$, kurių teisingumo reikšmės sutampa, esant bet kokiam teiginių $p_1, \ldots, p_n$ teisingumo reikšmių rinkiniui, vadinsime *l*ogiškai ekvivalenčiomis ir žymėsime

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \beta(p_1, \ldots, p_n).$$

Kitaip tariant, kokį bepasirinktume teiginių rinkinį su žinomomis teisingumo reikšmėmis, abiejų loginių formų interpretacijos turės tą pačią teisingumo reikšmę.

Loginę formą, kurios, bet kokios interpretacijos teisingumo reikšmė lygi 1, vadinsime *tautologija.* Paprastai tautologija žymima raide $I(\dots)$. Jeigu loginės formos teisingumo reikšmė visuomet lygi nuliui, tai ši forma vadinama loginiu nuliu. Ją žymime raide O.

Tautologija yra vadinama logikos dėsniu. Pateiksime keletą logikos dėsnių.

1. Dvigubo neigimo dėsnis: $(\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p) \equiv I(p)$; Sakinys su dvigubu neiginiu "Netiesa, kad skaičius 6 yra nelyginis " yra ekvivalentus sakiniui "skaičius 6 yra lyginis."

2. Negalimo trečiojo dėsnis: $(p \vee \overline{p}) \equiv I(p)$;
Teiginys "skaičius 7 dalo skaičių 29576839485776 arba jo nedalo" yra visada teisingas.

3. Neprieštaravimo dėsnis: $(p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow O) \equiv I(p)$.
Teiginys "Duotasis trikampis yra lygiakraštis ir tuo pat metu nelygiakraštis" yra klaidingas.

4. Kontrapozicijos dėsnis: $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})) \equiv I(p, q)$;
Šį dėsnį (visoms interpretacijoms teisingą teiginį) iliustruosime tokiu pavyzdžiu:
Teiginys "Jei funkcija turi išvestinę atvirame intervale, tai ji šiame intervale tolydi' yra lygiavertis teiginiui "Jei funkcija nėra tolydi atvirame intervale, tai ji ne visur turi išvestinę."

5. Silogizmo dėsnis: $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \equiv I(p, q, r)$;
"Jei studentas pastoviai mokosi, tai jis gerai išlaiko egzaminus ir jei gerai išlaiko egzaminus, tai gauna stipendiją." Naudodami pastarąjį dėsnį galime teigti, kad "Jei studentas pastoviai mokosi, tai jis gaunam stipendiją."

6. de Morgano dėsniai:

$$(\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}) \equiv I(p, q), \quad (\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}) \equiv I(p, q);$$

Remiantis šiais dėsniais vienus sakinius galime keisti kitais. Panagrinėkime tokį pavyzdį.
Sakinys "$\overline{p \wedge q}$: "Netiesa, kad pateiktasis trikampis yra statusis ir lygiakraštis" logine prasme yra lygiavertis tokiam sakiniui $\overline{p} \vee \overline{q}$: "pateiktasis trikampis yra ne statusis arba nelygiakraštis."

7. Teisingos išvados dėsnis: jei žinoma, kad teiginys $p \Rightarrow q$ ir prielaida p yra teisingi teiginiai, tai tada išvada teisingas teiginys.
Yra žinoma, kad teiginys " keturkasmpis rombas, tai jo įstrižainės yra statmenos" yra teisingas. " Tarkime, kad nagrinėjant keturkampįus buvo nustatyta, kad keturkampio įstrižinės yra statmenos. Tada iš pastarojo dėsnio išplaukia, kad nagrinėjamas keturksmpis yrs rombas.

8. Klaidingos prielaidos dėsnis: jeigu teiginys $p \Rightarrow q$ yra teisingas, o jos išvada q yra klaidingas teiginys, tai sąlyga p yra klaidingas teiginys.
Panagrinėkime teiginį: Jei funkcija yra konstanta, tai jos išvestinė lygi nuliui. Šis teiginys teisingas. Mes nagrinėdami funkciją pastebėjome, kad išvestinė nėra lygi nuliui. Taigi prielaida šiuo atveju turi būti priešingas logine prasme teiginiui teiginys, t.y. funkcija nėra konstanta.

9. Implikacijos neigimo dėsnis: $(\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}) \equiv I(p, q)$;
Šis dėsnis taikomas gana plačiai, kai yra daromos priešingos prielaidos.
Tarkime duotas teiginys: "Jei skaičius sudėtinis, tai jis turi ne mažiau negu du daliklius didesnius už vienetą." Tarkime priešingai, t.y. sakykime kad "Netiesa, kad jei skaičius sudėtinis, tai jis turi ne mažiau negu du daliklius didesnius už vienetą ." Remiantis šiuo dėsniu paskutinįjį sakinį galime pakeisti tokiu: "skaičius yra sudėtinis ir jis turi daugiau negu du daliklius ."

10. Ekvivalencijos neigimo dėsnis: $((\overline{p \Leftrightarrow q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \Leftrightarrow q)) \equiv I(p, q)$;
Paneikime tokį sakinį: "Darysiu namų darbų užduotis tik tada, kai į namus grįšiu ne vėliau negu 9 val." Renžmiantis neigimo taisykle šį sakinį galime paneigti tokiu būdu:
"Darysiu namų darbų užduotis tik tada, kai į namus grįšiu vėliau negu 9 val."

Skaitytojui paliekame savarankiškai įsitikinti (naudojant teisingumo lenteles), kad kairėje pusėje esančios loginės formos iš tiesų yra tautologijos, t.y. visos interpretacijos yra teisingi teiginiai.

Yra laikoma, kad mokslo kalba yra neprieštaringa, jei ją naudojant bus laikomasi šių dėsnių. Juk ne kartą esame susidūrę su pašnekovu, kuris kalba nesilaikydamas logikos taisyklių. Beje ir save dažnai "nutveriame" kalbant ne logiškai. Beje, nelogiška kalba taip pat turi privalumų - tokiu atveju neįmanoma nustatyti tiesos.

Tolimesnėje veikloje mums teks susidurti su dvejopo pobūdžio teiginiais. Vienus teiginius mes laikysime apriori teisingais (teisingais be diskusijų), juos vadinsime aksiomomis, o teiginius, kurių teisingumą nustatysime samprotaudami, naudodami logikos dėsnius bei aksiomas, vadinsime teoremomis. Aksiomos, tai pirminiai teiginiai, kurių pagrindu kuriama matematinė teorija. Dar kartą pabrėžiame, kad dėl aksiomų teisingumo yra susitariama, skirtingose teorijose ta pati aksioma gali turėti skirtingas teisingumo reikšmes. Teorema vadinsime teiginį $p \Rightarrow q$. Pradinę teoremą paprastai vadiname tiesiogine. Tuomet teoremą $q \Rightarrow p$ vadinsime atvirkštine pradinei. Teoremą $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}-$ priešinga pradinei teoremai, o teoremą $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ priešinga atvirkštinei teoremai. Pasirodo, kad kai kurios iš šių teoremų yra ekvivalenčios. Pavyzdžiui teisinga tokia

Teorema 1. *Tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios, t.y.*

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad tai yra kontrapozicijos dėsnis!

Teorema 2. *Atvirkštinė ir priešingoji teoremos yra ekvivalenčios.*

Šių teoremų įrodymą paliekame skaitytojui. Įrodymui naudokite teisingumo lenteles.

Tarkime, kad teiginys p skamba taip: 'trikampis yra status' , o teiginys q : 'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'. Tada teiginys $(p \Leftrightarrow q)$ - skaitytojui gerai žinoma, Pitagoro teorema.

Teiginį $p \Leftrightarrow q$ vadinsime teorema su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis.

1.3 Sakiniai su kintamaisiais (predikatai)

Apibrėžimas *Sakinį, kuriame yra neapibrėžtos sąvokos (kintamieji) ir kuris tampa teiginiu šias sąvokas (kintamuosius) apibrėžus, vadinsime predikatu.* Jei sakinyje yra n nežinomųjų, tai šis predikatas vadinamas $n-$ viečiu. $n-$ vietį predikatą žymėsime $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Tarkime, kad predikatas vienvietis. Pastebėsime, kad kitu atveju, visos sąvokos būtų analogiškos, tik žymėjimai taptų sudėtingesni. Pavyzdžiui, sakinys $P(x): \ x < 2$ yra predikatas, o sakinys $P(3); \quad 3 < 2$ jau yra teiginys, beje neteisingas. Sakinys $P(x)$: "natūralusis skaičius x dalo skaičių 7" yra predikatas, kadangi x nežinomas. Tačiau sakinys "egzistuoja x natūraliųjų skaičių aibėje, kuris dalo skaičių 7'" jau yra teiginys, beje teisingas. Arba sakinys "visi natūralieji skaičiai x, dalo skaičių 7'" yra teiginys. Šis teiginys yra neteisingas. Sakinius "egzistuoja x, tenkinantis savybę P" ir "visi x tenkina savybę P" vadinsime sakiniais su egzistavimo ir visuotinumo kvantoriais. Šiuos sakinius trumpai rašysime, atitinkamai, $(\exists x, P(x))$, $(\forall x, P(x))$. Simboliai $\exists$ ir $\forall$ vadinami egzistavimo ir visuotinumo kvantoriais, atitinkamai. Naudodami kvantorius, predikatus paverčiame teiginiais, kadangi šiuo atveju kintamieji dydžiai yra susiejami su tam tikru požymiu ir nežinomas dydis konkretizuojamas.

Pavyzdys Duotas teiginys "kiekvienas studentas esantis šioje grupėje studijuoja algebros kursą." Užrašykime šį teiginį naudodami kvantorius.

Tegu predikatas $P(x)$: "šios grupės x (nežinomas) studentas studijuoja algebros kursą"

Tada pateiktą teiginį galime užrašyti tokiu būdu: $\forall x, P(x)$.

Antra vertus teiginys: $\exists x P(x)$ yra suprantamas tokiu būdu: "grupėje yra studentas, kuris studijuoja algebros kursą."

Teiginį "aibėje $A = [-2, 5] \subset \mathcal{R}$ yra skaičius, kurio modulis didesnis už 4" formalizuosime tokiu būdu: $\exists a \in A|a| > 4$. Pastebėsime, kad šis teiginys yra teisingas.

Pavyzdys Tegu predikatas $P(x)$: "$x + 1 > x$." Kokios šio predikato teisingumo reikšmės. Akivaizdu, kad šis predikatas $\forall x, P(x)$ yra teisingas, jei x realus skaičius.

Pavyzdys Tegu predikatas $P(x)$: "$x > 4$." Kokios šio predikato teisingumo reikšmės. Akivaizdu, kad šis predikatas $\forall x; P(x)$ nėra teisingas, jei x realus skaičius. Tačiau egzistuoja realiųjų skaičių intervalus kuomet šis predikatas teisingas. Būtent: $\forall x \in (4, \infty); P(x)$ jis yra teisingas.

Kintamųjų reikšmių aibę, su kuriomis predikatas tampa teiginiu, vadinsime *predikato apibrėžimo sritimi*, o kartais sakoma predikato *universumu.* Predikato apibrėžimo srities elementai, su kuriais predikatas tampa teisingu teiginiu, vadinami *predikato teisingumo aibe.*

Paskutiniame aukščiau pateiktame pavyzdyje matome, kad predikato apibrėžimo sritimi gali būti bet kokie realūs skaičiai, o šio predikato teisingumo aibę sudaro intervalas $(4, \infty)$.

Pavyzdys Formalizuokime sakinį: "Šioje auditorijoje egzistuoja studentų, kurie lankėsi Austrijoje ir kiekvienas šios auditorijos studentas yra aplankęs Kauną arba Šiaulius".

Tegu kvatorius $A(x)$ yra sakinys "x studentas aplankė Austriją;" kvatorius $K(x)$ yra sakinys "x studentas aplankė Kauną;" kvatorius $S(x)$ yra sakinys "x studentas aplankė Šiaulius."

Formaliai užrašytas teiginys yra toks:

$$\forall x A(x) \wedge \forall x (K(x) \vee S(x))$$

Pavyzdys Formalizuokime sakinius:

"Visi studentai yra sąžiningi;"

"Kai kurie studentai geria kavą;"

"Kai kurie sąžiningi studentai negeria kavos."

Tegu $A(x), B(x), C(x)-$ yra tokie predikatai, atitinkamai: "x yra studentas," "x sąžiningas ," "x geria kavą." Tada pateiktus tris sakinius galime formalizuoti taip:

$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x);$

$\exists x(A(x) \wedge C(x);$

$\forall x((A(x) \wedge B(x)) \wedge \overline{C(x)}.$

Panagrinėkime teiginių, apibrėžtų kvantoriais, neigimo problemą. Paneikime tokį teiginį: "Netiesa, kad visiems aibės X elementams, predikatas $P(x)$ yra teisingas teiginys." Užrašę formaliai turime,

$$\overline{(\forall x \in X, P(x))}.$$

Pastarąjį teiginį galime perrašyti tokiu būdu: "ne visiems $x \in X$, predikatas $P(x)$" yra teisingas teiginys arba "egzistuoja aibėje X elementas, su kuriuo predikatas $P(x)$ klaidingas teiginys". Perrašę formaliai turime

$$(\overline{\forall} x \in X, P(x)) \equiv (\exists x \in X, \overline{P(x)})$$

arba

$$\overline{(\forall x \in X, P(x))} \equiv (\exists x \in X, \overline{P(x)}).$$

Pastaroji lygybė vadinama visuotinumo kvantoriaus neigimo taisykle (dėsniu).

Samprotaudami visiškai analogiškai, paneikime teiginį su egzistavimo kvantoriumi. Teiginį "netiesa, kad aibėje X yra elementas x toks, kad $P(x)$ yra teisingas teiginys-" formaliai užrašę turime:

$$\overline{(\exists x \in X, P(x))}.$$

Aukščiau užrašytą teiginį galime perrašyti tokiu būdu: "nėra aibėje X elemento x, su kuriuo predikatas $P(x)$ būtų teisingas teiginys" arba "visiems aibės X elementams x, predikatas $P(x)$ neteisingas teiginys." Paskutinį teiginį laikysime teiginio su egzistavimo kvantoriumi neiginiu, taigi:

$$\overline{(\exists x \in X, P(x))} \equiv (\forall x \in X, \overline{P(x)}).$$

Remdamiesi užrašytomis taisyklėmis paneikime keletą teiginių:

$$\overline{(\forall x \in [-1,2], x \leq 0)} \equiv (\exists x \in [-1,2], x > 0),$$

arba

$$\overline{(\exists x \in [-1,2], |x-1| \geq 1)} \equiv (\forall x \in [-1,2], |x-1| < 1).$$

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Kokios teiginių $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow r$, $((p \Rightarrow q) \wedge r) \vee q$ teisingumo reikšmės, jeigu $p:\ 2 \times 2 = 6$, $q:\ 2 \times 4 = 8$, $r:\ 3 - 1 = 2$.

2. Kurie iš pateiktų sakinių yra teiginiai. Nurodykite teiginių teisingumo reikšmes:
a) "Lietuvoje yra žmonių kalbančių viena iš kalbų vartojamų Kinijoje.
b) "atsakyk į pateiktą klausimą";
c) $f(x) = x^2 + x - 1$;
d) "$3 < 5 - 1$";
e) "$a + b = 3$";
f) Jei rytoj lis lietus, tai neisiu į paskaitą.
Turima informacija: Perskaitęs prognozę sužinojau, kad rytoj lietus nelis. Žinau, kad rytoj į paskaitą vis vien neisiu.

3. Nustatykite, kurie iš pateiktų teiginių teisingi, o kurie klaidingi:
a) Jei $1 < 2$, tai $3 > 5$;
b) Jei $3 < 2$, tai $3 > 5$;
c) Jei " 2+3=4," tai $3 > 5$.
d) "Jei trikampis lygiašonis, tai jo dvi kraštinės lygios ir visi kampai lygūs." (Laikome, kad nagrinėjamas trikampis yra lygiašonis).

4. Paneikite duotą teiginį: "jei šiandien lis lietus ir nebus paskaitų, tai eisime į parodą ir žiūrėsime paveikslus arba dirbsime skaitykloje."

5. Patikrinkite, ar pateiktos loginės formos yra dėsniai (tautologios):

$$1)\quad \big((p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\big)\big)$$

$$2)\quad \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$$

Deformalizuokite pateiktus teiginius jiems suteikdami konkretų turinį.

6. Paneikite duotuosius teiginius: "Visi aibės elementai neigiami", "yra sąžiningų žmonių", "Trikampio kraštinės lygios" arba "trikampio kampai lygūs" , Tarkime, ab, c yra natūralieji skaičiai. "Jei "$a < b$" tai "$a^2 < b^2$" arba $a \geq b$ ir $b = c$."

7. Duota teorema: Tegu a, b, c realūs skaičiai. *"Jei $a < b$ tai $a + c < b + c$ ".* Užrašykite šiai teoremai atvirkštinę, priešingą, priešingą atvirkštinei teoremas.

8. Įrodykite, kad tiesioginė bei priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalentūs teiginiai. (Naudokite teisingumo lenteles)

9. Užrašykite duotai teoremai priešingą, atvirkštinę, atvirkštinę priešingai teoremas, prieš tai jas formalizavę. Paneikite šias teoremas (tarkite priešingai), jei:
a) Jei vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas, tai bet kokį šio rinkinio vektorių galima užrašyti netrivialiu šio vektorių rinkinio tiesiniu dariniu;
b) Jei funkcija tolydi atvirame intervale, tai šiame intervale ji turi išvestinę;
c) Jei aibė begalinė, tai ji ekvivalenti kokiam nors savo poaibiui;

d) Jei funkcija tolydi uždarame intervale, tai šiame intervale ji įgyja didžiausią ir mažiausią reikšmes.

e) Jei skaičius yra realusis, tai jis užrašomas baigtine periodine dešimtaine trupmena arba begaline periodine dešimtaine trupmena.

10. Tarkime, kad predikatas $P(x)$: "yra studentas x, kuris nepraleidžia aukštosios matematikos paskaitų". Šiuo atveju universali x aibė (predikato apibrėžimo sritis)- pasirinkta studentų grupė. Užrašykite pateiktus teiginius lietuviškai:

$$\text{a)}\quad \exists x\, P(x) \quad \text{b)}\quad \exists x\, \overline{P(x)} \quad \text{c)}\quad \forall x\, P(x) \quad \text{d)}\quad \forall x\, \overline{P}(x).$$

11. Tegu $A(x)$ yra predikatas "x gali kalbėti latviškai", o $B(x)$: "x moka programuoti $Pascal$ kalba."

Pateiktus sakinius užrašykite formalia kalba naudodami kvantorius.

a) Yra studentas universitete galintis kalbėti latviškai, bei žinantis $Pascal$ kalbą;

b) Yra studentas universitete galintis kalbėti latviškai, bei nežinantis $Pascal$ kalbos;

c) Kiekvienas mūsų universiteto studentas gali kalbėti latviškai, bei žino $Pascal$ kalbą;

d) Nėra studentų universitete galinčių kalbėti latviškai arba žinančių $Pascal$ kalbą;

Šiame uždavinyje "žinoti" $Pascal$ kalbą tas pat kas ir mokėti programuoti.

Paneikite visas šias formalias logines formas. Užrašykite paneigtas logines formas įprastiniais sakiniais.

12. Sudarykite loginių formų teisingumo lenteles. Nustatykite, ar pateiktos loginės formos L_1 ir L_2 yra logiškai ekvivalenčios:

$$L_1 := \overline{p \Rightarrow r}, \quad L_2 := \overline{p} \Rightarrow \overline{r};$$

$$L_1 := (p \wedge r) \Rightarrow s, \quad L_2 := (\overline{p} \vee \overline{r}) \Rightarrow \overline{s}.$$

$$L_1 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow r, \quad L_2 := p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

13. Tegu $f(x), g(x)$ yra tolydžios funkcijos. Tada:

"Jei $\exists x \in (a,b); f(x) + g(x) = 0$, tai $\exists x \in [a,b]; f(x) = 0$ ir $g(x) = 0$ arba $f(x) = -g(x)$;"

Suformuluokite šiai teoremai priešingą, atvirkštinę, priešingą atvirkštinei teoremas, paneikite šią teoremą (tarkime priešingai);

Ką reikia žinoti atsiskaitant šio skyriaus medžiagą

1. Žinoti teiginių veiksmų apibrėžimus;
2. Mokėti skaičiuoti sudėtinių teiginių teisingumo reikšmes;
3. Žinoti logikos dėsnius;
4. Neigti sudėtinius teiginius, taikant logikos dėsnius;
5. Žinoti teoremų rūšis. Žinant tiesioginę teoremą, mokėti užrašyti kitas teoremas;
6. Formalizuoti-deformalizuoti teiginius, nagrinėti teiginius su kvantoriais.