## IV. TIESINĖS $n-$OS EILĖS DIF. LYGTYS

### 4.1 Homogeninės dif. lygtys. Fundamentalioji sprendinių sistema

*Tiesine $n-$ os eilės diferencialine lygtimi vadinsime reiškinį:*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{4.1}$$

laikome, kad funkcijos $p_i(x),\ \ i = 1, \ldots n$ ir $f(x)$ yra apibrėžtos ir tolydžios intervale $[a, b]$. Žinome, kad tolydžios funkcijos uždarame intervale yra aprėžtos. Todėl sprendinio egzistavimo ir vienetinumo teoremos sąlygos yra išpildytos ne tik mažoje pradinio taško aplinkoje, bet ir visame intervale, kuriame apibrėžtos funkcijos $p_i(x)$.

Tarkime, kad duotas skaičių rinkinys $y_0, y_0', \ldots y_n^{(n)}$. Sakysime, kad funkcija $y(x)$ yra (4.1) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas $y_0, y_0', \ldots, y_n^{(n)}$, taške $x_0$, jeigu funkcijai ir jos išvestinėms galioja sąryšiai:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Suformuluokime sprendinio egzistavimo ir vienetinumo teoremą.

Tarkime, kad (4.1) lygties koeficientai $p_i(x), i = 1, \ldots, n$ yra tolydžios funkcijos, kokiame nors intervale $[a, b]$. Tada egzistuoja vienintelė funkcija $y = \varphi(x)$ apibrėžta ir tolydi intervale $[a, b]$, kuri yra (4.1) lygties sprendinys, išpildantis pradines sąlygas, jeigu $x_0 \in (a, b)$.

Jeigu (4.1) lygybės funkcija $f(x) \equiv 0$, tai tada šią lygtį vadinsime homogenine. Beje, pastebėsime, kad homogeninė diferencialinė lygtis visuomet turi sprendinį $y = 0$, išpildantį pradines sąlygas

$$y = y' = \ldots = y^{(n-1)} = 0, \ \text{kai}\ x = x_0.$$

Pažymėkime

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y.$$

Nesunku matyti, kad šis priskyrimas apibrėžia funkciją $L(y) \in C(a, b)$, jeigu $y \in C^n(a, b)$. Remdamiesi šiuo priskyrimu (4.1) lygtį galime perrašyti taip:

$$L(y) = f(x), \tag{4.2}$$

o homogeninę lygtį

$$L(y) = 0. \tag{4.3}$$

Beje, nesunku suprasti, kad

$$L(cy) = cL(y)$$

ir

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Iš paskutiniųjų sąryšių išplaukia, kad jeigu $y$ yra (4.3) diferencialinės lygties sprendinys, tai ir funkcija $cy$ yra tos pačios lygties sprendinys. Dar daugiau, jeigu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yra (4.1) diferencialinės lygties sprendiniai, tai ir šių sprendinių tiesinis darinys

$$c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$$

taip pat yra (3) dif. lygties sprendinys.

Remdamiesi paskutiniaisias samprotavimais galime tvirtinti, kad (4.3) diferencialinės lygties sprendinių aibė $S$ yra tiesinė erdvė (ką vadiname tiesine erdve), kurios elementai yra funkcijos $y \in C^n(a, b)$. Koks šios tiesinės erdvės matavimas. T.y. koks minimalus šios erdvės elementų skaičius, kurių tiesiniais dariniais galime išreikšti visus erdvės elementus? Atsakysime į šį klausimą, bet prieš tai pateiksime keletą savokų.

**Apibrėžimas** *Sakysime, kad funkcijos $y_1(x), \ldots y_n(x),\ \ x \in < a, b >$ yra tiesiškai nepriklausomos intervale $< a, b >$, jeigu lygybė*

$$c_1y_1 + \ldots + c_ny_n \equiv 0,\ x \in < a, b > \tag{4.4}$$

*galima tik tada, kai $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Priešingu atveju, t.y. jei (4.4) lygybė galioja, kai tarp konstatų $c_i$ egzistuoja ir nenulinių, tai sakysime, kad minimos funkcijos yra tiesiškai priklausomos.*

Nesunku suprasti, kad jei tarp funkcijų $y_1, \ldots y_n$ rinkinio yra bent viena tapatingai lygi nuliui, tai minimas rinkinys bus tiesiškai priklausomas realiųjų skaičių aibėje.

Pavyzdžiui rinkinys $1, x, \ldots, x^{(k-1)},\ x \in (a, b)$ yra tiesiškai nepriklausomas (kodėl?).

Tiesiškai nepriklausoma funkcijų, priklausančių aibei $S$ sistema yra vadinama *fundamentaliąja sprendinių sistema.*

Tarkime, kad $y_1, \ldots, y_n$ yra fundamentali (4.3) dif. lygties sprendinių sistema, apibrėžta intervale $< a, b >$. Tada determinantą

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

vadinsime *Vronskio determinantu* arba *Vronskianu.* Pasirodo, kad teisinga tokia teorema:

**4.1 Teorema** *Tarkime, kad funkcijos $y_i \in C^n(a, b),\ i = 1, \ldots n$. Jeigu funkcijų sistema $y_1, \ldots y_n$ yra tiesiškai nepriklausoma intervale $(a, b)$, tai šios funkcijų sistemos Vronskianas tapatingai lygus nuliui intervale $(a, b)$.*

$\ominus$

Turime, kad funkcijų sistema yra tiesiškai priklausoma. Taigi, egzistuoja nenulinis konstantų rinkinys $a_1, \ldots, a_n$, toks, kad tiesinis darinys

$$a_1y_1 + \ldots + a_ny_n \equiv 0,\ x \in (a, b).$$

Tarkime, kad $a_n \neq 0$. Tada

$$y_n = -\frac{a_1}{a_n}y_1 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y_{n-1} \tag{4.5}.$$

Sudarykime šios sistemos Vronskianą, pakeisdami paskutiniąjį Vronskiano stulpelį (4.5) reiškiniu. Gauname tokį Vronskianą:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & -\frac{a_1}{a_n}y_1 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \ldots & (-\frac{a_1}{a_n}y_1 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y_{n-1})' \\ \ldots\ldots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & (-\frac{a_1}{a_n}y_1 - \ldots - \frac{a_{n-1}}{a_n}y_{n-1})^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Nesunku suprasti, kad paskutinysis determinantas yra lygus nuliui, kadangi užrašę paskutinįjį determinantą $n-1$ determinantų suma gau- sime, kad kiekvienas minėtasis dėmuo turi du vienodus stulpelius.

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad jeigu sistemos $y_1, \ldots, y_n$ Vronskio determinantas yra nelygus nuliui bent viename taške $x_0 \in (a, b)$, tai minėtoji funkcijų sistema yra tiesiškai nepriklausoma. Tada yra teisingas toks teiginys.

**4.2 Teorema** *Tarkime, kad $y_1, \ldots, y_n$ yra tiesiškai nepriklausoma funkcijų sistema, kuri yra lygties*

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

*sprendinys. Tada šios sistemos Vronskianas $W(x) \neq 0,\ \forall x \in (a, b)$.*

$\ominus$

Šios teoremos įrodymą paliekame skaitytojui.

**Apibrėžimas** *Tiesinės, $n-$ os eilės diferencialinės lygties tiesiškai nepriklausoma sprendinių sistema $y_1, \ldots, y_n$ yra vadinama šios diferencialinės lygties fundamentaliaja sprendinių sistema (f.s.s.) .*

**4.3 Teorema** *Tarkime, kad homogeninės diferencialinės lygties koeficientai $p_i(x)$ yra tolydžios, intervale $(a, b)$, funkcijos. Tada lygtis*

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{4.6}$$

*turi f.s.s -mą.*

Tarkime, kad

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$detA \neq 0$.
Nagrinėsime (6) lygties Koši uždavinį, kai pradinės sąlygos yra to- kios:

$$y(x_0) = a_{1j},\ y'(x_0) = a_{2j}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{nj}, x_0 \in (a, b).$$

Pažymėkime sprendinį, išpildantį šias pradines sąlygas $y_j$. Beje, jis egzistuoja ir yra vienintelis (kodėl?). Kai $j = 1, \dots n$, tai gauname $n$ sprendi- nių, išpildančių nurodytas pradines sąlygas. Šios sistemos vronskianas yra nelygus nuliui intervale $(a, b)$, kadangi $W(x_0) = detA \neq 0$. Taigi, tokiu būdu sudaryta sprendinių sistema $y_1, \dots, y_n$ yra fundamentali.

Pastebėsime, kad jeigu matricos $A$ vietoje imtume vienetinę matricą $E$, tai tada sudarytoji sprendinių sistema būtų vadinama *kanonine sprendinių sistema.*

**4.4 Teorema** *Jeigu $y_1, \dots, y_n$ yra (4.6) lygties fundamentali sprendinių sistema, tai šios lygties bendrasis sprendinys yra užrašomas tokiu būdu:*

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n. \tag{4.7}$$

$\ominus$

Priminsime, kad dif. lygties sprendinį vadiname bendruoju, jeigu, bet koks šios lygties atskirasis sprendinys yra gaunamas atitinkamu būdu parinkus konstantas. Aišku, kad bet koks atskiras sprendinys nusakomas parenkant pradinius duomenis

$$y(x_0) = y_0, \dots, y'(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{4.8}$$

Apskaičiuokime (4.7) funkcijos išvestines, iki $n - 1$ eilės imtinai ir pareikalaukime, kad šios išvestinės išpildytų (4.8) sąlygas. Gauname tokią lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y_0, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad ši sistema turi vienintelį sprendinį $c_1^0, \dots c_n^0$, kadangi šios sistemos determinantas yra nelygus nuliui. Taigi, pradines (4.8) sąlygas tenkina vienintelė funkcija

$$y(x) = c_1^0 y_1 + \dots + c_n^0 y_n.$$

Bet ši funkcija yra atskiras sprendinys.

$\oplus$

Pastebėsime, kad bet kokia $n + 1$ lygties (6) sprendinių sistema yra priklausoma.

**4.5 Teorema** *Tarkime, kad duotos dvi skirtingos $n-$os eilės diferencialinės lygtys, kurių koeficientai yra tolydžios, intervale (a, b) funkcijos. Be to šios abi funkcijos turi tą pačią f.s.s-mą. Tada šios abi diferencialinės lygtys sutampa.*

$\ominus$

Šios teoremos įrodymą taip pat paliekame skaitytojui.

$\oplus$

Įrodysime teoremą, kurios dėka, turėdami nepriklausomą funkcijų sistemą galėsime atstatyti diferencialinė lygtį, kurios f.s.s. yra nurodyta nepriklausomų funkcijų sistema.

**4.6 Teorema** *Tarkime, kad funkcijos $y_1, \dots, y_n$ yra tiesiškai nepriklausomos intervale $(a, b)$ be to turi tolydines $n-$os eilės išvestines. Tarkime, kad nė viename intervalo $(a, b)$ taške, šių funkcijų Vronskianas nelygus nuliui. Tada egzistuoja vienintelė tiesinė diferencialinė lygtis, kurios f.s.s sudaro funkcijos $y_1, \dots, y_n$. Šią diferencialinę lygtį galime sudaryti tokiu būdu:*

$$\frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots\dots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{4.9}$$

$\ominus$

Nesunku suprasti, kad išskleidę (4.9) determinantą gausime diferencialinę lygtį, kurios vyr. koeficientas yra lygus 1, o kiti koeficientai yra tolydinės funkcijos. Be to visos funkcijos $y_1, \dots, y_n$ yra šios diferencialinės lygties sprendiniai. Be to, remdamiesi (4.5) teorema, galime tvirtinti, kad ši dif. lygtis yra vienintelė.

## 4.2 Nehomogeninė tiesinė $n-$ os eilės diferencialinė lygtis. Neapibrėžtinių koeficientų metodas.

Tarkime, kad duota dif. lygtis

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{4.10}$$

Tada homogeninę diferencialinę lygtį

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{4.11}$$

vadinsime (4.10) dif. lygties asocijuotąja homogenine dif. lygtimi.

**4.7 Teorema** (4.10) *nehomogeninės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys yra lygus (4.11) lygties bendrojo ir bet kokio (4.10) lygties atskirojo, sprendinių sumai.*

$\ominus$

Tarkime, kad $y_1(x)$ yra (4.10) lygties atskirasis sprendinys. Pažymėkime, $y(x) = z(x) + y_0(x)$ čia $z(x)$ yra kokia nors funkcija turinti savybę- $y(x)$ yra (4.10) lygties sprendinys. Bet tada, įrašę šį sprendinį į (4.10) lygybę gauname lygybę

$$z^(n) + p_1(x)z^{(n-1)} + \dots p_n(x)z = 0. \tag{4.12}$$

Nesunku suprasti, kad (4.10) ir (4.12) lygtys yra ekvivalenčios, t.y. bet koks (4.10) lygties sprendinys atitinka vienintelis lygties (4.12) sprendinys ir atvirkščiai. Tačiau (4.12) lygties bendrasis sprendinys yra išreiškiamas lygybe

$$z(x) = c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x),$$

o funkcijos $y_1, \dots, y_n$ yra (4.12) lygties f.s. sistema.

Taigi gavome, kad (4.10) lygties integravimas pakeičiamas jos asocijuotosios homogeninės lygties integravimo, kai yra žinomas nehomogeninės (4.10) lygties atskirasis sprendinys. Dar daugiau, pasirodo, kad lygties (4.12) f.s.sistema sudaro prielaidas rasti (4.10) lygties atskirąjį sprendinį. Metodas, kurio dėka galime tai atlikti, yra vadinamas *neapibrėžtinių koeficientų metodu.*

Tarkime, kad (4.10) dif. lygties asocijuotoji homogeninė dif. lygtis yra (4.12). Tarkime, kad $y_1, \dots, y_n$ yra (4.12) lygties f.s. sistema. Ieškokime (4.10) lygties sprendinio, laikydami, kad šis sprendinys $y_1(x)$ yra f.s. sistemos tiesinis darinys, t.y.

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x), \tag{4.13}$$

čia $c_i(x)$ yra diferencijuojamos funkcijos. Pareikalaukime, kad visos šios funkcijos $c_i$ turėtų papildomas savybes, kurių reikalavimai gaunami diferencijuojant sprendinį (4.13). Taigi, diferencijuokime (4.13) lygybę $n-1$ kartą, ir kiekvienai išvestinei kelkime papildomus reikalavimus, t.y. pabrauktuosius narius prilyginkime nuliui.

$$y_0^{'}(x) = c_1 y_1^{'} + \ldots + c_n y_n^{'} + \underline{c_1^{'} y_1 + \ldots + c_n^{'} y_n} \qquad 1)$$

$$y_0^{(1)}(x) = c_1 y_1^{(1)} + \ldots + c_n y_n^{(1)} + \underline{c_1^{'} y_1^{(1)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(1)}} \qquad 2)$$

.............................................................................................

$$y_0^{(n-1)}(x) = c_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} + \underline{c_1^{'} y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(n-2)}} \qquad n-1)$$

$$y_0^{(n)}(x) = c_1 y_1^{(n)} + \ldots + c_n y_n^{(n)} + c_1^{'} y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(n-1)} \qquad n)$$

Kaip jau ir minėjome, pabrauktąsias lygtis prilyginę nuliui gauname $n-1$ lygčių sistemą su $n$ nežinomaisias. Taigi, kad galėtume išspręsti šią sistemą teks gauti dar vieną lygtį siejančią šiuos nežinomuosius.

Padauginkime (4.13) lygtį iš $p_n(x)$, 1) lygtį iš $p_{n-1}(x)$ ir t.t. $n)$ lygtį iš 1 ir visas šias lygtis sudėkime, gausime

$$L(y_0) = c_1 L(y_1) + \ldots + c_n L(y_n) + c_1^{'} y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(n-1)}.$$

Pastebėsime, kad $y_1, \ldots, y_n$ yra (11) lygties f.s. sistema, todėl $L(y_0) = f(x)$. Todėl gauname

$$L(y_0) = f(x) = c_1 0 + \ldots c_n 0 + \ldots + c_1^{'} y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(n-1)}.$$

Prijungę šią lygtį prie aukščiau sudarytos sistemos gauname:

$$\begin{cases} c_1^{'} y_1 + \ldots + c_n^{'} y_n = 0, \\ c_1^{'} y_1^{(1)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1^{'} y_1^{(n-2)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(n-2)} = 0, \\ c_1^{'} y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n^{'} y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Taigi, turime $n$ lygčių ir $n$ nežinomųjų. Beje, šios sistemos determinantas sutampa su Vronskianu, o pastarasis nelygus nuliui. Vadinasi lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, kurį galime rasti naudodamiesi Kramerio formulėmis, t.y.

$$c_j^{'}(x) = \frac{W_j(x)}{W(x)}, j = 1, 2, \ldots n, \qquad (4.14)$$

o $W_j(x)$ yra determinantas, kuris gaunamas iš Vronskiano, pastarąjame pakeitus $j-$ ąjį stulpelį, stulpeliu

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Integruodami (4.14) lygybes gausime ieškomąsias funkcijas

$$c_j(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_j(t)}{W(t)} \mathrm{d}t + b_j,$$

čia $b_j$ konstantos.

### 4.3 Tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais

Tarkime kad duota dif. lygtis

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)yf(x),,$$

$$p_i(x) \equiv a_i, \quad i = 1 \ldots n. \tag{4.15}$$

Prieš pradėdami detalią šios lygties analizę priminsime keletą svarbių sąryšių. Visų pirma, funkciją $y : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ vadinsime realaus argumento, kompleksinių reikšmių funkcija, jei

$$y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x),$$

$u, v : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$. Kompleksinių reikšmių funkcijų veiksmai yra analogiški kompleksinių skaičių veiksmams, todėl šių veiksmų atskirai nenagrinėsime. Be to

$$y^{(n)} = u^{(n)}(x) + \mathrm{i}v^{(n)}(x), n = 1, \ldots$$

Kompleksinių reikšmių funkciją vadinsime (4.15) lygties sprendiniu, jeigu

$$L(y(x)) \equiv 0.$$

Prisiminkime, kad

$$L(y) = L(u + \mathrm{i}v) = L(u) + \mathrm{i}L(v).$$

Taigi, kompleksinių reikšmių funkcija yra (4.15) lygties sprendinys, jeigu realioji ir menamoji šio sprendinio dalys yra (4.15) lygties sprendiniai.

Grįžkime prie (4.15) dif. lygties. Norint rasti šios dif. lygties bendrąjį sprendinį mums reikia rasti $n-$ tiesiškai nepriklausomų atskirųjų sprendinių. Natūralu tikėtis, kad atskirieji sprendiniai turėtų būti tokie, kurie panašūs savo išvestinėms. Šias savybes turi eksponentinė funkcija. Pabandykime ieškoti tokių atskirųjų sprendinių $y = \mathrm{e}^{kx}$.

Pastebėsime, kad bet kokiam $k \in \mathcal{C}$ yra teisinga lygybė:

$$\left(e^{kx}\right)^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Remdamiesi šia savybe gauname, kad

$$L(y) = \mathrm{e}^{km}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n) =: \mathrm{e}^{km} l_n(k).$$

Polinomą $l_n(k)$ vadinsime *charakteristiniu polinomu.* Nesunku suprasti, kad funkcija $y = y(x)$ yra (4.15) dif. lygties sprendinys tada ir tik tada, kai $l_n(k) = 0$. Žinome, kad $n-$ ojo laipsnio polinomas turi $n$ šaknų, jeigu jis apibrėžtas kompleksinių skaičių aibėje. Tarkime kad šios šaknys yra skaičiai $k_1, \ldots, k_n$. Beje, tarp šių šaknų gali būti ir pasikartojančių. Aptarsime visus galimus atvejus.

**1)** Charakteristinio polinomo šaknys yra visos realios ir skirtingos. Šiuo atveju egzistuoja $n-$ nepriklausomų (4.15) dif. lygties sprendinių Parodysime, kad sprendinių sistema $\mathrm{e}^{k_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{k_n x}$ yra fundamentali. Tam pakanka parodyti, kad šios sistemos Vronskianas yra nelygus nuliui. Taigi

$$W = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{k_1 x} & \mathrm{e}^{k_2 x} & \ldots & \mathrm{e}^{k_n x} \\ k_1 \mathrm{e}^{k_1 x} & k_2 \mathrm{e}^{k_2 x} & \ldots & k_n \mathrm{e}^{k_n x} \\ \ldots\ldots\ldots & & & \\ k_1^{n-1} \mathrm{e}^{k_1 x} & k_2^{n-1} \mathrm{e}^{k_2 x} & \ldots & k_n^{n-1} \mathrm{e}^{k_n x} \end{vmatrix} =$$

$$\mathrm{e}^{x \sum\limits_{i=1}^{n} k_i} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ \ldots\ldots & & & \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} := \mathrm{e}^{x \sum\limits_{i=1}^{n} k_i} V.$$

Skaičiuokime determinantą $W$. Turime, kad

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & (k_2-k_1) & \dots & (k_n-k_1)k_n \\ . & & & \\ 0 & (k_2-k_1)k_2^{n-2} & \dots & (k_n-k_1)k_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$(k_2-k_1)(k_3-k_1)\dots(k_n-k_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \\ k_2 & k_3 & \dots & k_n & \\ \dots & & & & \\ k_2^{n-2} & k_3^{n-2} & & \dots & k_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Pakartoję šią procedūrą $n$ kartų gauname, kad

$$W = [(k_2-k_1)(k_3-k_1)\dots(k_n-k_1)][(k_3-k_2)\dots\times$$

$$(k-n-k_2)]\dots[k_n-k_{n-1}].$$

Iš pradinės prielaidos turime, kad visos šaknys yra skirtingos, taigi paskutinioji sandauga nėra lygi nuliui. Vadinasi $V \neq 0$, o tai reiškia, kad nagrinėjamos funkcijų sistemos Vronskianas nelygus nuliui arba sprendinių sistema yra fundamentali.

Vadinasi dif. lygties (4.15) bendrąjį sprendinį galime užrašyti taip:

$$Y = c_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + \dots + c_n \mathrm{e}^{k_n x}.$$

**2)** Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, tačiau ne visos šaknys yra realios. Pastebėsime, kad nagrinėjamas polinomas turi realius koeficientus, vadinasi jeigu egzistuoja kompleksinė šaknis $\alpha + i\beta$ tai egzistuoja ir šaknis $\alpha - i\beta$ (kodėl?). Tarkime, kad nagrinėjamo charakteringojo polinomo šaknys $k_1, \dots, k_m$ yra realios, o likusios yra kompleksinės. Vadinasi,

$$\alpha_{m+1} \pm i\beta_{m+1}, \dots, \alpha_{m+l} \pm i\beta_{m+l},\ m + 2l = n.$$

Nesunku suprasti, kad analogiška sprendinių pora, sudaryta su jungtine šaknimi bus tiesiškai priklausoma nuo pastarosios poros.

Naudodamiesi tuo, kad realioji ir menamoji dalys yra dif. lygties sprendiniai, vietoje kompleksinių šaknų poros galime nagrinėti du realius atskiruosius sprendinius sudarytus su realiąja bei menamąja dalimis atskirai, t.y.

$$\mathrm{e}^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\quad \mathrm{e}^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

Taigi, turime $n$ atskirųjų dif. lygties sprendinių, kurie (siūlome skaitytojui tai patikrinti) sudaro f.s.sistemą. Šie sprendiniai yra tokie:

$$y_1 = \mathrm{e}^{k_1 x},\ \dots y_m = \mathrm{e}^{k_m x}, y_{m+1} = \mathrm{e}^{\alpha_{m+1} x}\cos(\beta_{m+1} x)$$

$$y_{m+2} = \mathrm{e}^{\alpha_{m+1} x}\sin(\beta_{m+1} x), \dots, y_{n-1} = \mathrm{e}^{\alpha_{n-1} x}\cos(\beta_{n-1} x),$$

$$y_n = \mathrm{e}^{\alpha_n x}\sin(\beta_n x).$$

**3)** Aptarsime situaciją, kai šaknys yra realios, bet tarp jų yra kartotinių. Tarkime, kad $\eta$ yra charakteringojo polinomo, $s-$ ojo kartotinumo šaknis. Bet tada $l^{(j)}(\eta) \neq 0,\ j = 0, \dots, s-1$, o $l^s(\eta) = 0$. Aptarkime šią situaciją.

Turime, kad

$$L(\mathrm{e}^{(kx)}) = \mathrm{e}^{(kx)} l(k).$$

Mes nagrinėjame šią funkciją kintamojo $k$ atžvilgiu. Kadangi $k = \eta$ yra $s-$ ojo kartotinumo šaknis, tai funkcijos $L(\mathrm{e}^{(kx)})$ $s-1$ eilės išvestinė, $k$ atžvilgiu, turi būti lygi nuliui. Naudodamiesi Leibnico formule gauname, kad

$$\frac{\mathrm{d^m}}{\mathrm{dk^m}}\big(L(\mathrm{e}^{(kx)})\big) = \big(\mathrm{e}^{kx}l(k)\big)_k^{(m)} = \sum_{j=1}^{s-1} C_{s-1}^{j}\big(\mathrm{e}^{(s-1-j)}\big)l^{(j)}(k) = 0. \tag{4.16}$$

Pastebėję, kad $\big(\mathrm{e}^{(kx)}l(k)\big)_k^{(m)} = L(x^m\mathrm{e}^{(kx)})$, iš (4.16) gauname, kad

$$L(\mathrm{e}^{(\eta x)}) \equiv 0, L(k\mathrm{e}^{(\eta x)}) \equiv 0, \ldots, L(x^{(s-1)}\mathrm{e}^{(\eta x)}) \equiv 0.$$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad $s-$ ojo kartotinumo šaknį $\eta$ atitinka $s$ lygties $L(y) = 0$ sprendinių. Apibendrinkime aukščiau išdėstytas mintis. T.y., tarkime, kad charakteringoji lygtis $l(k) = 0$ turi $s_1$ kartotinumo šaknį $k_1$, $\ldots$, $s_p$ kartotinumo šaknį $k_p$, be to $s_1 + s_2 + \ldots s_p = n$. Tada lygtis $L(y) = 0$ turi fundamentaliąją sprendinių sistemą,

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{(k_1x)}, x\mathrm{e}^{(k_1x)}, \ldots, x^{s_1-1}\mathrm{e}^{(k_1x)}, \\ \mathrm{e}^{(k_2x)}, x\mathrm{e}^{(k_2x)}, \ldots, x^{s_2-1}\mathrm{e}^{(k_2x)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{e}^{(k_px)}, x\mathrm{e}^{(k_px)}, \ldots, x^{s_p-1}\mathrm{e}^{(k_px)}. \end{cases}$$

Suprantama, kad tuomet šios dif. lygties bendrąjį sprendinį galime užrašyti tokiu būdu

$$y = \sum_{j=1}^{p} P_j(x)\mathrm{e}^{k_jx},$$

čia

$$P_j := P_j(x) = c_1^j + c_2^jx + \ldots + c_{s_j}^jx^{s_j-1}, \ \ j = 1, \ldots, p.$$

Iki šiol kalbėjome tik apie realias kartotines šaknis. Tarkime, kad $\eta = \alpha + i\beta$ yra $l-$ ojo kartotinumo šaknis. Suprantama, kad ir jai jungtinė šaknis $\overline{\eta}$ yra to paties kartotinumo. Tada, šiai šaknų porai gauname tokius kompleksinius sprendinius

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}, x\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, x^{l-1}\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}, \\ \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}, x\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}, \ldots, x^{l-1}\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}. \end{cases}$$

Šiuos kompleksinius sprendinius galime pakeisti tokių realių sprendinių aibe:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{l-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{l-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases}$$

Bendrojo sprendinio formulėje, $l-$ojo kartotinumo šaknį $\eta = \alpha + i\beta$ atitinkanti sprendinio dalis užrašoma tokiu būdu:

$$y_\eta = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(c_1 + c_2x + \ldots + c_lx^{l-1}\big)\cos(\beta x) +$$

$$\big(c_{l+1} + c_{l+2}x + \ldots + c_{2l}x^{l-1}\big)\sin(\beta x).$$

Pastebėsime, kad jei prie šios sprendinių aibės prijungsime kitų kompleksinių šaknų generuotus sprendinius, bei realių šaknų generuotus sprendinius, tai gausime dif. lygties fundamentaliąją sprendinių sistemą.

Panagrinėkime nehomogeninės dif. lygties sprendimo metodus. Vieną iš minėtosios lygties sprendimo būdų esame jau aptarę, t.y. neapibrėžtinių koeficientų metodas. Šio metodo taikymas reikalauja daug darbo ir kartais labai sudėtingų skaičiavimų, todėl natūralu ieškoti kitų metodų, kurių dėka galėtume šio uždavinio sprendimą kiek supaprastinti.

Tarkime, kad turime dif. lygtį $L(y) = f(x)$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j^{m_j}(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x} \qquad (4.16),$$

čia $\lambda_j$ yra konstantos, o $P_j^{m_j}(x)-$ $m_j$ laipsnio polinomas.

Teisinga tokia

**4.8 Teorema** *Diferencialinė lygtis*

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = P_m(x)\mathrm{e}^{\mu x},$$

*čia $P_m(x)$ yra $m-$ ojo laipsnio polinomas, turi tokios formos atskirąjį sprendinį:*

$$\varphi(x) = x^s Q_m(x)\mathrm{e}^{\mu x},$$

*čia $s$ yra dif. lygties $L(y) = 0$ charakteringojo polinomo $l(k) = 0$ šaknies $k = \mu$ kartotinumas ( jei $\mu$ nėra nagrinėjamos homogeninės lygties charakteringojo polinomo šaknis, tai $s = 0$ ), $Q_m(x)$ yra $m-$ ojo laipsnio polinomas.*

Remiantis šia teorema galime daryti tokią išvadą: jei nehomogeninės lygties dešinioji pusė turi (4.16) formą, tai šios lygties atskirasis sprendinys apibrėžtas teoremoje nurodytu būdu. Detaliau aptarsime atskirus atvejus.

**1)** Tarkime, kad $f(x) = P_m(x)$. Tada ieškosime tokio atskirojo sprendinio:

$$y_1 = x^s Q_m(x),$$

čia $s$ yra dif. lygties charakteringojo polinomo $k = 0$ šaknies kartotinumas, o $Q_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$ yra bendriausias $m-$ ojo laipsnio polinomas

Įrašę $y_1$ į diferencialinę lygtį $L(y_1) = P_m$ ir sulyginę koeficientus prie atitinkamų $x$ laipsnių gauname lygčių sistemą keoficientamas $a_i,\ i = 0, \ldots m$ apskaičiuoti. Išsprendę šią sistemą randame koeficientus $a_i$, o tuo pačiu ir atskirąjį sprendinį. Tada šios nehomogeninės dif. lygties (kaip ir kitų nehomogeninių lygčių) bendrasis sprendinys yra lygus jį atitinkančios homogeninės dif. lygties bendrojo ir atskirojo nehomogeninės dif. lygties sprendinių, sumai. Beje ir žemiau aptartais atvejais, nežinomos konstantos nustatomos šiuo aprašytu būdu.

**2)** Tegu $f(x) = P_m(x)e^{ax}$. Tada ieškosime tokio atskirojo sprendinio:

$$y_1 = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{ax},$$

$Q_m(x)$ yra bendriausias $m-$ ojo laipsnio polinomas, $k$ yra atitinkamos dif. lygties charakteringojo polinomo šaknies $k = a$ kartotinumas.

**3)** $f(x) = \mathrm{e}^{ax}\big(P_m\cos(bx) + R_m\sin(bx)\big)$.

Tarkime, kad skaičius $a + ib$ yra atitinkamos homogeninės dif. lygties charakteringojo polinomo, $s-$ ojo kartotinumo šaknis. Tada atskirasis sprendinys turės tokią formą:

$$y_1 = x^k \mathrm{e}^{ax}\big(Q_m^0(x)\cos(bx) + Q_n^1(x)\sin(bx)\big)$$

$Q_m^0$, $Q_n^1$ yra bendriausi $m-$ ojo ir $n-$ ojo laipsnių polinomai, atitinkamai.

**4.** Tarkime, kad $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$. Tegu $y_1, \ldots, y_m$ atskiri sprendiniai atitinkantys nehomogenines dif. lygtis $L(y) = f_i(x),\ i = 1, \ldots, m$.

Tada šios lygties atskirasis sprendinys $Y_1 = y_1 + \ldots + y_m$. Prie šio sprendinio prijungę atitinkamo homogeninės dif. lygties sprendinį, gausime bendrąjį nehomogeninės lygties sprendinį.

### 4.4 Tiesinės lygtys, pertvarkomos į lygtis su pastoviais koeficientais. Oilerio lygtis

Pastebėsime, kad koks bebūtų kintamųjų keitimas, tiesinė diferencialinė lygtis išlieka tiesine. Dar daugiau, homogeninė dif. lygtis išlieka homogenine lygtimi.

Tarkime, kad duota tiesinė lygtis

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y = 0.$$

Pasirodo, kad jeigu ši lygtis gali būti pertvarkyta į tiesinę lygtį su pastoviais koeficientais, tai tik vieninteliu keitiniu:

$$t = c\int p_1(x)^{1/n}\mathrm{dx}.$$

*Oilerio tiesine, homogenine diferencialine lygtimi vadinsime tokį reiškinį:*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0.$$

Atlikę kintamųjų keitimą $x = \mathrm{e}^t$, šią lygtį pertvarkome į tiesinį lygtį su pastoviais koeficientais.

Oilerio tiesine nehomogenine dif. lygtimi vad. reiškinį:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x).$$

Jeigu $f(x) = x^\alpha P(\ln x)$, čia $P(u)-$ kintamojo $u$ polinomas, tuo pačiu keitiniu $x = \mathrm{e}^t$ galime pertvarkyti į tiesinę nehomogeninę dif. lygtį su pastoviais koeficientais.

Dif. lygtį

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0,$$

keitiniu $ax + b = \mathrm{e}^t$ galime pertvarkyti į tiesinę lygtį su pastoviais koeficientais.

Kartais homogeninę dif. lygtį pertvarkyti į tiesinę dif. lygtį su pastoviais koeficientais, galima naudojant keitinį $y = \alpha(x)z$, čia $z$ yra nauja funkcija, o funkcija $\alpha(x)$ yra parenkama priklausomai nuo lygties. Pavyzdžiui, galime pabandyti parinkti funkciją taip, kad koeficientą, prie $n-1-$ os eilės išvestinės, gautume lygų nuliui. Beje, šį keitinį galima naudoti ir nehomogeninėse lygtyse. Panagrinėkime lygtį:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Naudodami keitinį

$$y = z\exp\{-\int \frac{p(x)}{2}\mathrm{dx}\}$$

nagrinėjamą lygtį pertvarkome į tokią: $z'' + I(x)z = 0$, čia

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x).$$

Aišku, kad jei $I(x) \equiv c$, tai naujoji lygtis bus su pastoviais koeficientais.

### 4.5 Atskiri, dif. lygties, eilės pažeminimo atvejai

**1)** Visų pirma pastebėsime, kad jei žinome tiesinės lygties

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y = 0$$

bent vieną atskirą sprendinį, tai tada šios lygties eilę galime pažeminti vienu vienetu naudodami keitinį

$$y = y_1\int z\mathrm{dx},$$

čia $z = z(x)-$ nauja funkcija.

Remdamiesi pastarąja savybe galime teigti, kad jei nagrinėdami dif. lygtį

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

žinome vieną atskirą sprendinį, tai antrąjį atskirą sprendinį galime rasti tokiu būdu:

$$y_2 = y_1 \int \mathrm{e}^{\frac{\int -p(x)\mathrm{d}x}{y_1^2}} \mathrm{d}x.$$

Tada nagrinėjamos homogeninės lygties sprendinys bus lygus šių sprendinių tiesiniam dariniui.

**2)** Nesunku suprasti, kad lygties

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-k}y^{n-k} = 0$$

eilę galime pažeminti $n-k$ vienetų, naudojant keitinį $z = y^{(n-k)}$

**3)** Jeigu tiesinė homogeninė dif. lygtis yra homogeninė funkcijos bei jos išvestinės atžvilgiu, tada naudojant keitinį $y' = yz$, $z = z(x)-$ nauja funkcija, išvetinės eilę galime pažeminti vienetu.

**Fizikiniai taikymai**

**1.** Harmoniniai svyravimai. Tarkime svoris $P$ pakabintas ant vertikalios svyruoklės, kurios ilgis (be svorio) lygus $l$. Svoris patempiamas žemyn ir paleidžiamas svyruoti. Rasime svorio judėjimo dėsnį, nekreipdami dėmesio nei į oro pasipriešinimą, nei į spyruoklės masę. Tarkime, kad koordinatinė ašis $Ox$ sutampa su spyruoklės ašimi bei eina per svorio $P$ centrą. Koordinačių pradžios tašku $O$ laikome spyruolės žemiausią tašką, kai svoris nepakabintas. Tegu $\lambda$ reiškia spyruoklės pailgėjimą kokiu nors laiko momentu, o $\lambda_s$ spyruoklės ilgis nuo taško $O$ iki spyruoklės pusiausvyros būsenos (kai spyruoklė su svoriu pakyla į viršų maksimaliai, prieš pradėdama kristi). Taigi $\lambda = \lambda_s + x$. Remdamiesi antruoju Niutono dėsniu turime, kad $F = ma$, o masė $m = P/g$, čia $a-$ pagreitis ir $F-$ svorį $P$ veikianti jėga. Beje, ši jėga yra sudėtinė. Ją sudaro spyruoklės įtempimo ir sunkio (traukos) jėgos. Remdamiesi Huko dėsniu tvirtiname, kad spyruoklės tempimo jėga proporcinga jos pailgėjimui, t.y. $-c\lambda$, čia $c$ yra proporcingumo koeficientas, dar vadinamas spyruoklės tamprumo kieficientu. Remdamiesi tuo, kas buvo pasakyta, galime užrašyti tokią lygybę

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} = -c\lambda + P. \tag{4.17}$$

Žinome, kad pusiausvyros būsenoje teisinga lygybė: $P = c\lambda_s$. Įrašę į (4.17) lygybę šią $P$ reikšmę, bei naudodamiesi lygybe $\lambda - \lambda_s = x$ gauname tokį sąryšį:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} + k^2x = 0.$$

Paskutinioji lygtis apibrėžia *laisvą, svorio svyravimą.* Pastaroji lygtis dar vadinama *harmoninio svyravimo lygtimi.* Matome, kad ši lygtis yra tiesinė homogeninė dif. lygtis su pastoviais koeficientais, kurios bendrasis sprendinys yra

$$x = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt).$$

Pabandykime išsiaiškinti šio sprendinio fizikinę prasmę. Perrašykime bendrąjį sprendinį tokiu būdu:

$$x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\Big(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos(kt) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin(kt)\Big).$$

Pažymėję

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},\ \sin\alpha = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ \cos\alpha = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},$$

gauname tokią lygtį

$$x = A\sin(kt + \alpha).$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad pakabintas svoris atlieka harmoninį svyravimą apie pusiausviros padėtį. Dydis $A$ vadinamas svyravimo amplitude, $kt+\alpha-$ svyravimo faze. Dydis $\alpha$ vadinamas pradine svyravimo faze. Svyravimo periodas yra lygus $T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{m/c}$. Kadangi $c = P/\lambda_s = mg/\lambda_s$, tai svyravimo periodą galime išreikšti tokiu būdu

$$T = 2\pi\sqrt{\lambda_s/g}.$$

Nesunku suprasti, kad krovinio judėjimo greitis yra apskaičiuojamas tokia formule

$$v = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = Ak\cos(kt + \alpha).$$

Pastebėsime, kad norint nustatyti amplitudę bei pradinę fazę, turime žinoti pradinius duomenis, t.y. padėtį bei greitį, pradiniu laiko momentu.

**2.** Panagrinėkime "gęstančius" svyravimus. T.y. tarkime, kad sprendžiame pirmąjį uždavinį, tik laikome, kad oro pasiriešinimo jėga nėra lygi nuliui. Beje, minėtoji jėga yra proporcinga judančio kūno greičiui. Taigi, prie jėgų, veikiančių judantį kūną, pridėkime oro pasipriešinimo jėgą, kuri lygi $R = -\mu v$. Tada judančio svorio judėjimo lygties projekciją $Ox$ ašimi galime užrašyti taip:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} = -cx - \mu\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}.$$

Pažymėję, $c/m = k^2$, $\mu/m = 2n$, gauname tokią dif. lygtį:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} + 2n\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + k^2x = 0.$$

Beje, tai taip pat tiesinė homogeninė dif. lygtis su pastoviais koeficientais. Skaitytojui siūlome išspręsti šią lygtį.

**3.** Panagrinėkime privertinius svyravimus, kai nėra pasipriešinimo. Tarkime, kad svoris $P$ pakabinamas ant $l$ ilgio spyruoklės. Tarkime, kad svorį periodiškai veikia išorinė jėga $Q\sin(pt)$, $Q$ ir $p$ yra konstantos. Rasime svorio judėjimo dėsnį, laikydami, kad nėra išorinio pasipriešinimo ir nekreipiamas dėmesys į spyruoklės masę.

Analogiškai kaip ir 1. uždavinyje gauname tokią lygtį:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} = -cx + Q\sin(pt).$$

Kaip ir anksčiau, pažymėję $k^2 = c/m$ ir, be to, $q = Q/m$, gauname tokią lygtį:

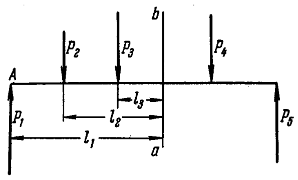
$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2} + k^2x = Q\sin(pt).$$

Taigi, turime nehomogeninę diferencialinę lygtį su pastoviais koeficientais.

Išsprendę šią lygtį gauname, tokį judėjimo dėsnį:

$$x = \frac{q}{k^2 - p^2}\sin(pt) + c\sin(kt + \alpha).$$

**4.** Sijos linkimo uždavinys. Tarkime duota horizontaliai orientuota sija, kurios skerspjūvio pjūvis turi vertikaliąją simetrijos ašį. Laikysime, kad centro taškai yra tiesėje, kurią vadinsime sijos ašimi. Laikysime, kad siją veikiančios jėgos yra išsidėsčiusios simetrijos plokštumoje ir poveikio vektoriai yra ortogonalūs sijos ašiai. Veikiama šių jėgų sija bus lenkiama, o be to, šios jėgos sukels sijos tamprumo jėgų atoveiksmį. Atlikime tariamą pjūvį $ab$ (žr. 4.1 pav.).




**4.1 pav.**

Turime, kad atstojamoji jėga $Q$, pjūvio $ab$ atžvilgiu lygi

$$Q = P_1 - P_2 - P_3,$$

ir "lenkimo" momentas $M$, pjūvio $ab$ atžvilgiu yra lygus

$$M = P_1 l_1 - P_2 l_2 - P_3 l_3.$$

Beje, iš paskutiniųjų lygybių matome, kad teigiamomis jėgomis laikomos jėgos nukreiptos iš apačios į viršų, o momento teigiamąja kryptimi laikome kairiosios sijos dalies posūkį laikrodžio rodyklės kryptimi (beje, jei nagrinėtume dešiniąją sijos dalį, tai jėgos bei momento kryptys skirtųsi ženklais).

Rasime sijos išlinkimo algebrinę lygtį. Tarkime, kad $Ox$ ašyje yra sija, o ašis $Oy$ yra statmena sijai. Beje, koordinačių pradžios taškas yra kairiąjame krašte. Pažymėkime $y$ sijos išlinkimo amplitudę, $x$ atstumu nuo koordinačių pradžios taško. Tada $y = y(x)$ yra išlinkusios sijos algebrinė lygtis.

Yra žinoma, kad

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI},$$

čia $\rho$ yra kreivės kreivumo spindulys duotame taške, $M(x)$ yra analizinė lenkiančio momento formulė, atitinkamame pjūvyje, $E-$ tamprumo modulis, priklausantis nuo sijos fizikinių charakteristikų, $I-$ yra inercijos momentas, kirtimosi taške, ašies atžvilgiu.

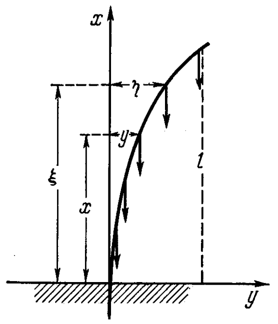
Naudodamiesi kreivumo koeficiento formule, galime sudaryti diferencialinę lygtį:

$$\frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}} = \pm \frac{M(x)}{EI}. \tag{4.18}$$

Pastebėsime, kad tai dif. lygtis be nagrinėjamos funkcijos. Kaip tokias lygtis integruoti jau esame aptarę. Tačiau suintegruoti šią dif. lygtį elementariomis funkcijomis ne visada pavyksta, todėl paprastai naudojamas vienas palengvinimas- praktikoje, išlinkimai taške, būna tokie maži, kad $y'$ reikšmė, vieneto atžvilgiu, yra labai maža, todėl formulėje ši reikšmė tiesiog praleidžiama, t.y. (4.18) formulė šiuo atveju yra tokia:

$$y'' = \pm \frac{M(x)}{EI}. \tag{4.19}$$

Pastaroji dif. lygtis vadinama sijos ašies išlinkimo dif. lygtimi.




**4.2 pav.**

Nagrinėkime savaiminį sijos išlinkimo uždavinį, t.y. sija orientuota $Oy$ ašimi (vertikali), kai vienas galas fiksuotas ir linksta veikiama savo svorio (žr. 4.2 pav.)

Aukščiau aptartame uždavinyje nagrinėjo sijos išlinkimo dif. lygtį. Minima lygtis nusakyta (4.18) lygybe, t.y.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{dz}^2} = \frac{M(z)}{EI}.$$

Kadangi $M(z)$ yra skerspjūvio įnercijos momentas, taigi, kaip matome iš 4.2 pav.,

$$M = \int_0^{l-z} q(\nu - u)\mathrm{d}\xi,$$

$q-$ yra strypo vieneto svoris. Įrašę paskutinįjį integralą į dif. lygtį gauname, kad

$$EI\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{u}}{\mathrm{dz}^3} = -q(l-z)\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dz}}. \tag{4.20}$$

Atlikę kintamųjų keitimą

$$x = \frac{2}{3}(l-z)^{3/2}\sqrt{\frac{q}{EI}}$$

ir žymėdami $\mathrm{du}/\mathrm{dx} = \mathrm{u}'$ iš (4.20) dif. lygties gauname tokią dif. lygtį:

$$u''' + \frac{1}{x}u'' + \big(1 - \frac{1}{9x^2}\big)u' = 0.$$

Pažeminę eilę $u' = y$ gauname tokią antros eilės tiesinę dif lygtį:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \big(1 - \frac{1}{9x^2}\big)y = 0.$$

**Uždaviniai**

Raskite duotųjų dif. lygčių bendruosius sprendinius:

**1**. $y'' + 3y' + 2y = 0$; 2. $y''' - 13y' - 12y = 0$;

**3**. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$; 4. $y''' + 8y = 0$;

**5**. $y^{(4)} + y = 0$; 6. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$;

. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$; 8. $y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^{3x} + 2x^2$;

**9**. $y'' - y' = 2\sin x - 4\cos x$; 10. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} - 4\sin(2x)$;

**11**. $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$; 12. $y''' - y' = \mathrm{e}^x \sin x + 2x^2$;

**13**. $y'' + 4y = x^2\sin^2 x$; 14. $y'' - y = \dfrac{1}{x}$;

**15**. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$; 16. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Raskite sprendinius tenkinančius pradines sąlygas:

**17**. $y'' + y = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 1, y'(\frac{\pi}{2}) = 0$;

**18**. $y''' - y' = 0, y = 1, y' = 0, y'' = 0,$ kai $x = 2$;

**19**. $y'' - y = x; y(0) = 1, y'(0) = -1$

$$\textbf{20}.\ y'' + 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{-2x}; y(0) = 0, y'(0 = 0).$$

**21.** Kokioms $h$ reikšmėms visi nenuliniai lygties

$$\frac{\mathrm{d^2x}}{\mathrm{dt^2}} + 2h\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + x = 0$$

sprendiniai, reiškia gęstančių harmoninių svyravimų funkcijas.

**22.** Kokioms $q$ reikšmėms lygtis

$$y'' + qy = 0$$

turi nenulinį sprendinį, kuris yra nykstamas dydis, kai $x \to +\infty$.

Sudarykite diferencialines lygtis, kurių fundamentalioji sprendinių sistema yra tokia:

$$\textbf{23}.y_1 = \cos x, \ \ y_2 = \sin x$$

$$\textbf{24}.y_1 = \cos x, \ y_2 = \sin x, \ y_3 = \mathrm{e}^x, \ y_4 = {}^{-x}.$$

Raskite dif. lygčių bendruosius sprendinius:

$$\textbf{25}.\ x^2y'' - 3xy' + 3y = 0; \ \ 26.\ xy''' + y'' = 0;$$

$$\textbf{27}.\ (2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4; \ \ 28.\ x^2y'' - xy' = -x + \frac{3}{x};$$

$$\textbf{29}.\ x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x); \ \ 30.\ y'' - y' + y\mathrm{e}^{2x} = 0.$$

Tinkamai pakeitę funkcijas, lygtis pertvarkykite taip, kad jose neliktų nario su pirmąja išvestine ir suintegruokite gautąsias lygtis:

$$\textbf{31}.\ x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0; \ \ 32.\ xy'' + 2y' - xy = \mathrm{e}^x.$$

Raskite dif. lygčių bendruosius sprendinius, kai yra žinomas vienas atskiras sprendinys:

$$\textbf{33}.\ y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, y = \frac{\sin x}{x}$$

$$\textbf{34}.\ (1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0, \ y_1 = \sqrt{1+x}.$$

Pažeminę dif. lygties eilę, raskite bendrąjį sprendinį:

$$\textbf{35}.\ x^2y''' + xy'' - y' = 3x^2; \ \ 36.\ xy'' + y' - (1+x)y = 0.$$

## V. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

### 5.1 Normalinės dif. lygčių sistemos

**Apibrėžimas** *Normaline dif. lygčių sistema vadinsime tokią lygčių aibę:*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dy_1}}{\mathrm{dx}} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{\mathrm{dy_2}}{\mathrm{dx}} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\mathrm{dy_n}}{\mathrm{dx}} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{5.1}$$

čia $y_1, \dots, y_n-$ nežinomos, kintamojo $x$ funkcijos, o $f_1, \dots f_n-$ žinomos funkcijos. Skaičius $n$ vadinamas dif. lygčių sistemos eile. Beje, dažnai sistemą žymėsime trumpai, t.y. pvz. (5.1) sistemą perrašykime sutrumpintu būdu:

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \ i = 1, \dots, n.$$

**Apibrėžimas** *Normalinę dif. lygčių sistemą vadinsime tiesine dif. lygčių sistema, jeigu* (5.1) *sistemos dešinioji pusė yra tiesinė funkcijų* $y_1, \dots, y_n$ *atžvilgiu, t.y.*

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = p_{i1}(x)y_1 + p_{i2}(x)y_2 + \ldots + p_{in}y_n + f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Funkcijų, apibrėžtų ir diferencijuojamų intervale $(a, b)$ aibę

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x),$$

vadinsime (5.1) *sistemos sprendiniu, intervale* $(a, b)$, jeigu šias funkcijas įrašę į (5.1) sistemą, gauname tapatybes visiems $x \in (a, b)$. $n + 1-$ matės erdvės kreivę $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ vadinsime (5.1) dif. lygties *integraline kreive.*

(5.1) sistemos *Koši uždaviniu* vadinsime tokį uždavinį: rasti sprendinį, $y_1 = y_1(x), \ldots y_n = y_n(x)$, tenkinantį pradines sąlygas

$$y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0, \text{ kai } x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$$

fiksuoti skaičiai.

Tam, kad (5.1) sistemos Koši uždavinio sprendinys egzistuotų, nurodytame taške, pakanka, kad (5.1) dešinėje pusėje esančios funkcijos, kokioje nors šio taško aplinkoje, būtų tolydžios.

Tam, kad (5.1) sistemos Koši uždavinys turėtų vienintelį sprendinį pakanka, kad (5.1) sistemos funkcijos $f_i, i = 1, \ldots, n$ tenkintų *Lipšico sąlygą* (kokia tai sąlyga!) kintamųjų $y_i, i = 1, \ldots, n$ atžvilgiu, nagrinėjamo taško $(x_0, y_1^0, \ldots y_n^0)$ kokioje nors aplinkoje arba pakanka (Lagranžo teorema), kad visos dalinės išvestinės, kintamųjų $y_i, i = 1, \ldots, n$ atžvilgiu, būtų aprėžtos.

Nesunku suprasti, kad jeigu visos funkcijos $f_i$ yra polinomai, kintamųjų $y_1, \ldots y_n$ atžvilgiu, o šių polinomų koeficientai, $x$ atžvilgiu, yra tolydžios funkcijos. Šiuo atveju, skaičių rinkinius $y_1^0, \ldots y_n^0$ galime parinkti bet kaip, o skaičius $x_0 \in (a, b)$.

**Apibrėžimas** *Funkcijų, tolydžiai diferencijuojamų kintamojo $x$ atžvilgiu aibę*

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots c_n), \; i = 1, \ldots n, \tag{5.2}$$

*vadinsime* (5.1) dif. lygčių sistemos *bendruoju sprendiniu srityje* $D = \{(x, y_1, \ldots y_n); x, y_i \in \mathcal{R}, i = 1 \ldots, n\}$, *jeigu šioje srityje egzistuoja vienintelis Koši uždavinio sprendinys ir be to išpildytos sąlygos:*

1) (5.2) *sistema srityje $D$ yra išsprendžiama konstantų $c_1, \ldots c_n$ atžvilgiu, t.y.*

$$c_i = \xi_i(x, y_1, \ldots y_n), \; i = 1, \ldots n \tag{5.3}$$

2) (5.2) *funkcijų aibė yra* (5.1) *sistemos sprendinys, bet kokiam konstantų rinkiniui, gautam iš* (5.3)*aibės, kai taškas* $(x, y_1, \ldots y_n) \in D$.

Aptarsime būdą, kaip rasti (5.1) sistemos Koši uždavinio sprendinį. Tarkime, kad reikia rasti (5.1) sistemos sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$, kai žinome sistemos bendrąjį sprendinį (5.2).

Visų pirma, (5.2) sistemoje, kintamuosius $(x, y_1, \ldots, y_n)$ keičiame skaičiais $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, atitinkamai. Gauname sistemą

$$y_i^0 = \varphi_i(x_0, c_1, \ldots c_n), \; i = 1, \ldots n.$$

Išsprendę pastarąją $c_i$ atžvilgiu, gauname konkrečias skaitines šių konstantų reikšmes, t.y.
$c_1 = c_1^0, \ldots, c_n = c_n^0$. Įrašę gautąsias reikšmes į (5.2) sistemą gauname ieškomąjį Koši uždavinio sprendinį

$$y_i = \varphi_i(x, c_1^0, \ldots c_n^0), \; i = 1, \ldots n, \tag{5.4}$$

kuris bus *vienintelis* (kodėl?).

**Apibrėžimas** *Bendrąjį sprendinį*

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \dots y_n^0),\ i = 1, \dots, n, \tag{5.5}$$

*čia laisvųjų konstantų vaidmenį atlieka ieškomųjų funkcijų reikšmės taške* $x_0 \in (a, b)$, *vadinsime bendruoju, Koši formos,* (5.1) *sistemos sprendiniu.*

**Apibrėžimas** *Sistemos sprendinys, kuriam yra išpildomos Koši uždavinio egzistavimo ir vienatinumo sąlygos, vadinamas atskiruoju, dif. lygčių sistemos, sprendiniu. Priešingu atveju sprendinys vadinamas ypatingu.*

Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad visi sprendiniai, gaunami iš (5.2), parinkus "leistinas" konstantų reikšmes, bus atskirieji.

Parodysime, kad bet kokią $n-$ os eilės dif. lygtį galime pertvarkyti į normalinę dif. lygčių sistemą ir atvirkščiai. Tarkime, kad duota $n-$ os eilės dif. lygtis:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Pažymėję

$$y = y_1,\ y' = y_2,\ \dots y^{(n-1)} = y_n,\ y^{(n)} = f(x, y_1, \dots, y_n),$$

arba

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Parodėme, kad $n-$ os eilės dif. lygtį galime pertvarkyti į $n-$ os eilės normalinę sistemą.

Pasirodo teisingas ir atvirkščias teiginys: *bet kokią normalinę dif. lygčių sistemą galima pertvarkyti į $n-$ os eilės dif. lygtį.* Pastarąjį tvirtinimą paliekame patikrinti skaitytojui.

**Apibrėžimas** *Tolydžiai diferencijuojamą funkciją* $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ *vadinsime* (5.1) *sistemos integralu, jeigu bet kokiam atskiram sprendiniui* $(\varphi_1(x), , \dots, \varphi_n(x))$ *teisinga tapatybė*

$$\psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \equiv 0.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad funkcijos $\psi$ pilnasis diferencialas (5.1) sprendinio taškuose taip pat turi būti tapatingai lygus nuliui:

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{y}_1}\mathrm{f}_1\mathrm{dx} + \dots \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{y}_n}\mathrm{f}_n\mathrm{dx} \equiv 0.$$

Pastebėsime, kad normalinė, $n-$os eilės, dif. lygčių sistema turi ne daugiau negu $n$ nepriklausomų integralų. Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš aukščiau pateiktų samprotavimų, t.y., kad bet kokią $n-$ os eilės sistemą galima pertvarkyti į $n-$ os eilės dif. lygtį. Žinome, kad $n-$ os eilės dif. lygties bendrąjį sprendinį sudaro $n-$ tiesiškai nepriklausomų sprendinių, o pastarieji figūruoja ir sudarant sistemos bendrąjį sprendinį. Taigi, jeigu $\psi_1, \dots \psi_n$ yra nepriklausomi (5.1) sistemos integralai tai bet koks kitas šios sitemos integralas bus šių nepriklausomų integralų funkcija.

Lygybę $\psi(x, y_1, \dots, y_n) = c$ vadinsime *pirmuoju* (5.1) *sistemos integralu.* Du pirmieji integralai vadinami nepriklausomais, jeigu juos sudarantys sprendiniai yra nepriklausomi. (5.1) sistemos $n-$ nepriklausomų pirmųjų integralų sudaro šios sistemos *bendrąjį integralą.* Integruodami (5.1) sistemą mes ieškosime arba bendrojo sprendinio, arba bendrojo integralo.

**Apibrėžimas** *Lygčių aibę, užrašytą tokiu būdu:*

$$\frac{\mathrm{dx}_1}{\mathrm{X}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)} = \frac{\mathrm{dx}_2}{\mathrm{X}_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)} = \dots = \frac{\mathrm{dx}_n}{\mathrm{X}_n(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)}, \tag{5.6}$$

*vadinsime simetrine, dif. lygčių sistemos, forma.*

Pastebėsime, kad (5.6) simetrinę dif. lygčių sistemos formą galime perrašyti normaline $n-1-$ os eilės dif. lygčių sistema, taško $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ aplinkoje, jeigu šio taško aplinkoje bent viena iš funkcijų $X_i$ yra nelygi nuliui (priešingu atveju (5.6) sistema nagrinėjamo taško aplinkoje bus neapibrėžta). Tarkime, kad $X_n \neq 0$ šiame taške. Tada šią simetrinę sistemą galime pakeisti normaline tokiu būdu:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{dx_n}} = \frac{X_1}{X_n}, \\ \frac{\mathrm{dx_2}}{\mathrm{dx_n}} = \frac{X_2}{X_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\mathrm{dx_{n-1}}}{\mathrm{dx_n}} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \end{cases}$$

Bet kokį šios sistemos integralą vadinsime (5.6) sistemos pirmuoju integralu. Ši sistema tuo pačiu ir (5.6) sistema turi ne daugiau negu $n-1$ nepriklausomą integralą. Aibė, kurią sudaro $n-1$ (5.6) sistemos nepriklausomas integralas, vadinama bendruoju šios sistemos integralu. Beje, nesunku suprasti, kad bet kokią normalinę dif. lygčių sistemą galima perrašyti simetrine sistema. Tarkime, kad duota (5.1) sistema. Tada ją galime perrašyti tokia simetrine sistema:

$$\frac{\mathrm{dy_1}}{\mathrm{f_1}} = \frac{\mathrm{dy_2}}{\mathrm{f_2}} = \ldots = \frac{\mathrm{dy_n}}{\mathrm{f_n}} = \frac{\mathrm{dx}}{1}.$$

**Apibrėžimas** *Aukštesnių eilių dif. lygčių sistemą, išreikštą vyriausių išvestinių atžvilgiu, vadinsime kanonine dif. lygčių sistema, t.y.*

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1' \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, y_1' \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1' \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}). \end{cases} \tag{5.7}$$

*Skaičius $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ vadinamas paskutiniosios dif. lygčių sistemos eile.*

Funkcijų šeimą $y_1 = \varphi_1(x), \ \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ vadinsime (5.7) dif. lygčių sistemos sprendiniu intervale $(a, b)$, jeigu $\varphi_i(x) \in C^1(a, b), \ i = 1, \ldots, n$ ir be to šios funkcijos, visas (5.7) lygtis verčia tapatybėmis intervale $(a, b)$.

Pastebėsime, kad kanoninė dif. lygčių sistema, kaip ir normalinė, gali būti pertvarkyta į simetrinę, jeigu kanoninėje sistemoje visas išvestines, esančias (5.7) dešinėje pusėje pažymėsime naujomis funkcijomis. (5.7) sistemos Koši uždavinio esmė yra tokia: rasti sistemos sprendinį $y_1, \ldots, y_n$, kuris kartu su išvestinėmis iki $m_1 - 1, \ldots, m_n - 1$ atitinkamai, eilės tenkina iš anksto apibrėžtas sąlygas, kokioje nors $x$ apibrėžimo srityje. Beje, bendrasis (5.7) sistemos sprendinys turi $m = m_1 + \ldots + m_n$ laisvų konstantų.

### 5.2 Normalinės sistemos fizikinė interpretacija

Panagrinėkime normalinę sistemą

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dx_1}}{\mathrm{dt}} = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{\mathrm{dx_2}}{\mathrm{dt}} = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\mathrm{dx_n}}{\mathrm{dt}} = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{5.8}$$

čia $t$ yra laikas, o $x_i, \ i = 1, \ldots, n \ n-$ matės (fazinės) erdvės koordinatės, $(x_1, \ldots, x_n)$, $n-$ matės erdvės taškas. Šios sistemos sprendinys

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t) \tag{5.9}$$

vadinamas sistemos apibrėžtu judėjimo dėsniu, o materialaus taško judėjimo kelias- judėjimo trajektorija.

(5.8) sistema yra vadinama greičių lauku. Lygčių sistemos sprendimas - tai procesas, kuomet turint greičių lauką yra atstatomas judėjimo dėsnis.

(5.8) sistemos Koši uždavinys- rasti judėjimo dėsnį, tenkinantį pradines sąlygas:

$x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0$, t.y. materialaus taško trajektorijai turi priklausyti fazinės erdvės taškas $(x_1^0, \ldots x_n^0)$.

Sakysime, kad (5.8) sistema yra stacionari, jeigu (5.8) sistemos dešinioji pusė (funkcijos $f_i$) nepriklauso nuo laiko $t$. Kitaip tariant, bet kokiu laiko momentu judėjimo greitis priklauso tik nuo taško koordinačių, bet ne nuo laiko.

Tuo atveju, kai (5.8) dif. lygties sprendinys yra tolygiai tolydi funkcija $t$ atžvilgiu, aibėje $t \geq t_0$, tai sakysime, kad (5.8) sprendinys (judėjimo dėsnis) yra *stabilus,* kai $t \to \infty$. Fizikoje yra naudojamos ir kitos judesio (sprendinio) stabilumo sąvokos. Pateiksime keletą iš jų.

Tarkime, kad (5.8) sistemos funkcijos $X_i(t, 0, \ldots, 0) = 0,\ t \geq t_0$. Tada šiame fazinės erdvės taške, taško greitis lygus nuliui, bet kokiu laiko momentu. T.y.

$$x_1 \equiv 0, \ldots, x_n \equiv 0. \tag{5.10}$$

(5.10) sprendinys yra vadinamas *nesužadintu sprendiniu (judesiu).*

Bet koks (5.9) sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas, kai bent vienas iš pradinių duomenų $x_i^0 \neq 0$, yra vadinamas sužadintu sprendiniu (sužadintu judesiu), o patys pradiniai duomenys $x_i^0,\ i = 1, \ldots, n$ vadinami sužadinimu.

(5.10) nulinis sprendinys vadinamas *stabiliu Liapunovo prasme, kai* $t \to \infty$, kai visi (5.9) sužadinti sprendiniai, pakankamai mažoms sužadinimų reikšmėms $x_i^0,\ i = 1, \ldots, n$, kai $t > t_0$ yra kiek norimai mažoje nesužadinamo sprendinio aplinkoje. Naudojant $\epsilon, \delta$ kalbą, pastarąją stabilumo sąvoką galime suformuluoti taip: visiems $\epsilon > 0$, egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad iš nelygybių

$$|x_1^{(0)}| < \delta,\ \ldots, |x_n^{(0)}| < \delta$$

išplaukia, kad

$$|x_1(t)| < \epsilon,\ \ldots, |x_n(t)| < \epsilon,$$

kai tik $t > t_0$. Priešingu taveju sakysime, kad spredinys (5.10) yra nestabilus, Liapunovo prasme.

Sakysime, kad (5.10) sprendinys yra asimptotiškai stabilus, jeigu jis stabilus ir be to

$$x_1(t) \to 0, \ldots, x_n(t) \to 0, \text{ kai } t \to \infty.$$

### 5.3 Diferencialinių sistemų integravimo metodai

**1.** *Nuoseklus integravimas*

Pastebėsime, kad bendrų, dif. lygčių sistemų integravimo metodų nėra, išskyrus keletą specialių sistemų formų, kuriuos ir aptarsime. Tiesa, jei dif. lygčių sistema yra tiesinė ir su pastoviais koeficientais, tai tokioms sistemoms integruoti egzistuoja bendras metodas.

Panagrinėkime keletą specialių metodų, kai žinoma dif. lygčių sistemos forma.

Tarkime, kad duota tokia dif. lygčių sistema:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dy_1}}{\mathrm{dx}} = f_1(x, y_1), \\ \frac{\mathrm{dy_2}}{\mathrm{dx}} = f_2(x, y_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\mathrm{dy_n}}{\mathrm{dx}} = f_n(x, y_n). \end{cases}$$

Šios dif. lygčių sistemos bendrąjį sprendinį randame paeiliui integruodami sistemos lygtis.

Jeigu sistema yra tokia:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dy_1}}{\mathrm{dx}} = f_1(x, y_1), \\ \frac{\mathrm{dy_2}}{\mathrm{dx}} = f_2(x, y_1, y_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\mathrm{dy_n}}{\mathrm{dx}} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

tai ją integruojame nuosekliai, t.y. visų pirma suintegruojame pirmąją lygtį ir gautą sprendinį įrašome į antrąją lygtį. Tada antroje lygtyje bus tik laisvas kintamasis ir antroji funkcija. Suintegravę pastarąją,1 gautąjį bei pirmosios lygties sprendinius įrašome į trečiąją lygtį ir t.t.. Minėtu būdu visuomet galima suintegruoti tiesinių dif. lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dy_1}}{\mathrm{dx}} = p_{11}(x)y_1 + f_1(x), \\ \frac{\mathrm{dy_2}}{\mathrm{dx}} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\mathrm{dy_n}}{\mathrm{dx}} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases}$$

**2.** *Eliminavimo metodas.*

Esamę pastebėję, kad $n-$ os eilės normalinę sistemą galime pertvarkyti į $n-$ os eilės dif. lygtį arba į keletą žemesnės eilės (pavyzdžiui kanoninę sistemą), kurių eilių suma lygi $n$. Jeigu sistemą pertvarkėme į $n-$ os eilės dif. lygtį, tai integruodami pastarąją, gauname vieną nežinomą funkciją, priklausančią nuo $n-$ konstantų ir nežinomojo kintamojo $x$. Kombinuodami gautą sprendinį su kitomis sistemos lygtimis, gausime vienetu mažesnės eilės dif. lygtį, kitai dif. sistemos sprendinio komponentei rasti ir t.t. kol randame visas nežinomas funkcijas. Išspręskime žemiau užrašytą sistemą naudodami eliminavimo metodą:

$$\begin{cases} y' = 1 - \frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}. \end{cases}$$

Diferencijuodami antrąją sistemos lygtį gauname

$$z'' = -\frac{1}{(y-x)^2}(y'-1).$$

Naudodamiesi sistemos lygybėmis iš paskutiniojo sąryšio gauname lygtį

$$z'' = \frac{(z')^2}{z},$$

kurioje nėra laisvojo kintamojo. Integruodami gauname tokį bendrąjį sprendinį:

$$z = c_2 \mathrm{e}^{c_1 x}.$$

Įrašę gautąjį sprendinį į antrąją sistemos lygtį gauname

$$y - x = \frac{1}{c_1 c_2}\mathrm{e}^{-c_1 x}.$$

Taigi, bendrasis sistemos sprendinys yra toks:

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{c_1 c_2}\mathrm{e}^{-c_1 x}, \\ z = c_2 \mathrm{e}^{c_1 x}. \end{cases}$$

**3.** *Integruojamų kombinacijų metodas.*

Šio metodo esmė- tarpinių integralų arba keletos atskirų sprendinių radimas. Tai atlikus, dif. lygties eilę galima pažeminti.

Pirmuosius integralus dažnai pavyksta rasti naudojant *integruojamas kombinacijas*, kurių dėka gaunamos lengvai integruojamos dif. lygtys. Integruojamomis kombinacijomis vadiname įvairius veiksmus (pertvarkius), kuriuos atliekame su duotosios sistemos lygtimis ir gauname ekvivalenčias lygtis, kurios būna paprastesnės arba sistemą perrašome į simetrinę formą.

Pateiksime pavyzdį. Tarkime duota sistema:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = y, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -x. \end{cases}$$

Padauginę šios sistemos lygtis iš $x$ ir $y$ atitinkamai ir sudėję gauname tokią dif. lygtį:

$$x\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + y\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = 0$$

arba $x^2 + y^2 = c_1^2$. Turėdami šį integralą, pažeminkime sistemos eilę. Visų pirma pastebėsime, kad $y = \sqrt{c_1^2 - x^2}$ ($y$ laikome teigiamu). Įrašę paskutiniąją lygybę į sistemos pirmąją lygtį gauname

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \sqrt{c_1^2 - x^2}$$

arba $\arcsin(x/c_1) = t + c_2$. Naudodamiesi tuo, kad $c_1^2 = x^2 + y^2$ gauname, dar vieną sistemos integralą:

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - t = c_2.$$

Abu gautieji integralai yra nepriklausomi taigi, jų pora yra sistemos bendrasis integralas.

### 5.4 Tiesinės sistemos bei jų integravimo metodai

Tiesines sistemas galima integruoti auksčiau aptartais metodais, tačiau šioms sistemos integruoti egzistuoja specialus metodas, kurį ir aptarsime šiame skyrelyje.

Tarkime duota tiesinė dif. lygčių sistema:

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = p_{i1}(x)y_1 + p_{i2}(x)y_2 + \ldots + p_{in}y_n + f_i(x), \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{5.11}$$

Jeigu $f_i \equiv 0, \ i = 1, \ldots n$ tai (5.11) sistema vadinama homogenine, priešingu atveju- nehomogenine. Laikysime, kad nagrinėjamame intervale visos funkcijos $p_i(x), \ i = 1, \ldots, n$ yra tolydžios. Tuomet šiame intervale visuomet Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį. Beje, skaičių rinkinį $y_1^0, \ldots, y_n^0$ Koši uždavinyje, galime nusakyti be apribojimų. Beje, esant minėtoms sąlygoms, ši sistema ypatingų sprendinių neturi.

Jeigu dif. lygčių koeficientai apibrėžti intervale $(a, b)$, išskyrus netolydumo taškus $x_i$, tai šiuos taškus vadinsime ypatingais, dif. lygčių sistemos, taškais.

Visų pirma aptarsime homogeninės sistemos sprendimo metodą. Savaime aišku, kad homogeninė dif. lygčių sistema turi nulinį sprendinį. Norint rasti homogeninės sistemos bendrąjį sprendinį, mums pakaktų rasti $n-$ tiesiškai nepriklausomų šios sistemos sprendinių, iš kurių ir sudarytume nagrinėjamos sistemos bendrąjį sprendinį.

Tarkime, kad radome $n-$ tiesiškai nepriklausomų dif. lygčių sistemos sprendinių, t.y.

$$\begin{cases} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n} \text{ pirmas sprendinys,} \\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n} \text{ antras sprendinys,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn} \text{ n} - \text{asis sprendinys.} \end{cases} \tag{5.12}$$

Tada lygybė

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_{ki} = 0, \ \ i = 1, \ldots, n, \ x \in (a, b),$$

čia $\alpha_i \in \mathcal{R}, \ i = 1, \ldots, n$ teisinga tik su $\alpha_i = 0, \ i = 1, \ldots, n$.

Tokią sprendinių sistemą vadinsime *fundamentaliąja sprendinių sistema.*

**5.1 Teorema** (5.12) *sprendinių sistema yra fundamentali tada ir tik tada, kai šios sistemos Vronskianas*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

*yra nelygus nuliui bent viename intervalo* $(a, b)$ *taške.*

Galima parodyti, kaip ir $n-$ kintamųjų atveju, kad jei Vronskianas nelygus nuliui bent viename intervalo $(a, b)$ taške, tai jis nelygus nuliui ir visame intervale. Šios teoremos neįrodysime.

Turime, kad funkcijos $p_{ki}, \ k, i = 1, \ldots, n$ yra tolydžios. Taigi, egzistuoja begalo daug fundamentalių sprendinių sistemų.

**Apibrėžimas** *Fundamentaliąją sistemą* (5.12) *vadinsime normuota taške* $x_0$, *jeigu sprendiniai, sudarantys šią sistemą, taške* $x_0$ *išpildo tokias sąlygas:*

$$\begin{cases} y_{11} = 1, y_{12} = 0, \ldots, y_{1n} = 0 \text{ pirmas sprendinys,} \\ y_{21} = 0, y_{22} = 1, \ldots, y_{2n} = 0 \text{ antras sprendinys,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n1} = 0, y_{n2} = 0, \ldots, y_{nn} = 1 \text{ n} - \text{asis sprendinys.} \end{cases}$$

**Apibrėžimas** *Jeigu žinoma* (5.11) *homogeninės sistemos fundamentali sprendinių sistema, tai tiesinį darinį*

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ki}, \ i = 1, \ldots, n \tag{5.13}$$

*čia* $c_k$ *yra realūs skaičiai, vadinsime* (5.11) *sistemos bendruoju sprendiniu srityje*

$$x \in (a, b), \ |y_i| < +\infty, \ i = 1, \ldots, n.$$

Bet koks (5.11) sistemos sprendinys yra gaunamas iš (5.13) lygybės tinkamai parinkus konstantas.

**2)** *Tiesinės sistemos su kintamais koeficientais*

Nagrinėsime tiesinę, nehomogeninę dif. lygčių sistemą. Norint rasti šios sistemos bendrąjį sprendinį reikia:

1) rasti šią sistemą atitinkančios homogeninės sistemos bendrąjį sprendinį;

2) rasti vieną atskirąjį nehomogeninės sistemos sprendinį.

Tarkime, kad duota sistema (5.11). Tada šią sistemą atitinkanti homogeninių dif. lygčių sistema yra tokia:

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = p_{i1}(x)y_1 + p_{i2}(x)y_2 + \ldots + p_{in}(x)y_n, \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{5.14}$$

Tarkime, kad radome (5.14) sistemos bendrąjį sprendinį

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ki}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Jeigu funkcijų rinkinys $z_1, \ldots z_n$ yra atskiras (5.11) sistemos sprendinys, tada (5.14) sistemos bendrasis sprendinys yra lygus šių sprendinių sumai, t.y.

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ki} + z_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Analogiškai, kaip ir $n-$ os eilės dif. lygties atveju, nehomogeninės dif. lygties atskirąjį (tuo pačiu ir bendrą) sprendinį, kai žinomas šią sistemą atitinkančios homogeninės lygties sprendinys, galime rasti naudojant konstantų varijavimo metodą. Aptarkime šį metodą.

Tarkime, kad duotas (5.11) sistemą atitinkančios, homogeninės sistemos, bendrasis sprendinys:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ki}. \ i = 1, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Tarkime, kad $c_k = c_k(x)$ yra kokios nors tolydžiai diferencijuojamos funkcijos. Įrašę šį sprendinį į sistemą (5.11) gauname tokią lygčių sistemą:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c'_k y_{ki} = f_i(x), \ i = 1, \ldots, n.$$

Išsprendę šią algebrinių lygčių sistemą, $c_i'$ atžvilgiu, gauname tokią sistemą:

$$c_i'(x) = \varphi_i(x), \quad \text{arba} \quad c_i = \int \varphi_i(x)\mathrm{dx} + b_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Įrašę gautąsias $c_i$ reikšmes į (5.15) lygybes gauname nehomogeninės dif. lygčių sistemos sprendinį

$$u_i = \sum_{k=1}^{n} y_{ki}\Big(\int \varphi_i(x))\mathrm{dx} + \sum_{k=1}^{n} b_k y_{ki} = z_i + y_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

čia $z_i$ yra nehomogeninės dif. lygčių sistemos atskirasis sprendinys, $u_i$ tos pačios sistemos- bendrasis sprendinys.

**3)** *Tiesinės sistemos su pastoviais koeficientais*
Tarkime, kad (5.11) sistemoje koeficientai turi savybę:
$p_{ki}(x) \equiv a_{ki} \in \mathcal{R}, \ i = 1, \ldots, n$ t.y.

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n + f_k(x), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.16}$$

Ši sistema visuomet integruojama kvadratūromis, kadangi šią sistemą atitinkančiai homogeninei dif. lygčių sistemai visada egzistuoja fundamentali sprendinių sistema, kurią sudaro elementariosios funkcijos.

Homegeninės dif. lygties fundamentaliosios sprendinių sistemos ieškosime naudodami metodą, vadinamą *Oilerio* vardu. Aptarsime šį metodą.

Ieškosime homogeninės dif. lygčių sistemos

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.17}$$

tokios f.s.s.:

$$y_1 = \gamma_1 \mathrm{e}^{\lambda x}, \ y_2 = \gamma_2 \mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, y_n = \gamma_n \mathrm{e}^{\lambda x}, \tag{5.18}$$

čia $y_i, i = 1, \ldots, n$, ir $\lambda$ realūs skaičiai, kuriuos teks rasti. Beje, būtinai bent vienas iš skaičių $\gamma_i, \ i = 1, \ldots, n$ yra nelygus nuliui, priešingu atveju dif. lygčių sistema turėtų tik nulinį sprendinį.

(5.18) funkcijas, įrašę į (5.17) bei kiekvieną lygtį padalinę iš $\mathrm{e}^{\lambda x}$ gauname tokią algebrinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{1n} - \lambda)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Tam, kad ši sistema turėtų nenulinį sprendinį, būtina ir pakankama, kad šios sistemos determinantas būtų lygus nuliui, kitaip tariant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.19}$$

Pastaroji lygybė yra $n-$ os eilės algebrinė lygtis, kuri vadinama (5.17) dif. lygčių sistemos *charakteringąja lygtimi*, o skaičiai $\lambda$ yra vadinami šios sistemos charakteringaisiais skaičiais. Matome, kad kiekvienam iš charakteringųjų skaičių $\lambda_i, \ \ i = 1, \ldots, n$ galime sudaryti vieną sprendinį naudojantis (5.18) lygybėmis. Beje, $n-$ os eilės algebrinė lygtis, kompleksinių skaičių aibėje, turi lygiai $n$ šaknų, jeigu įskaičiuosime ir kartotinumus.

Aptarsime tris sprendinių sudarymo atvejus, kurie priklauso nuo charakteringųjų šaknų pobūdžio.

**1.** *Tarkime, kad* (5.19) *charakteringosios lygties visos šaknys* $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$, *yra realios ir skirtingos.* Tuomet, kiekvieną šaknį $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$, galime susieti su algebrine lygtimi

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_i)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{1n} - \lambda_i)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią homogeninių lygčių sistemą ($\lambda_i$ yra konkretus skaičius), kintamųjų $\gamma_i,\ i = 1, \dots, n$ atžvilgiu, gauname nenulinį sprendinį (kodėl?) $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in},\ i = 1, \dots, n$. Taigi, su konkrečia $\lambda_i$ reikšme susiejame realiųjų skaičių rinkinį, kurio dėka apibrėžiame vieną dif. lygčių sistemos sprendinį.

Tada kiekvienai $\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$, reikšmei, mes sudarome po vieną dif. lygties sprendinį. Taigi, visoms skirtingoms $\lambda_i$ reikšmėms gauname po sprendinį, kurie generuoja fundamentaliąją sprendinių sistemą:

$$\begin{cases} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x},\ \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, \dots, \gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ \gamma_{21}e^{\lambda_x},\ \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, \dots, \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_n x},\ \gamma_{n2}e^{\lambda_x}, \dots, \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

Gauname, kad homogeninės sistemos, su pastoviais koeficientais bendrasis sprendinys yra toks:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} c_k \gamma_{ki} e^{\lambda_k x},\ i = 1, \dots, n.$$

**2.** *Charakteringosios lygties šaknys visos skirtingos, bet nebūtinai realios.*

Kaip yra gaunami atskiri sprendiniai, atitinkantys skirtingas realiąsias šaknis jau esame aptarę. Panagrinėsime sprendinius, atitinkančius kompleksines, charakteringojo polinomo šaknis.

Jeigu (5.19) polinomo šaknis yra kompleksinė, tarkime $a + ib$, tada kompleksinis skaičius $a - ib$ taip pat bus charakteringojo polinomo šaknis (kodėl?). Sukonstravę atskirąjį (5.18) sprendinį ir atskyrę šiame sprendinyje realiąsias ir menamąsias dalis, gausime du realius, tiesiškai nepriklausomus atskirus, homogeninės sistemos sprendinius sprendinius.

Sukonstravę atskirus sprendinius realioms, charakteringojo polinomo šaknims ir visoms kompleksinėms (kartu ir sujungtinėms) šaknims r sudarę jų tiesinį darinį gausime bendrąjį, homogeninių lygčių sistemos, sprendinį.

**3.** *Tarp charakteringojo polinomo šaknų yra pasikartojančių*

Tarkime, kad šaknis $\lambda_i$ yra kartotinė, kurios kartotinumas yra $k_i$. Tada šią šaknį atstovaujantys sprendiniai ieškomi tokios formos:

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_i x},\ y_2 = P_2(x)e^{\lambda_i x},\ \dots, y_n = P_n(x)e^{\lambda_i x},$$

čia $P_i(x),\ i = 1, \dots, n$ yra apibendrinti, ne aukštesni negu $k_i - 1-$ ojo laipsnio polinomai. Beje, šių visų polinomų $k-$ koeficientų yra laisvi, o likusieji išreiškiami per šiuos.

Laikydami, paeiliui šiuos laisvai parenkamus koeficientus lygius 1, o likusius lygius nuliui, sudarome $k_i$ tiesiškai nepriklausomų atskirųjų sprendinių (kodėl taip sudaryti sprendiniai tiesiškai nepriklausomi). Jeigu $\lambda_i$ realus, tai ir atskiri sprendiniai yra realūs.

Tarkime, kad kartotinė šaknis $\lambda = a + ib$ yra $k-$ ojo kartotinumo kompleksinė šaknis. Suradę, aukščiau aptartu būdu, $k-$ tiesiškai nepriklausomų kompleksinių sprendinių ir atskyrę juose realiąsias bei menamąsias dalis, gausime $2k$ tiesiškai nepriklausomų realių sprendinių (beje, sprendiniai, atitinkantys kompleksinę šaknį $a - ib$, bus tiesiškai priklausomi nuo $a + ib$). Jeigu yra daugiau kartotinių kompleksinių šaknų, elgsimės analogišku būdu. Tada, bendrasis homogeninės dif. lygties sprendinys bus lygus visų atskirųjų sprendinių tiesiniam dariniui. Turėdami homogeninės dif. lygties bendrąjį sprendinį, naudodami konstantų varijavimo metodą, rasime bendrąjį nehomogeninės dif. lygties sprendinį.

Turėdami homogeninės dif. lygties f.s.s- mą, galime nustatyti nulinio sprendinio stabilumo sąlygas. Pasirodo, kad jeigu sistemos

$$\frac{\mathrm{dy_i}}{\mathrm{dx}} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n + f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

charakteringosios realiosios šaknys yra neigiamos arba šaknų realiosios dalys yra neigiamos, tai šios sistemos nulinis sprendinys yra stabilus Liapunovo prasme.

Jeigu bent viena, charakteringojo polinomo, šaknis yra teigiama arba yra kompleksinė ir turi teigiamą realiąją dalį, tai nulinis sprendinys nėra stabilus Liapunovo prasme.

Kartais sprendžiant dif. lygčių sistemą (nebūtinai pirmos eilės), gana naudinga taikyti integruojamų kombinacijų metodą. Panagrinėkime antros eilės dif. lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dy_1}}{\mathrm{dx}} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x), \\ \frac{\mathrm{dy_2}}{\mathrm{dx}} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x), \end{cases}$$

Tarkime, kad $k \in \mathcal{R}$. Padauginę antrąją nagrinėjamos sistemos lygtį iš skaičiaus $k$ ir sudėję su pirmąja sistemos lygtimi gauname, tokią dif. lygtį:

$$\frac{\mathrm{d(y_1 + ky_2)}}{\mathrm{dx}} = (a_{11} + ka_{21})y_1 + (a_{12} + ka_{22})y_2 + f_1(x) + kf_2(x).$$

Nesunku suprasti, kad pastaroji lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$\frac{\mathrm{d(y_1 + ky_2)}}{\mathrm{dx}} = (a_{11} + ka_{21})\big(y_1 + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}}y_2\big) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Pažymėję

$$k = \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} \tag{5.20}$$

gauname tiesinę lygtį

$$\frac{\mathrm{d(y_1 + ky_2)}}{\mathrm{dx}} = (a_{11} + ka_{21})\big(y_1 + ky_2\big) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Tiesinės nehomogeninės lygties sprendinys yra toks:

$$y + kz = \mathrm{e}^{(a_{11}+ka_{21})x}\Big(c + \int (f_1(x) + kf_2(x))\mathrm{e}^{-(a_{11}+ka_{21})x}\mathrm{dx}\Big)$$

Jeigu (5.20) lygtis turi du sprendinius (kada taip bus?), tai tada įrašę šias $k_i$ reikšmes į gautąją bendrojo sprendinio formulę gauname nagrinėjamos sistemos du pirmuosius integralus. Pastarųjų tiesinis darinys ir bus bendrasis sistemos sprendinys.

Jeigu nagrinėjamos tiesinės homogeninės dif. lygčių sistemos koeficientai turi savybę:

$$p_{kl}(x) = a_{kl}\varphi(x), \ (k, l = 1, \ldots n),$$

tai naudodami keitinį

$$t = \int \varphi(x)\mathrm{dx}$$

nagrinėjamą sistemą pertvarkome į tiesinę dif. lygčių sistemą su pastoviais koeficientais.

**Taikymai fizikoje**

**1.** *Medžiagos skilimo uždavinys* Tarkime, kad medžiaga $A$ skyla į dvi skirtingas medžiagas $P$ ir $Q$. Naujų medžiagų susidarymo greitis yra tiesiog proporcingas nesuskilusiam medžiagos $A$ kiekiui. Rasime medžiagų $P$ ir $Q$ atitinkamų kiekių $x$ ir $y$ kitimo greičius, priklausomai nuo laiko, jeigu po valandos, kai prasidėjo skilimo procesas, $\frac{x=a}{8}$ ir $y = 3a/8$, čia $a$ yra medžiagos $A$ kiekis.

Prėjus laikui $t$, medžiagos $A$ kiekis yra lygus $a - x - y$. Kadangi naujų medžiagų susidarymo kiekiai yra tiesiogiai proporcingi nesuskilusios medžiagos kiekiui, tai

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = k_1(a - x - y), \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = k_2(a - x - y). \end{cases}$$

Išspręskime šią sistemą. Padalinę atitinkamas lygybių puses vieną iš kitos gauname,

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{k_2}{k_1},$$

o iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad $y = k_2 x/k_1 + c$. Žinome, kad pradiniu laiko momentu $t = 0$ turime, kad $x = y = 0$. Taigi, $c = 0$ ir gauname, kad $y = k_2 x/k_1$. Įrašę šią $y$ reikšmę į pirmąją lygtį gauname tokią dif. lygtį:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + (k_1 + k_2)x = k_1 a.$$

Šios tiesinės lygties bendrasis sprendinys yra toks:

$$x = \frac{ka_1}{k_1 + k_2} + c_1 \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)t}.$$

Naudodamiesi pradine sąlyga, t.y. $x(0) = 0$ gauname, kad

$$c_1 = \frac{-k_1 a}{(k_1 + k_2)}.$$

Tada,

$$x = \frac{ka_1}{k_1 + k_2}\big(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)t}\big).$$

Rasime proporcingumo koeficientus $k_1, k_2$. Žinodami, kad $x = a/8$ ir $y = 3a/8$, kai $t = 1$ (laiko vienetu laikome valandą) gauname sistemą koeficientams nustatyti:

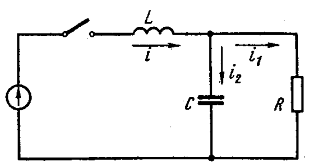
$$\begin{cases} \frac{k_1}{k_1+k_2}\big(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)}\big) = \frac{1}{8}, \\ \frac{k_2}{k_1+k_2}\big(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2)}\big) = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą randame, kad $k_1 = 1/4 \ln 2$ ir $k_2 = 3/4 \ln 2$.

Tada sistemos sprendinys bus toks:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{4}(1 - 2^{-t}), \\ y = \frac{3a}{4}(1 - 2^{-t}). \end{cases}$$

**2.** *Grandinė, kurioje veikia pastovi elektrovaros jėga (evj).* Tarkime, kad grandinė, kurios induktyvumas $L$, elektrinė talpa $C$ ir varža $R$ sujungti kap parodyta 5.1 pav. .




**5.1 pav.**

Šią grandinę pajungiame prie šaltinio, turinčio pastovią evj., kuri lygi $E$. Beje, laikome, kad pradžioje grandinėje elektros srovės nebuvo. Rasime srovę $i = i(t)$, pratekančią ritėje, su indukcija $L$.

Tegu $i_1, i_2$ yra srovės dešinioje grandinės dalyje. Remdamiesi Kirhofo dėsniu gauname tokius sąryšius:

$$\begin{cases} L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_1)\mathrm{d}\theta = E, \\ Ri_1 - \frac{1}{C}\int_0^t (i - i_1)\mathrm{d}\theta = 0, \end{cases}$$

čia $i_2 = i - i_1$. Sudėję atitinkamas šios sistemos lygčių puses gauname tokią dif. lygtį:

$$L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} + Ri_1 = E. \tag{5.21}$$

Diferencijuodami sistemos pirmąją lygtį $t$ atžvilgiu gauname

$$L\frac{\mathrm{d^2i}}{\mathrm{dt^2}} + \frac{1}{C}i - \frac{1}{C}i_1 = 0,$$

o iš pastarosios išplaukia, kad

$$i_1 = CL\frac{\mathrm{d^2i}}{\mathrm{dt^2}} + i.$$

Įrašę paskutiniąją $i_1$ reikšmę į (5.21), gauname antros eilės dif. lygtį su pastoviais koeficientais:

$$i''_{tt} + \frac{1}{CR}i'_t + \frac{1}{CL}i = \frac{E}{CRL}.$$

Šios lygties bendrąjį sprendinį siūlome rasti skaitytojui.

**Uždaviniai**

Išspręskite pateiktąsias dif. lygčių sistemas.

$$\textbf{1.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -2y, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = z; \end{cases} \quad \textbf{2.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{y}{x}, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y + z; \end{cases} \quad \textbf{3.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y; \end{cases}$$

$$\textbf{4.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -y - 2z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = 4z + 3y; \end{cases} \quad \textbf{5.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y - 2z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y - z; \end{cases} \quad \textbf{6.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -2y, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = z; \end{cases}$$

$$\textbf{7.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 5x - 6y + z, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = x - z; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = -6z \end{cases} \quad \textbf{8.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2x + y, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = 2y + z; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = 2z \end{cases}$$

$$\textbf{9.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 4y - z - 5x + 1, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y + 2z + x - 1; \end{cases} \quad \textbf{10.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = z - \cos x, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = -y + \sin x; \end{cases}$$

$$\textbf{11.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -5y + 2z + 40\mathrm{e}^{x}, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y - 6z + 9\mathrm{e}^{-x}; \end{cases} \quad \textbf{12.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -y + z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = -y - 3z; \end{cases}$$

$$\textbf{13.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 10x - 3y - 9z, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -18x + 7y + 18z; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = 18x - 6y - 17z \end{cases} \quad \textbf{14.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = x - z, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -6x + 2y + 6z; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = 4x - y - 4z \end{cases}$$

$$\textbf{15.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = x + y - \cos t, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -2x - y + \sin t + \cos t; \\ x(0) = 1;\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Raskite duotųjų dif. lygčių sistemų nepriklausomus integralus:

$$\textbf{16.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = y, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = 2y; \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = -6z \end{cases} \quad \textbf{17.}\ \begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 4y - z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = y + 2z; \end{cases} \quad \textbf{18.}\ \frac{\mathrm{dx}}{1} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{2y - z}} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{y + 2z}}.$$

Nustatykite ar duotasis nulinis sprendinys yra stabilus:

**19**. $\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2x - y, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = 5x; \end{cases}$ **20**. $\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = x - 2y, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = x - y; \end{cases}$ **21**. $\begin{cases} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = x + y, \\ \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = -8x - 5y. \end{cases}$

Sudarykite fundamentaliąją sprendinių sistemą, normuotą taške $x = 0$;

**22**. $\begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = -y, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = z; \end{cases}$ **23**. $\begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 2y, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = 2z; \end{cases}$ **24**. $\begin{cases} \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = y - z, \\ \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}} = z - y. \end{cases}$

Sudarykite dif. lygčių sistemas, kurių atitinkamos fundamentaliųjų sprendinių sistemos yra tokios:

**25**. $\begin{cases} y_{11} = \mathrm{e}^{3x},\ y_{12} = 0, \\ y_{21} = 0, y_{22} = \mathrm{e}^{2x}; \end{cases}$ **26**. $\begin{cases} y_{11} = \mathrm{e}^{3x},\ y_{12} = 0, \\ y_{21} = x\mathrm{e}^{3x}, y_{22} = \mathrm{e}^{3x}; \end{cases}$

**27**. $\begin{cases} y_{11} = \mathrm{e}^{3x},\ y_{12} = 0, \\ y_{21} = 0, y_{22} = \mathrm{e}^{3x}. \end{cases}$