VI. TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS, DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS

6.1 Pirmos eilės dif. lygtys, dalinėmis išvestinėmis. Bendros sąvokos

Apibrėžimas *Lygybę,*

$$\Phi(f(x_1,\dots x_n), f'_{x_1},\dots f'_{x_i}) = 0, \tag{6.1}$$

kuri sieja kelių kintamųjų funkciją bei jos dalines išvestines, vadinsime dif. lygtimi dalinėmis išvestinėmis. Dif. lygtį vadinsime pirmos eilės diferencialine lygtimi dalinėmis išvestinėmis, jeigu šioje lygtyje tėra pirmos eilės dalinės išvestinės.

Tiesinė, pirmos eilės dif. lygtis dalinėmis išvestinėmis yra tokia:

$$f_1(x_1,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$R(x_1,\dots,x_n,u), \tag{6.2}$$

čia $u-$ yra nežinoma, $n-$ kintamųjų funkcija, o $f_1,\dots f_n, R$ yra kokios nors funkcijos, vadinamos dif. lygties koeficientais.

Jeigu dif. lygties koeficientai nepriklauso nuo ieškomosios funkcijos u, ir $R\equiv 0$, tai (6.2) dif. lygtį vadinsime *homogenine dif. lygtimi* dalinėmis išvestinėmis.

Apibrėžimas *Funkciją, $\varphi(x_1,\dots x_n)$ turinčią tolydžias dalines išvestines nagrinėjamoje srityje, vadinsime* (6.1) *dif. lygties sprendiniu, jeigu teisinga tapatybė:*

$$\Phi(\varphi(x_1,\dots x_n), \varphi'_{x_1},\dots \varphi'_{x_i}) \equiv 0.$$

Suformuluokime (6.2) dif. lygčiai, *Koši uždavinį.* Išspręsti Koši uždavinį reiškia, tarp (6.2) sprendinių rasti tokį, kuris išpildo nurodytas sąlygas: $u=\varphi(x_1,x_2,\dots x_{n-1})$, kai $x_n = x_n^0$, čia $\varphi(x_1,\dots x_{n-1})-$ parinkta funkcija, tolydi nagrinėjamoje srityje.

Tarkime duota lygtis

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z).$$

Tada Koši uždavinio problema yra tokia: rasti sprendinį (paviršių) $z=\varphi(x,y)$, išpildantį sąlygas $z=f(y)$, kai $x=x_0$, t.y. paviršių, kuriam priklauso kreivė $z=f(y)$, esanti plokštumoje $x=x_0$.

Kiek plačiau panagrinėkime pirmos eilės tiesines dif. lygtis dalinėmis išvestinėmis.

6.2 Tiesinės dif. lygtys, dalinėmis išvestinėmis

1. Visų pirma panagrinėkime homogenines dif. lygtis. Kaip ir minėjome, tiesine homogenine dif. lygtimi, dalinėmis išvestinėmis vadinsime lygybę:

$$f_1(x_1,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{6.3}$$

Nesunku suprasti, kad funkcija $\varphi\equiv c$, kokioje nors srityje, yra šios lygties sprendinys minėtoje srityje. Laikysime, kad visi koeficientai yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos kokioje nors srityje D. Be to, šioje srityje bent viena iš funkcijų f_i nėra tapatingai lygi nuliui. Tarkime, kad $(x_1^0,\dots x_n^0)\in D$, $f_n(x_1^0,\dots x_n^0)\neq 0$.

Aptarsime bendrą šios lygties sprendimo metodą. Taigi, turime (6.3) dif. lygtį. Sudarykime simetrinę diferencialinių lygčių sistemą, naudodamiesi (6.3) lygtimi:

$$\frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{f_1(x_1,\dots,x_n)}} = \frac{\mathrm{dx_2}}{\mathrm{f_2(x_1,\dots,x_n)}} = \dots = \frac{\mathrm{dx_n}}{\mathrm{f_n(x_1,\dots,x_n)}}. \tag{6.4}$$

(6.4) dif. lygtis yra vadinama *simetrine dif. lygčių sistema, atitinkančia* (6.3) *lygtį.* (Suprantama, kad tokią sistemą galime užrašyti tiktai toje srityje, kurioje bent viena iš funkcijų $f_i\neq 0$.)

Pastebėsime, kad (6.4) sistema turi $n-1$ nepriklausomus integralus, tarkime

$$\phi_1(x_1,\dots x_n),\ \phi_2(x_1,\dots x_n),\ \dots,\phi_{n-1}(x_1,\dots x_n), \tag{6.5}$$

apibrėžtus kokioje nors srityje D. Kiekvienas iš šių integralų yra (6.3) dif. lygties sprendinys. Dar daugiau, bet kokia, tolydžiai diferencijuojama funkcija F,

$$\phi = F(\phi_1,\dots \phi_{n-1})$$

bus (6.4) sistemos integralu ir tuo pačiu (6.3) dif. lygties sprendiniu.

Taigi, (6.3) lygtis turi tokią sprendinių šeimą:

$$u = F(\phi_1,\dots \phi_{n-1}).$$

Ši sprendinių šeima, priklausanti nuo laisvai pasirenkamos funkcijos F, bus (6.3) dif. lygties bendrasis sprendinys.

Aptarsime Koši uždavinio problemą šiuo atveju. Tarkime, kad reikia rasti (6.3) dif. lygties bendrąjį sprendinį $u = f(x_1,\dots x_n)$, tenkinantį pradines sąlygas:

$$u = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \text{kai}\ x_n = x_n^0.$$

Elgsimės tokiu būdu: į (6.4) sistemos (6.5) bendruosius integralus vietoj nežinomojo x_n įrašome jo reikšmę x_n^0, gauname

$$\theta_1 = \phi_1(x_1,\dots x_{n-1},x_n^0),\ \theta_2 = \phi_2(x_1,\dots x_{n-1},x_n^0),\ \dots,$$

$$\theta_n = \phi_{n-1}(x_1,\dots x_{n-1},x_n^0). \tag{6.6}$$

Išsprendę (6.6) sistemą kintamųjų $x_i,\ i=1,\dots,n$ atžvilgiu gauname tokias lygybes:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1(\theta_1,\dots \theta_{n-1}),\\ x_2 = \rho_2(\theta_1,\dots \theta_{n-1}),\\ \dots,\\ x_{n-1} = \rho_{n-1}(\theta_1,\dots \theta_{n-1}). \end{cases} \tag{6.7}$$

Įrašę į dešiniąją lygybės $u = \varphi(x_1,\dots x_{n-1})$ pusę, kintamųjų x_i vietoje, funkcijas ρ_i ir šių funkcijų kintamuosius θ_i pakeitę funkcijomis ϕ_i, gausime funkciją

$$u = \varphi\big(\rho_1(\phi_1,\dots,\phi_{n-1}),\dots,\rho_{n-1}(\phi_1,\dots,\phi_{n-1})\big).$$

Paskutinioji funkcija bus Koši uždavinio sprendinys.

Pavyzdžiui, dviejų kintamųjų funkcijos atveju, bendrojo sprendinio ieškome tokioje formoje:

$$z = f(x,y),\ \ z = \varphi(y),\ x = x_0.$$

Tada (6.7) sistemos analogas bus viena lygtis $\theta = \phi(x_0,y)$. Išsprendę y atžvilgiu gauname, $y = \rho(\theta)$. Tada Koši uždavinio sprendinys bus toks:

$$z = \varphi\big(\rho(\phi(x,y))\big).$$

2. Aptarsime nehomogeninės dif. lygties sprendimo būdus.

Tarkime, kad duota tiesinė, nehomogeninė lygtis

$$f_1(x_1,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + f_n(x_1,\dots x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$R(x_1,\dots,x_n,u), \tag{6.8}$$

čia funkcijos $f_i,\ i = 1, \ldots, n$ yra tolydžiai diferencijuojamos taško $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ir $f_n(X_0) \neq 0$. Tada šią lygtį galime pakeisti tokia simetrinių dif. lygčių sistema:

$$\frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{f_1(x_1, \ldots, x_n)}} = \frac{\mathrm{dx_2}}{\mathrm{f_2(x_1, \ldots, x_n)}} = \ldots = \frac{\mathrm{dx_n}}{\mathrm{f_n(x_1, \ldots, x_n)}} = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{R}},$$

kurią vadinsime simetrine dif. lygčių sistema, atitinkančia (6.8) dif. lygtį dalinėmis išvestinėmis.

Tarkime, kad

$$\phi_1(x_1, \ldots x_n, u),\ \phi_2(x_1, \ldots x_n, u),\ \ldots, \phi_{n-1}(x_1, \ldots x_n, u), \tag{6.9}$$

yra nepriklausomi šios sistemos integralai. Tada funkciją

$$\Phi(\phi_1, \ldots, \phi_n) = 0,$$

čia Φ yra laisvai pasirinkta funkcija, vadinsime bendruoju (6.8) lygties (neišreikštiniu) sprendiniu. Jeigu išsprendžiame šią lygtį u atžvilgiu, tai gauname bendrąjį sprendinį užrašytą išreikštinėje formoje.

(6.2) lygties Koši uždavinys sprendžiamas tokiu būdu. Tarkime, kad reikia rasti sprendinį $u = f(x_1, \ldots x_n)$, tenkinantį pradines sąlygas:

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \text{ kai } x_n = x_n^0.$$

Elgsimės tokiu būdu: į (6.8) sistemos (6.9) bendruosius integralus vietoj nežinomojo x_n įrašome jo reikšmę x_n^0, gauname

$$\theta_1 = \phi_1(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n^0, u),\ \theta_2 = \phi_2(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n^0, u),\ \ldots,$$

$$\theta_n = \phi_{n-1}(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n^0, u). \tag{6.10}$$

Išsprendę (6.10) sistemą kintamųjų $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ atžvilgiu gauname:

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1(\theta_1, \ldots \theta_n), \\ x_2 = \rho_2(\theta_1, \ldots \theta_n), \\ \ldots, \\ x_{n-1} = \rho_{n-1}(\theta_1, \ldots \theta_n), \\ u = \rho(\theta_1, \ldots \theta_n) \end{cases} \tag{6.11}$$

Įrašę į dešiniąją lygybės $u = \varphi(x_1, \ldots x_{n-1})$ pusę, kintamųjų $u, x_i,\ i = 1, \ldots, n$ vietoje, $\rho,\ \theta_i,\ i = 1, \ldots, n$, atitinkamai, ir pakeitę funkcijas $\theta_i,\ i = 1, \ldots, n$ funkcijomis $\phi_i,\ i = 1, \ldots, n$ gausime funkciją

$$\rho(\phi_1, \ldots, \phi_n) = \varphi\big(\rho_1(\phi_1, \ldots, \phi_n), \ldots, \rho_{n-1}(\phi_1, \ldots, \phi_n)\big).$$

Paskutinioji funkcija bus Koši uždavinio sprendinys.

Uždaviniai

Išspręskite pateiktas dif. lygtis dalinėmis išvestinėmis:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$

2. $(1 + x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$ kai $z = y^2,\ x = 0;$

3. $(x^3 + 3xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$

4. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0;$ kai $u = \ln z - \dfrac{1}{y},\ x = 1;$

$$\mathbf{5}.\ \frac{\partial z}{\partial x} - (2y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = y + 2z;$$

$$\mathbf{6}.\ yz\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0;\ \text{kai}\ \ z = x^2,\ y = 1;$$

$$\mathbf{7}.\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u;\ \ u = \frac{1}{2}(y + 2),\ x = 2$$

$$\mathbf{8}.\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z;\ z = y,\ x = 1;$$

$$\mathbf{9}.\ (z - y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x - z)\frac{\partial z}{\partial y} + = y - x;$$

VII. OPERACINIS SKAIČIAVIMAS IR DIF. LYGTYS

Metodo, apie kurį trumpai kalbėsime šiame skyrelyje esmė yra tokia: pakeisti diferencialinės lygties (dif. lygčių sistemos) sprendimą kokios nors algebrinės lygties sprendimu. Ypač efektyviai šis metodas yra naudojamas sprendžiant tiesines dif. lygtis su pastoviais koeficientais.

7.1 Įvadines pastabos

Tarkime, kad duota dif. lygtis

$$x'(t) + x(t) = 1,$$

kai $x(0) = 0$. Rasime atskirą sprendinį, kai $t > 0$. Padauginę šios lygties abi puses iš daugiklio e^{-pt} ir integruodami intervale $(0, \infty)$ gauname

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x'(t)\mathrm{dt} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x(t)\mathrm{dt} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{dt}. \tag{7.1}$$

Suskaičiavę dešinėje lygybės pusėje esantį netiesioginį integralą gauname, kad

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{dt} = \frac{1}{p}. \tag{7.2}$$

Pastebėsime, kad (7.1) kairiosios pusės pirmasis integralas gali būti pakeistas tokia suma:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x'(t)\mathrm{dt} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{dx'(t)} = \mathrm{e}^{-pt}x(t)|_0^\infty + p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x(t)\mathrm{dt}.$$

Laikysime, kad ieškomasis sprendinys turi savybę:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-pt}x(t) = 0.$$

Taigi, (7.1) reiškinio pirmasis integralas yra toks:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x'(t)\mathrm{dt} = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x(t)\mathrm{dt}.$$

Taigi, (7.1) reiškinį galime perrašyti tokiu būdu:

$$(p + 1)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{p}.$$

Iš paskutiniosios lygties gauname, kad

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Remdamiesi (7.2) lygybe galime teigti, kad

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p+1)t}\mathrm{dt} = \frac{1}{p+1}. \tag{7.3}$$

Tada,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}x(t)\mathrm{dt} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}(1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{dt}.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad $x(t) = 1 - \mathrm{e}^t$. Taigi, gavome dif. lygties sprendinį. Nesunku įsitikinti, kad pastarasis sprendinys tenkina pradines sąlygas.

7.2 Laplaso transformacija. Šios transformacijos skaičiavimo taisyklės

Tarkime, kad $t \geq 0$.
Apibrėžimas *Realaus argumento funkcijos* $f(t)$, *Laplaso transformacija vadinsime tokį reiškinį*

$$F(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{dt},$$

čia $p \geq 0$ *arba kompleksinis skaičius.* Funkcija $f(t)$ yra vadinama originalu, o $F(p)$, šios funkcijos vaizdu.

Priskyrimą, kai funkcijai $f(t)$ yra priskiriamas jos vaizdas $F(p)$ žymėsime $L(f(t)) = F(p)$ arba f(t)=:F(p), o atvirkštinį priskyrimą t.y. kai vaizdui priskiriamas originalas žymėsime taip: $L^{-1}\big(f(t)\big) = f(t)$ arba $F(p) =: f(t)$.

Pastebėsime, kad pastarieji priskyrimai atliekami naudojant netiesioginius integralus, taigi, natūralu nurodyti sąlygas, kada šie integralai egzistuoja. Pasirodo, kad šis netiesioginis integralas egzistuoja, jeigu originalas $f(t)$ tenkina tokia sąlygas:

1^0) Bet kokiame baigtiniame intervale funkcijos $f(t)$ ir $f'(t)$ turi ne daugiau negu baigtinį, pirmos rūšies trūkio taškų skaičių;

2^0) $f(t) \equiv 0, \quad$ kai $t < 0$;

3^0) egzistuoja realūs skaičiai $M > 0$ ir $s \geq 0$ tokie, kad $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{st}$.

Aukščiau išvardintos savybės užtikrina, kad duotos funkcijos $f(t)$ Laplaso integralas egzistuotų.

Nurodysime laplaso transormacijos skaičiavimo taisykles, kurios bus reikalingos sprendžiant dif. lygtis.

1) *Tiesiškumo savybė.* Tarkime, kad $c_i, \ f_i, \quad i = 1, \dots n$ yra n konstantų ir tiek pat funkcijų. Jeigu funkcijų f_i vaizdai yra funkcijos F_i, t.y $f_i(t) = F_i(p), \quad i = 1, \dots, n$, tai tada originalų tiesinio darinio vaizdas yra lygus šių vaizdų tiesiniam dariniui, su tomis pat konstantomis, t.y.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i t =: \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p).$$

2) *Panašumo savybė.* Tarkime, kad $a > 0$ ir $f(t) =: F(p)$. Tada

$$f(at) = \frac{1}{a}F\big(\frac{p}{a}\big).$$

3) *Postūmio savybė.* Visiems p_0 teisingas sąryšis:

$$\mathrm{e}^{-p_0 t}f(t) =: F(p+p_0).$$

3) Originalo "vėlavimo" savybė. Tegu $t_0 > 0$. Tada

$$f(t-t_0) =: \mathrm{e}^{-pt_0}F(p).$$

4) *Originalo "aplenkimo" savybė.* Tegu $t_0 > 0$. Tada

$$f(t+t_0) =: \mathrm{e}^{pt_0}\big(F(p) - \int\limits_0^{t_0} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t\big).$$

Įrodysime kai kurias savybes, likusių įrodymą palikdami skaitytojui.
2) savybės įrodymas. Užrašykime funkcijos $f(at)$ Laplaso transformaciją. Turime, kad

$$L(f(at)) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(at)\mathrm{d}t.$$

Atlikę kintamųjų keitimą $u = at$, čia $a > 0$, pastarąjį integralą perrašome taip:

$$L(f(at)) = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p}{a}u} f(u)\mathrm{d}u.$$

Tuo ir baigiame šios savybės įrodymą.
Panašiu būdu įrodomos ir likusios keturios savybės.
6) Originalo diferencijavimo savybė.
Tarkime, kad funkcija $f(t) \in C^1[0,\infty)$, ir be to $f'(t)$ tenkina $1^0) - 3^0)$ savybes.
Tada, jei $f(t) =: F(p)$, tai $f'(t) =: pF(p) - f(0)$.
Tarkime, kad funkcija $f(t) \in C^n[0,\infty)$, ir be to $f^{(n)}(t)$ tenkina $1^0) - 3^0)$ savybes.
Tada, jei
$f(t) =: F(p)$, tai $f^{(n)}(t) =: p^nF(p) - \big(p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\big)$.
Jeigu $f^{(i)}(0) = 0,\ \ i = 1,\ldots n$, tai $f^{(n)}(t) =: p^nF(p)$.
7) Originalo integravimo savybė.
Tarkime, kad funkcija $f(t) \in C^1[0,\infty)$, ir be to $f'(t)$ tenkina $1^0) - 3^0)$ savybes. Tada,

$$\int\limits_0^t f(u)\mathrm{d}u =: \frac{1}{p}F(p).$$

8) Vaizdo diferencijavimo savybė. Tarkime, kad $f(t) =: F(p)$. Tada:
1) $-tf(t) =: F'(p)$;
2) $(-1)^n t^n f(t) =: F^{(n)}(p)$.
9) Vaizdo integravimo savybė. Tarkime, kad
$f(t)/t$ tenkina $1^0) - 3^0)$ savybes. Tada,

$$\frac{f(t)}{t} =: \int\limits_p^{\infty} F(u)\mathrm{d}u.$$

Tarkime, kad duotos dvi funkcijos $f_1(t),\ f_2(t)$ apibrėžtos kokiame nors intervale (a,b). Šių funkcijų *sąsūka*, vadinsime funkciją $f(t)$,

$$f(t) = \int_a^b f_1(u)f_2(t-u)\mathrm{d}u = f_1(t) * f_2(t.)$$

Fizikiniuose taikymuose prasmę turi tik laiko intervalas $[0,t]$, todėl nagrinėsime tik tokį intervalą.

Nesunku suprasti, kad sąsūkos operacija yra komutatyvi bei asociatyvi, t.y.
$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t),\ \ \big(f_1(t) * f_2(t)\big) * f_3(t) = f_1(t) * \big(f_2(t) * f_3(t)\big)$.
Šias savybes siūlome įrodyti skaitytojui.

Sakykime, kad funkcijos $f_1(t),\ f_2(t)$ tenkina $1^0) - 3^0)$ sąlygas. Tada teisigas sąryšis:

$$f_1(t) * f_2(t) =: F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Jeigu be to $f_1, f_2 \in C^1[0, \infty)$, tai

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big(f_1(t) * f_2(t)\Big) =: pF_1(p) \cdot F_2(p).$$

Dar kartą grįžkime prie aukščiau nagrinėtos lygties, t.y.

$$x'(t) + x(t) = 1, \ \ x(0) = 0.$$

Tegu $x(t) =: X(p)$. Remdamiesi originalo diferencijavimo taisykle turime, kad

$$x'(t) =: pX(p).$$

Esame jau suskaičiavę, kad $x(t) \equiv 1$ vaizdas yra $1/p$. Tada, gauname, kad diferencialinės lygties vaizdas yra toks:

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p}.$$

Iš pastarojo sąryšio gauname, kad

$$X(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Grįžkime nuoi vaizdo prie originalo, naudodamisi tomis pačiomis savybėmis. turime, kad

$$\mathrm{e}^{-t} =: \frac{1}{p+1}.$$

Tada,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} =: 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

arba $x(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.

Dar kartą atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad nagrinėjamos funkcijos yra lygios nuliui, jeigu tik $t < 0$. Apibrėžkime vienetinę funkciją

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \ t \geq 0 \\ 0, & \text{jei } \ t < 0 \end{cases}.$$

Tada,

$$\mathrm{e}^{-t}\sigma(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t}, & \text{jei } \ t \geq 0 \\ 0, & \text{jei } \ t < 0 \end{cases}.$$

Pateiksime kai kurių funkcijų vaizdus, Laplaso transformacijos atžvilgiu.

nr.	f(t)	F(p)
1)	s (t)	$\frac{1}{p}$
2)	e^{-ta}	$\frac{1}{p+a}$
3)	$\sin ta$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
4)	$\cos ta$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
5)	$\mathrm{sh}ta$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6)	$\mathrm{ch}ta$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7)	t	$\frac{1}{p^2}$

8)	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9)	$\sin(at)\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{a}{(p+a)^2+a^2}$
10)	$\cos(at)\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+a^2}$
11)	$\mathrm{sh}(at)\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{a}{(p+a)^2-a^2}$
12)	$\mathrm{ch}(at)\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{a}{(p+a)^2+a^2}$
13)	$t\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
14)	$t^n\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
15)	$t\sin(at)$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
16)	$t\cos(at)$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
17)	$\frac{1}{h}\sin(ht)\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{1}{p^2+2ap+k^2}$
18)	$\frac{1}{h}\mathrm{sh}(ht)\mathrm{e}^{-ta}$	$\frac{1}{p^2+2ap+k^2}$

čia $h = \sqrt{a^2 - k^2}$.

7.3 Operacinių metodų taikymai

Tarkime, kad reikia rasti dif. lygties su pastoviais koeficientais

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t), \tag{7.3}$$

sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Be to laikome, kad ieškomasis sprendinys ir funkcija $f(t)$ tenkina $1^0) - 3^0)$ sąlygas.

Tegu $x(t) =: X(p)$ ir $f(t) =: F(p)$. Naudodamiesi originalo diferencijavimo taisyklėmis gauname, kad

$$\begin{cases} x'(t) =: pX(p) - x_0, \\ x''(t) =: p^2X(p) - \big(px_0 + x'_0\big), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{(n-1)}(t) =: p^{n-1}X(p) - \big(p^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{(n-2)}\big), \\ x^{(n)}(t) =: p^nX(p) - \big(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + \ldots + x_0^{(n-1)}\big). \end{cases} \tag{7.4}$$

Žinome, kad Laplaso transformacija yra tiesinė, taigi, (7.3) lygybės dešiniosios pusės vaizdą gausime (7.4) sistemos eilutes daugindami iš koeficientų a_i, $i = 1, \ldots n-1$ ir $a_n = 1$ bei sudėdami. beje, minima suma turės būti lygi dešiniosios pusės vaizdui $F(p)$.

Taigi gauname, kad

$$\varphi(p)X(p) - \psi(p) = F(p), \quad \varphi(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n. \tag{7.5}$$

Pastaroji lygtis yra vadinama (7.3) dif. lygtį atitinkančia *operatorine lygtimi.*

Beje, nesunku suprasti, kad $\varphi(p)$ yra (7.4) dif. lygties charakteringasis polinomas, o

$$\psi(p) =: a_{n-1}x_0 + a_{n-2}\big(px_0 + x'_0\big) + \ldots + a_1\big(p^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{(n-2)}\big) +$$

$$p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + \ldots + x_0^{(n-1)}.$$

Pastebėsime, kad jeigu pradinės sąlygos yra nulinės, tai tada $\psi(p) \equiv 0$ ir kairioji (7.4) lygybės pusė yra funkcija $\varphi(p)X(p)$.

(7.5) lygtyje išsprendę $X(p)$ gauname

$$X(p) = \frac{F(p) + \psi(p)}{\varphi(p)}.$$

Grįždami prie originalo $x(t)$, gausime ieškomąjį dif. lygties sprendinį. Beje, pastarąjį randame naudodmi aukščiau pateikta lentele.

Pateiksime pavyzdį. Išspręskime tokią dif. lygtį:

$$x'' - 3x' + 2x = \mathrm{e}^t, \ \ x(0) = x'(0) = 0.$$

Randame šią lygtį atitinkančią operatorinę lygtį:

$$p^2X(p) - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{1}{p-1},$$

arba

$$X(p)\big(p^2 - 3p + 2\big) = \frac{1}{p-1}.$$

Iš paskutiniosios gauname, kad

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2-3p+2)} = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)}.$$

Naudodami neapibrėžtinių koeficientų metodą gauname, kad

$$X(p) = -\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-2}.$$

Perėję prie atitinkamų originalų gauname atskirąjį dif. lygties sprendinį

$$x(t) = -\mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}.$$

Rasime lygties

$$x''(t) + k^2x = a\sin(kx)$$

bendrąjį sprendinį. Pastebėsime, kad šiuo atveju laikome, kad $x(0) = c_1, \ x'(0) = c_2$.

Šią dif. lygtį atitinkanti operatorinė lygtis yra tokia:

$$\big(p^2X(p) - (c_1p + c_2)\big) + k^2X(p) = \frac{ak}{p^2+k^2}.$$

Išsprendę $X(p)$ atžvilgiu gauname, kad

$$X(p) = \frac{ak}{(p^2+k^2)^2} + c_1\frac{p}{p^2+k^2} + c_2\frac{1}{p^2+k^2}.$$

Naudodami neapibrėžtinių koeficientų metodą gauname, kad

$$\frac{ak}{(p^2+k^2)^2} = \frac{a}{2k}\big(\frac{k^2-p^2}{(p^2+k^2)^2} + \frac{1}{p^2+k^2}\big).$$

Tada,

$$X(p) = \frac{a}{2k}\big(\frac{k^2-p^2}{(p^2+k^2)^2} + \frac{1}{p^2+k^2}\big) + c_1\frac{p}{p^2+k^2} + c_2\frac{1}{p^2+k^2}.$$

Perėję prie originalų turime, kad pradinės dif. lygtie sprendinys yra toks:

$$x(t) = \frac{a}{2k}\big(-t\sin(kt) + \frac{1}{k}\sin(kt) + c_1\cos(kt) + \frac{c_2}{k}\sin(kt)\big).$$

7.4 Operaciniai metodai dif. lygčių sistemoms spręsti

Tarkime, kad duota pirmos eilės dif. lygčių sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}x_k(t) = f_1(t), \\ x_2'(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}x_k(t) = f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n'(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}x_k(t) = f_n(t), \end{cases} \tag{7.5}$$

tenkinanti pradines sąlygas:

$$x_k(0) = x_{k0}, \quad k = 1, \dots, n$$

be to $L\big(f_k(t)\big) = F_k(p)$ ir $L\big(x_k(t)\big) = X_k(p)$.

Dabar galime užrašyti šią sistemą atitinkančių operatorinių lygčių sistemą, t.y.

$$\begin{cases} pX_1(p) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}X_k(p) = F_1(p) + x_{10}, \\ pX_2(p) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}X_k(p) = F_2(p) + x_{20}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ pX_n(p) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}X_k(p) = F_n(p) + x_{n0}. \end{cases} \tag{7.5}$$

Kiekvieną iš šių sistemos lygčių išsprendę $X_k(p)$ atžvilgiu ir nuo vaizdo perėję prie originalo gausime atskirąjį sistemos sprendinį išpildantį pradines sąlygas.

Beje, panašiu būdu sprendžiamos ir aukštesnių eilių dif. lygčių sistemos.

Išspręskime tokią dif. lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x'(t) - 4x(t) + 3y(t) = \sin t, \\ y'(t) - 2x(t) + y(t) = -2\cos t, \end{cases} x(0) = y(0) = 1.$$

Šią dif. lygtį atitinkanti operatorinė sistema yra tokia:

$$\begin{cases} pX(p) - 4X(p) + 3Y(p) = \frac{1}{p^2+1}, \\ pY(p) - 2X(p) + Y(p) = -\frac{2p}{p^2+1}, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} (p-4)X(p) + 3Y(p) = \frac{1}{p^2+1}, \\ -2X(p) + (p+1)Y(p) = -\frac{2p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Išsprendę kintamųjų $X(p)$ $Y(p)$ atžvilgiu šią sistemą gauname,

$$X(p) = \frac{7p+1}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}, \; Y(p) = -\frac{2(p^2-4p-1)}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}.$$

Išskaidę šiuos racionalius reiškinius trupmenų sumomis ir perėję prie originalų gauname

$$\begin{cases} x(t) = 3\mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^{t} + \cos t - 2\sin t, \\ y(t) = 2\mathrm{e}^{2t} - 4\mathrm{e}^{t} + 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$$

Taikymai fizikoje

1. *Harmoninių svyravimų uždavinys*

Duota dif. lygtis $x''(t) + kx(t) = 0, \;\; x(0) = x_0, x'(0) = v_0$.

Šią dif. lygtį atitinkanti operatorinė lygtis yra tokia:

$$\big(p^1 X(p) - (x_0 p + v_0) + k^2 X(p) = 0\big),$$

arba

$$X(p) = x_0 \frac{p}{p^2 + k^2} + v_0 \frac{1}{p^2 + k^2}.$$

Šio vaizdo originalas yra toks:

$$X(t = x_0 \cos qkt) + \frac{v_0}{k} \sin(kt).$$

2. *Gęstantys svyravimai.*
Šių svyravimų lygtis yra tokia:

$$x''(t) + 2nx'(t) + k^2 x(t) = 0,\ x(0) = x_0, x'(0) = v_0.$$

J1 atitinkanti operatorinė lygtis yra

$$\big(p^2 X(p) - (x_0 p + v_0)\big) + 2n\big(pX(p) - x_0\big) + k^2 X(p) = 0.$$

Operatorinės lygties sprendinys

$$X(p) = x_0 \frac{p}{p^2 + 2np + k^2} + (v_0 + 2nx_0) \frac{1}{p^2 + 2np + k^2}.$$

Tarkime, kad $h = \sqrt{k^2 - n^2} > 0$. Tada

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-nt}\big(\cos(ht) - \frac{n}{k_1} \sin(ht)\big) + \frac{v_0 + 2nx_0}{h} \mathrm{e}^{-nt} \sin(ht).$$

Tuo atveju, kai $h = 0$, gauname tokį operatorinės lygties sprendinį:

$$X(p) = \frac{x_0}{p + n} + \frac{v_0 + nx_0}{(p + n)^2}.$$

Tada originalo reikšmė bus tokia

$$x(t) = \mathrm{e}^{-nt}\big(x_0 + (v_0 + nx_0)t\big).$$

3. *Elektriniai svyravimai grandinėje, kai elektrovaros jėga yra pastovi.*
Išspręskime nagrinėjamu metodu jau mums žinomą dif. lygtį;

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{LC} i(t) = 0,\ i(0) = 0,\ i'(0) = \frac{E}{L}.$$

Šią dif. lygtį atitinanti operatorinė lygtis yra tokia:

$$\big(p^2 J(p) - \frac{E}{L}\big) + \frac{R}{L} pJ(p) + \frac{1}{LC} J(p) = 0.$$

Šios lygties sprendinys yra

$$J(p) = \frac{E}{L} 1/\big[p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}\big].$$

Pažymėkime $R/L = 2\delta$.
1. Tarkime, kad $1/(LC) - R^2/(4L^2) = \omega^2 > 0$. Perėję nuo vaizdo prie originalo gauname, kad

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(t\omega).$$

Šiuo atveju $i(t)$ apibrėžia gęstančius svyravimus.

2. Tarkime, kad $1/(LC) - R^2/(4L^2) = -\beta^2 > 0$. Perėję nuo vaizdo prie originalo gauname, kad

$$i(t) = \frac{E}{\beta L}\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{sh}(t\beta).$$

Šiuo atveju apibrėžiami neperiodiniai svyravimai, kurių grandinėje nebūna.

3. Tarkime, kad $1/(LC) - R^2/(4L^2) = 0$. Perėję nuo vaizdo prie originalo gauname, kad
Šiuo atveju operatorinė lygtis yra

$$J(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p+\delta)^2},$$

o dif. lygties sprendinys yra

$$i(t) = \frac{E}{L}t\mathrm{e}^{-\delta t},$$

taigi irgi neperiodinė srovė, kurios praktikoje nėra.

$$i(t) = \frac{E}{\omega L}\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(t\omega).$$

Uždaviniai

Naudodami operacinį metodą išspręskite pateiktas dif. lygtis bei dif. lygčių sistemas.
Raskite sprendinius, tenkinančius pradines sąlygas:

$$\mathbf{1}.\ y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0;$$

$$\mathbf{2}.\ y''' - y' = 0, y = 1, y' = 0, y'' = 0, \ \text{kai } x = 0;$$

$$\mathbf{3}.\ y'' - y = x; y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$\mathbf{4}.\ y'' + 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{-2x}; y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Raskite bendruosius sprendinius:

$$\mathbf{5}.\ y'' + 3y' + 2y = 0;\ \ 2.\ y''' - 13y' - 12y = 0;$$

$$\mathbf{6}.\ y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0;\ \ 4.\ y''' + 8y = 0;$$

$$\mathbf{7}.\ y^{(4)} + y = 0;\ \ 6.\ y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0;$$

$$.\mathbf{8}.\ y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4;$$

Išspręskite dif. lygčių sistemas.

$$\mathbf{9}.\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 4y - z - 5x + 1, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y + 2z + x - 1, \end{cases} y(0) = z(0) = 0; \mathbf{10}.\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = z - \cos x, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = -y + \sin x, \end{cases}$$

$$y(0) = z(0) = 0;$$

$$\mathbf{11}.\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -5y + 2z + 40\mathrm{e}^{x}, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y - 6z + 9\mathrm{e}^{-x}, \end{cases} y(0) = z(0) = 0;\ \mathbf{12}.\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -y + z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = -y - 3z; \end{cases}$$

$$\mathbf{13}.\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 10x - 3y - 9z, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -18x + 7y + 18z; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = 18x - 6y - 17z \end{cases} \mathbf{14}.\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = x - z, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -6x + 2y + 6z; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = 4x - y - 4z \end{cases}$$

15. Raskite priverstinių svyravimų, kai nėra išorinio pasipriešinimo, lygties sprendinį, jeigu

$$x''(t) + k^2x(t) = q\sin(\omega t),\ \ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0.$$