II. PIRMOS EILĖS DIF. LYGTIES SPRENDINIO EGZISTAVIMO IR VIENATINUMO TEOREMA

2.1 Pagalbiniai teiginiai

Diferencialinių lygčių, kurias galime išspręsti kvadratū- romis, aibė yra gana nedidelė. Pavyzdžiui, atrodytų labai paprastos lygties

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

suintegruoti negalime. Todėl praktikoje gana dažnai tenka lygtis spręsti apytiksliai. Bet prieš pradedant spręsti šias lygtis apytiksliai iš pradžių reikia išsiaiškinti ar apskritai nagrinėjamame taške arba srityje egzistuoja sprendinys ir kas ypatingai svarbu, jei jis egzistuoja, tai ar jis vienintelis. Suformuluosime būtinas ir pakankamas sąlygas, kurioms esant pirmos eilės diferencialinė lygtis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{2.1}$$

su pradine sąlyga $y(x_0) = y_0$, turi vienintelį sprendinį. Tačiau prieš pradėdami spręsti šią užduotį, mes atliksime paruošiamąjį darbą.

Simboliu $\{x_n\} \in M$, (M- metrinė erdvė) žymėsime metrinės erdvės elementų seką. Seką $\{x_n\}$ vadinsime fundamentalia, jei visiems $\epsilon > 0$ egzistuoja natūralusis skaičius N toks, kad

$$\rho(x_m, x_n) < \epsilon,$$

kai tik $m, n > N$.

Metrinėje erdvėje, bet kokia konverguojanti seka, yra fundamentali (kodėl?). Atvirkščias tvirtinimas ne visada teisingas. Metrinę erdvę (M, ρ) vadinsime *pilna,* jeigu bet kokia šios erdvės fundamentali seka turi ribą šioje erdvėje. Yra žinoma, kad metrinė erdvė $(\mathcal{R}^n, \rho_n)$ yra pilna.

Parodysime, kad tolydžių funkcijų, apibrėžtų uždarame intervale, aibė $C[a, b]$ yra pilna metrinė erdvė tolygiosios metrikos, kuri apibrėžiama tokiu būdu

$$\rho_c(f_n, f_m) = \max_{a \leq b} |f_n(t) - f_m(t)|,$$

atžvilgiu.

2.1 **Teorema** *Metrinė erdvė* $(C[a,b], \rho_c)$ *yra pilna.*

$\ominus$

Tarkime, kad $\{f_n(t)\}$ yra fundamentali seka. T.y. $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ toks, kad $\rho_c < \epsilon$, kai $m, n > N$. Bet kokiam fiksuotam t, realiųjų skaičių seka $\{f_n(t)\}$ yra fundamentali, taigi

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon; \quad (n, m > N). \tag{2.2}$$

Taigi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \quad (\forall t \in [a,b]).$$

Perėję prie ribos (2.2) nelygybėje, kai $m \to \infty$ gauname, kad

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon; \quad (n > N, \forall t \in [a,b]).$$

Iš pastarosios gauname, kad

$$\sup_{a\le x\le b} |f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon; \quad (n > N). \tag{2.3}$$

Gavome, kad funkcijų seka konverguoja tolygiai intervale $[a,b]$ prie funkcijos $f(t)$. Vadinasi ir $f \in C[a,b]$.

$\oplus$

Tarkime, kad metrinėje erdvėje M apibrėžta funkcija $F : M \to M$. Sakysime, kad funkcija yra spaudžiantis atvaizdis (toliau s.a.), jeigu

$$\rho(F(x), F(y)) \le \alpha\rho(x,y), \quad \alpha \in [0,1)$$

ir α nepriklauso nuo erdvės elementų x, y.

Tašką $x_0 \in M$ vadinsime nejudamu s.a. tašku, jeigu $f(x_0) = x_0$.

Skaitytojui paliekame įrodyti, kad *spaudžiantis atvaizdis yra tolydus.*

2.2 Teorema *Sakykime, kad* $f : X \to X$ *yra s.a. pilnoje metrinėje erdvėje* (X, ρ)*. Tada egzistuoja vienintelis taškas* $x_0 \in X$ *toks, kad* $\forall x \in X$ *seka*

$$\{f^n(x); n \in \mathcal{N}\} \to x_0, \text{kai } n \to \infty.$$

$\ominus$

Tarkime, kad $x \in X$ nejudamas transformacijos taškas, o $s \in [0,1]$ yra transformacijos f s.k.. Sakykime, kad $n > m$, kai $m, n = 0, 1, \ldots,$ tada

1) $$\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^m \rho(x, f^m(x)).$$

Matome, kad $\forall k = 0, 1, \ldots$

$$\rho(x, f^k(x)) \leq \rho(x, f(x)) + \rho(f(x), f^2(x)) + \ldots + \rho(f^{k-1}(x), f^k(x))$$

$$\leq (1 + s + s^2 + \ldots s^{k-1})\rho(x, f(x)) \leq (1-s)^{-1}\rho(x, f(x)).$$

Pasinaudoję (1)- ąja nelygybe, iš paskutiniosios gauname

$$\rho(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{m \wedge n}(1-s)^{-1}\rho(x, f(x)).$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad seka

$$\{f^n(x), n \in \mathcal{N}\}$$

yra Koši seka. Remdamiesi tuo, kad nagrinėjamoji erdvė pilna tvirtiname, kad Koši seka konverguoja, be to šios sekos riba, tarkime x_0, priklauso tai pačiai metrinei erdvei. Dar daugiau, nagrinėjamas atvaizdisspaudžiantis, taigi jis ir tolydus tad $\forall \epsilon > 0$ teisinga nelygybė:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq s\rho(x, y) < \epsilon,$$

kai tik $\rho(x, y) < \delta = \epsilon / s$. Vadinasi

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

Ar šis taškas vienintelis? Tarkime, kad ne. T.y. egzistuoja taškas $y_0 \in X, x_0 \neq y_0$ toks, kad $x_0 = f(x_0), y_0 = f(y_0)$ ir

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq s\rho(x_0, y_0).$$

Bet iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad

$$(1-s)\rho(x_0, y_0) \leq 0.$$

Vadinasi, $\rho(x_0, y_0) = 0$, ir $x_0 = y_0$.

$\oplus$

Apytikslis šaknų skaičiavimas. Tarkime, kad $f(x)$ turi šaknį intervale $[a,b]$. Laikome, kad f turi tolydžią antros eilės išvestinę, be to $f'(x) \neq 0$, šiame intervale. Kadangi išvestinė nelygi nuliui, tai funkcija turi tik vieną šaknį ir be to ji monotoniška šiame intervale. Sudarykime pagalbinę funkciją tokiu būdu:

$$F(x) = x + k(x)f(x),$$

čia $k(x)$ yra tolydžiai diferencijuojama, nelygi nuliui, funkcija. Akivaizdu, kad funkcijos $F(x)$ nejudamas taškas yra funkcijos $f(x)$ nulis ir atvirkščiai. Be to matome, kad jei funkcija $F(x)$ intervalą $[a,b]$ atvaizduoja į save patį, tai seka $x_n = F(x_{n-1})$ konverguoja į nejudamą funkcijos F tašką, o tuo pačiu ir funkcijos f šaknį. Parinkdami funkcijas $k(x)$, mes gausime skirtingas šaknies aproksimavimo taisykles.

Šaknies aproksimavimo metodas, kai $k(x) = -1/f'(x)$, yra vadinamas *Niutono metodu.* Tarkime, kad sekos narys $x_{n-1} \in [a,b]$ yra žinomas. Tada norint rasti sekantį sekos narį x_n, taške $\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big)$ brėžiame liestinę. Tašku x_n laikome tą intervalo $[a,b]$ tašką, kuriame liestinė kertą minėtąjį intervalą. Žinome, kad liestinės lygtis yra tokia

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}).$$

Tarę, kad $y = 0$, gausime, kad $x = x_n$, taigi

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Tokiu būdu sukonstruojame funkcijos $F(x)$ iteracinę seką.

2.2 Pagrindinė teorema

2.3 Teorema *Tarkime, kad duota dif. lygtis*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{2.4}$$

čia funkcija $f(x,y)$ yra tolydi stačiakampyje

$$D = \{x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \ \ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$$

ir be to funkcija turi aprėžtą dalinę išvestinę, šioje srityje,

$$|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq N, \ \ N \in \mathcal{R}. \tag{2.5}$$

Tada intervale $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *čia*

$$\delta < \min\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\}, \quad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|, \tag{2.6}$$

egzistuoja vienintelis lygties (2.4) *sprendinys, išpildantis pradinę sąlygą*

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.7}$$

Be to teisinga nelygybė

$$|y(x) - y_0| \leq b, \quad (\forall x \in I).$$

Sprendinys $y(x) \in C^1(I)$. *Be to, jeigu* $f(x,y)$ *turi* $p-$ *eilės tolydžias dalines išvestines, tai sprendinys* $y(x)$ *intervale* I *turi* $p+1$ *eilės išvestines.*

$\ominus$

Visų pirma parodysime, kad (2.4) lygtis ekvivalenti tokiai integralinei lygybei:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t. \tag{2.8}$$

Tarkime, kad $y(x)$ yra (2.6) lygties sprendinys. Diferencijuodami minėtąją lygybę gauname, kad

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)), \text{ ir } y(x_0) = y_0.$$

Taigi, (2.8) lygties sprendinys $y(x)$ yra ir (2.4) lygties sprendinys, tenkinantis (2.7) pradinę salygą. Atvirkščiai, tarkime, kad $y(x)$ yra (2.4) lygties sprendinys, tenkinantis pradinę salygą $y(x_0) = y_0$. Integruodami (2.4) dif. lygtį turime

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(t))\mathrm{d}t$$

arba

$$y(x) - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname, kad $y(x)$ yra (2.7) integralinės lygties sprendinys.

Pažymėkime raide $\mathcal{M}$ tolydžių funkcijų $y(x)$, apibrėžtų intervale I ir turinčių savybę

$$|y(x) - y_0| \le b,$$

aibę. Apibrėžkime aibėje $\mathcal{M}$ metriką ρ_c. Tada pora $(\mathcal{M}, \rho_c)$ yra metrinė erdvė. Šios erdvės, bet kokia fundamentali seka $y_n(x)$ tolygiai konverguoja intervale I į tolydžią funkciją $y(x)$. Be to, remintis erdvės $\mathcal{M}$ apibrėžimu, turime, kad šios erdvės elementų seka turi savybę:

$$|y_n(x) - y_0| \le b, \quad (x \in I,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Kadangi erdvė pilna, tai perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname, kad teisinga nelygybė

$$|y(x) - y_0| \le b.$$

Bet tada ir $y(x) \in \mathcal{M}$. Taigi, $\mathcal{M}-$ pilna metrinė erdvė.

Lygybė

$$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t, \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.9}$$

nurodo priskyrimą, kuriuo bet kokiai funkcijai $y(x) \in \mathcal{M}$ yra priskiriama funkcija $z(x) \in \mathcal{M}$. Be to, jeigu $y \in \mathcal{M}$, tai $y(t)$ yra tolydi funkcija, priklausanti stačiakampiui

$$D_1 = \{x_0 - \delta \le x \le x_0 + \delta, \ \ y_0 - b \le y \le y_0 + b\},$$

tai iš funkcijos $f(x, y)$ tolydumo srityje D_1 gauname, kad (2.9) reiškinio dešinioji funkcija yra tolydi, kintamojo x funkcija, o tuo pačiu ir $z(x)$ yra tolydi intervale I. Dar daugiau,

$$|z(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t| \le M|x - x_0| \le M\delta < b.$$

Matome, kad ir funkcija $z \in \mathcal{M}$. Taigi, mes matome, kad (2.9) lygybė apibrėžia funkciją, $z = g(y), \ \ y, z \in \mathcal{M}$ kuri pilną metrinę erdvę atvaizduoja į ją pačią. Beje, ši funkcija yra spaudžiantis atvaizdis. Įsitikinkime tuo. Tegu $z_1 = f(y_1), \ \ z_2 = f(y_2), \ \ y_1, y_2 \in \mathcal{M}$. Tada teisinga lygybė:

$$|z_1(x) - z_2(x)| = |\int_{x_0}^{x} \big(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\big)\mathrm{d}t| =$$

$$|\int_{x_0}^{x}(y_1(t)-y_2(t))f'_y(t,\lambda(t))\mathrm{d}t| \le \int_{x_0}^{x}\rho_c(y_1,y_2)N\mathrm{d}t \le$$

$$\rho_c(y_1,y_2)\delta N = \alpha\rho_c(y_1,y_2), \tag{2.10}$$

čia $\alpha = \delta N,\ 0 \le \alpha < 1$.

Iš (2.10) nelygybės gauname, kad

$$\rho_c(z_1,z_2) = \max_{x\in I}|z_1(x)-z_2(x)| \le \alpha\rho_c(y_1,y_2).$$

Taigi, funkcija g yra spaudžiantis atvaizdis. Bet kiekvienas spaudžiantis atvaizdis pilnoje metrinėje erdvėje turi vienintelį nejudamą tašką (žr. 2.2 Teorema),

$$y = g(y),$$

kuris yra (2.8) integralinės lygties sprendinys, o tuo pačiu ir (2.4) lygties sprendinys, su pradine (2.7) sąlyga.

Sukonstruokime seką

$$y_n(x) = g(y_{n-1}(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\mathrm{d}t \ \ (n = 1,\dots,) \tag{2.11}$$

čia $y_0(x) \equiv y_0 \in \mathcal{M}$. Naudodamiesi Niutono metodu galime užrašyti, kad

$$|y(x)-y_n(x)| \le \frac{N\delta}{1-N\delta}\max_{x\in I}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|.$$

Taigi, sudaryta seka konverguoja į skaičių y_0, t.y. dif. lygties sprendinys išpildo (2.7) sąlygą.

Parodysime, kad jei funkcija $f(x,y)$ turi tolydžias p eilės dalines išvestines srityje D, tai dif. lygties sprendinys $y(x)$ turi $p+1$ eilės išvestinę intervale I.

Turime, kad

$$y'(x) = f(x,y(x))\ (x \in I). \tag{2.12}$$

Turime, kad $f(x,y)$ yra tolydi srityje D, todėl ji tolydi ir kintamojo x atžvilgiu intervale I. Taigi, $y'(x)$ irgi tolydi intervale I. Tarkime, kad $p \ge 1$. Tada (2.12) lygybės dešinioji pusė turi tolydžią išvestinę. Vadinasi tolydžią išvestinę turi ir kairioji lygybės pusė, t.y.

$$y''(x) = f'_x(x,y(x)) + f'_y(x,y(x))y'(x).$$

Taikydami tuos pat samprotavimus kaip ir auksčiau, atvejui $p \geq 2$, gausime, kad funkcija $y(x)$ turi tolydžią trečios eilės išvestinę.

$\oplus$

Aptarkime paskutiniąją teoremą. Šioje teoremoje tvirtinama, kad jei funkcija $f(x,y)$ yra tolydi stačiakampyje D ir turi aprėžtą, tolydžią dalinę išvestinę, f'_y, tai plokštumos taškas (x_0, y_0) (šio taško pagalba apibrėžiame sritis D ir D_1) priklauso vieninteliam nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendiniui $y = y(x)$, kuris apibrėžtas visiems intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ taškams. Šis sprendinys priklauso stačiakampiui D_1. Be to esant teoremos sąlygoms, yra garantuojamas intervalo

$$I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

egzistavimas, kuriam priklauso sprendinys $y(x)$, o pastarąjam priklauso pasirinktas plokštumos taškas (x_0, y_0).

Teorema įrodyta.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

1. Tarkime, duota lygtis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tada,

$$f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad |f'_y| \leq 1.$$

Matome, kad teoremos sąlygos išpildytos aibėje $\mathcal{R}^2$. Taigi, koks bebūtų plokštumos taškas (x_0, y_0), egzistuoja dif. lygties vienintelė integralinė kreivė, kuriai priklauso minėtasis taškas.

2. Tarkime, duota lygtis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2.$$

Turime, kad $f(x,y) = y^2$. Akivaizdu, kad ši funkcija ir jos dalinė išvestinė f'_y yra tolydžios visoje plokštumoje. Todėl ir nespręsdami šios lygties galime tvirtinti, remdamiesi paskutiniąja teorema, kad kokį bepasirinktume plokštumos tašką (x_0, y_0), visuomet egzistuoja vienintelius šios dif. lygties integralinė kreivė, kuriai priklauso pasirinktas taškas.

Fiksuokime plokštumos tašką (x_0, y_0). Parinkime bet kokį stačiakampį

$$D = \{3 - a \leq x \leq 3 + a, \ 1 - b \leq y \leq 1 + y\}, \quad a, b > 0.$$

Tada,

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)| = \max_{y\in[1-b,1+b]} = (1+b)^2;$$

$$N = \max_{(x,y)\in D} |f'_y| = 2(1+b).$$

Tada,

$$\delta < \min\{a, \frac{1}{2(1+b)}, \frac{b}{(1+b)^2}\} < 0.5.$$

Išsprendę nagrinėjamą lygtį gauname tokią hiperbolių šeimą,

$$y = \frac{1}{x-c},$$

kai $y \neq 0$, kuri yra šios lygties bendrasis sprndinys. Beje, $y \equiv 0$, taip pat šios lygtis sprendinys, bet jo nenagrinėsime. Raskime sprendinį, kuriam priklauso taškas $(3,1)$. Gauname

$$y = \frac{1}{x-2}.$$

Pats didžiausias intervalas, kurio centras taške 3 ir kuriame apibrėžta integralinė kreivė, yra $(2,4)$. 3.3 Teoremos sąlygų dėka mes gauname kiek siauresnį sprendinio egzistavimo intervalą.

Tik nedidelė diferencialinių lygčių klasės dalis yra išsprendžiama integruojant, t.y. išsprendžiama kvadratūromis. Netgi paprasčiausios lygties

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

negalime suintegruoti, taigi negalime rasti ir šios lygties sprendinio, kurio būtų žinoma tiksli lygtis. Esant tokiai situacijai tenka dif. lygtį spręsti apytiksliai. Bet prieš taikant kokį nors apytikslį metodą, diferencialinės lygties sprendiniui rasti, mes turime žinoti ar nagrinėjamoje srityje apskritai egzistuoja dif. lygties sprendinys, o jei taip, tai ar šis sprendinys yra vienintelis. Paskutiniosios teoremos dėka mes galime atsakyti į šį klausimą.

2.3 Oilerio metodas, pirmos eilės diferencialinės lygties, apytiksliam sprendiniui nustatyti.

Tarkime duota lygtis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \qquad (2.13).$$

Laikysime, kad funkcija $f(x,y)$ išpildo visas 3.2 Teoremos sąlygas. Tada intervale $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ egzistuoja (2.13) dif. lygties vienintelis sprendinys $y = y(x)$, išpildantis pradines sąlygas $y(x_0) = y_0$. Beje,

$$\delta \leq \min\{a, \frac{1}{N}, \frac{b}{M}\}.$$

Oilerio metodo dėka, mes rasime diferencialinės lygties integralinės kreivės artinį, norimu tikslumu.

Apskaičiuokime, apytiksliai, reikšmę $y(z)$, kai $x_0 < z < x_0 + \delta$. Taškais $x_0, x_1, \ldots, x_n = z$ padalinkime intervalą $[x_0, z]$ į n lygių dalių. Skirtumą $h = x_{i+1} - x_i$, vadinsime skaičiavimo žingsniu. Simboliu y_i žymėsime apytikslę sprendinio reikšmę taškuose x_i.

Intervale $[x_0, x_1]$ vietoje (2.13) spręsime šios lygties Koši uždavinį, su pradinėmis sąlygomis

$$Y_n' = f(x,y), \;\; Y_n(x_0) = y_0, \;\; (x_0 \leq x \leq x_1).$$

Šios lygties sprendinys yra toks:

$$Y_n(x) = y_0 + f(x_0, y_0). \tag{2.14}$$

Šią tiesinę funkciją galime laikyti (2.14) diferencialinės lygties apytiksliu sprendiniu, intervale $[x_0, x_1]$. Geometrinė šio sprendinio interpretacija yra tokia: integralinę kreivę, minėtame intervale, mes pakeitėme integralinės kreivės liestinės, taške x_0, dalimi.

Remdamiesi (2.14) formule mes gauname, kad

$$y_1 = Y_n(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Tarkime, kad tokiu būdu mes sukonstravome apytiksles sprendinio reikšmes $y_1, y_2, \ldots y_k$. Tada intervale $[x_k, x_{k+1}]$, vietoje (2.13) lygties nagrinėjame lygtį

$$Y_n'(x) = f(x_k, y_k), \;\; Y_n(x_k) = y_k, \;\; (x_k \leq x \leq x_{k+1}).$$

Šios lygties sprendinys yra toks:

$$Y_n(x) = y_k + f(x_k, y_k)(x - x_k), \; (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.15}$$

Šį sprendinį vadinsime (2.13) lygties apytiksliu sprendiniu intervale $[x_k, x_{k+1}]$. (2.15) lygtyje parinkę $x = x_{k+1}$ gauname,

$$y_{k+1} = Y_n(x_{k+1}) = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Paskutinioji formulė yra *Oilerio metodo* esmė. Funkcijos $Y_n(x)$, apibrėžtos intervale $[x_0, d]$, (2.15) lygybėmis, vadinamos *Oilerio laužtėmis.* Natūralu tikėtis, kad mažindami žingsnį h (arba $n \to \infty$), mes gausime laužčių seką, kuri aproksimuos (2.15) dif. lygties integralinę kreivę. Šio darbo mes neatliksime, kadangi pastarasis uždavinys yra sprendžiamas matematinės analizės kurse, t.y. Oilerio laužčių seka ; $\{Y_n(x)\}$ intervale $[x_0, z]$ tolygiai konverguoja į (2.13) lygties sprendinį, kai $n \to \infty$.

Užduotys

1. Raskite funkcijų $f(x) = x^3 + x - 1$, $g(x) = x^4 + 3x - 1$ šaknis 0.01 tikslumu naudodami Niutono metodą.

2. Naudodami Oilerio laužčių metodą rekonstruokite diferencialinės lygties $y' = x^2 + y^2$ sprendinį pačių pasirinktu tikslumu.

Sudarykite funkcijų seką $\{y_n\}$ kuri konverguotų prie pateiktų dif. lygčių, išpildančių nurodytas pradines sąlygas, sprendinių.

3. $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$; **4**. $y' = y + \mathrm{e}^{y-1}$, $y(0) = 1$;

5. $y'' + y'^2 - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Nurodykite intervalą, kuriame egzistuoja sprendinys išpildantis pradines sąlygas

6. $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$; **7**. $y' = 2y^2 - x$, $y(1) = 1$.

Esant kokioms pradinėms sąlygoms egzistuoja vienintelis dif. lygties sprendinys

8. $y' = (y-1)\sqrt{y^3}$; **9.** $y' = \arccos y$.

III. AUKŠTESNĖS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

3.1 Bendros sąvokos

Nagrinėsime diferencialinę lygtį

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{3.1}$$

išspręstą $n-$ os eilės išvestinės atžvilgiu. Sakysime, kad f yra tolydi apibrėžimo srityje $D \in \mathcal{R}^{n+1}$.

Jeigu dešinė (3.1) lygybės pusė yra tiesinė funkcija, funkcijų $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ atžvilgiu, tai šią diferencialinę lygtį vadinsime *tiesine.*

Funkciją $y = f(x)$ vadinsime (1.1) lygties *sprendiniu*, intervale (a, b), jeigu $\varphi \in C^n(a, b)$ ir taškas $(x, f(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$, kai $x \in (a, b)$ ir be to teisinga tapatybė

$$y^{(n)} \equiv f\big(x, f(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\big).$$

Gana dažnai diferencialinės lygties sprendinio ieškoma parametrinėje formoje $x = \varphi(t),\ y = \xi(t)$, arba sprendiniai yra gaunami neišreikštine forma $\Phi(x, y) = 0$. Kaip paprastai, sprendinio grafikas yra vadinamas integraline kreive.

(3.1) dif. lygties Koši uždavinio sprendimu vadinsime sprendinio $y = y(x)$, kuris išpildo pradines sąlygas

$$y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \tag{3.2}$$

radimą, kai $x = x_0$, o skaičiai $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ yra laisvai pasirinkti.

Panagrinėkime antros eilės diferencialinę lygtį. Turime, kad

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{3.3}$$

Šiuo atveju Koši uždavinys yra formuluojamas tokiu būdu: rasti (3.2) diferencialinės lygties sprendinį $y = y(x)$, kuris išpildo pradines sąlygas: $y = y_0, y' = y_0'$, kai $x = x_0$. Interpretuojant geometriškai, tai reiškia, kad reikia rasti integralinę kreivę, kuriai priklauso fiksuotas taškas (x_0, y_0), ir be to šiame taške integralinės kreivės liestinės krypties koeficientas yra lygus $\mathrm{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Pateiksime antros eilės diferencialinės lygties, Koši uždavinio, fizikinę interpretaciją. Nagrinėsime diferencialinę lygtį

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = f\big(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big),$$

čia t laikas, $x, \mathrm{d}x/\mathrm{d}t, \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ yra materialaus taško padėtis, greitis ir pagreitis laiko momentu t, atitinkamai. Be to funkcija

$$f\big(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big),$$

yra jėga, veikianti materialųjį tašką. Tada šios diferencialinės lygties Koši uždavinys formuluojamas taip; rasti judėjimo trajektoriją, kuri išpildo pradines sąlygas:

$$x = x_0,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0,$$

kai $t = t_0$. Čia t_0, x_0, v_0 yra pradinis laiko momentas, pradinė padėtis ir pradinis greitis, atitinkamai.

Pasirodo, kad jeigu (3.1) diferencialinės lygties funkcija f yra tolydi taško $X_0 = (x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ aplinkoje, tai šiame taške egzistuoja (3.1) diferencialinės lygties Koši uždavinys. Šis sprendinys yra vienintelis, jeigu dalinės išvestinės, kintamųjų $y, y', \dots y^{(n-1)}$ atžvilgiu, yra aprėžtos. Nesunku suprasti, kad jei (1.1) lygybės dešinė pusė yra polinomas, kintamųjų $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ atžvilgiu ir be to visi polinomo koeficientai yra tolydžios funkcijos, tai minėtosios dalinės išvestinės yra aprėžtos. Tada x_0 parinkę koeficientų tolydumo intervale gausime, kad (3.1) diferencialinės lygties sprendinys egzistuoja šiame taške ir yra vienintelis.

Nagrinėjant aukštesnių eilių diferencialines lygtis, kartu su Koši uždaviniu yra formuluojamas ir *kraštinis uždavinys*, t.y. sprendiniui keliami reikalavimai ne tik intervalo viduje, bet ir šio intervalo kraštuose. Šios sąlygos yra vadinamos *kraštinėmis sąlygomis.*

Funkciją,

$$y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n) \tag{3.4}$$

apibrėžtą erdvės $\mathcal{R}^{n+1}$ srityje D ir turinčiai tolydžias dalines, $n-$ os eilės išvestines x atžvilgiu, vadinsime (3.1) diferencialinės lygties *bendruoju sprendiniu*, srityje D, jeigu bet kokiame šios srities taške yra išpildytos sprendinio egzistavimo ir vienetinumo sąlygos, ir be to teisingos lygybės

$$\begin{cases} y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n), \\ y' = \varphi'(x, c_1, \dots, c_n), \\ \dots, \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, c_1, \dots, c_n) \end{cases} \tag{3.5}$$

ir srityje D galime šias konstantas išreikšti tokiu būdu,

$$\begin{cases} c_1 = \xi_1(x, y, y' \dots, y^{(n-1)}), \\ c_2 = \xi_2(x, y, y' \dots, y^{(n-1)}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_n = \xi_1(x, y, y' \dots, y^{(n-1)}). \end{cases} \tag{3.6}$$

Be to (3.4) yra (3.1) lygties sprendinys, jei konstantas parinksime iš (3.6) lygybių, kai taškas
$X = (x, y, y' \ldots, y^{(n-1)}) \in D$.

Jei norime rasti (3.1) dif. lygties sprendinį, išpildantį pradines sąlygas taške $X_0 \in D$ elgiamės taip:

1) į sistemą (3.5) vietoje kintamųjų $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ įrašę skaičius $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ gauname tokią sistemą

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x, c_1, \ldots, c_n), \\ y_0' = \varphi'(x, c_1, \ldots, c_n), \\ \ldots, \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, c_1, \ldots, c_n) \end{cases} \tag{3.7}$$

2) Išsprendę (3.7) sistemą, konstantų $c_1, \ldots, c_n$ atžvilgiu, gauname šių konstantų konkrečias reikšmes $c_1 = c_1^0, \ldots c_n = c_n^0$. Įrašę gautąsias skaitines reikšmes į (3.4) bendrojo sprendinio formulę, gauname Koši uždavinio sprendinį

$$y = \varphi(x, c_1^0, \ldots, c_n^n). \tag{3.8}$$

Beje, šis sprendinys bus vienintelis.

Bendrojo sprendinio forma

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \tag{3.9}$$

kuriame konstantų vietoje įrašytos sprendinio $y = y(x)$ ir jo išvestinių, iki $n-1$ eilės, reikšmės taške x_0, vadinsime *bendruoju, Koši formos, sprendiniu.*

(1.1) diferencialinės lygties sprendinį

$$\Phi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$$

vadinsime šios dif. lygties *bendruoju integralu.*

Spresdami diferencialines lygtis ne kartą esame gavę sprendinius, kurie užrašyti parametrine forma. Sistemą

$$\begin{cases} x = \xi(t, c_1, \ldots, c_n), \\ y = \varphi(t, c_1, \ldots, c_n), \end{cases}$$

vadinsime (3.1) dif. lygties sprendiniu bendruoju sprendiniu, *parametrinėje formoje.*

Jeigu turime $n-$ parametrinių kreivių šeimą, tai jas diferencijuodami n kartų kintamojo x atžvilgiu ir išreikšdami iš šeimos konstantas c_n gausime $n-$ os eilės dif. lygtį, kurią vadinsime duotos kreivių šeimos diferencialine lygtimi.

(3.1) diferencialinės lygties sprendinį vadinsime *atskiru sprendiniu,* jeigu visuose šio sprendinio taškuose išpildytos Koši uždavinio vienetinumo sąlygos. Jeigu dif. lygties bendrojo sprendinio formoje parinksime konkrečias (leistinas) konstantų reikšmes, tai visuomet gausime atskirą sprendinį. Beje, šiuo atveju galima ir $\pm\infty$ konstantų reikšmė.

Jeigu sprendinio kiekviename taške nėra išpildyta Koši uždavinio vienetinumo sąlyga, tai šis sprendinys vadinamas *ypatingu.*

Dažnai integruodami (3.1) dif. lygtį gauname tokį reiškinį:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, c_1, \dots, c_k) = 0.$$

Pastarasis reiškinys vadinamas (3.1) dif. lygties *tarpiniu,* $n-k-$*osios eilės, integralu.*

Tarpinį integralą

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, c_1) = 0.$$

vadinsime *pirmuoju integralu.*

Žinant $k-$ nepriklausomų pirmųjų integralų galima pažeminti diferencialinės lygties eilę. Kai žinoma n diferencialinės lygties integralų, galime gauti diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį. Apie tai plačiau, kai nagrinėsime konkrečias diferencialines lygtis.

Mes nagrinėsime dif. lygtis, kurias galima integruoti žeminant jų eilę.

3.2 Diferencialinės lygtys, priklausančios tik nuo laisvojo kintamojo ir $n-$ osios eilės išvestinės.

Visų pirma nagrinėsime pačią paprasčiausią $n-$ os eilės diferencialinę lygtį, t.y.

$$y^{(n)} = f(x). \tag{3.10}$$

Laikome, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi kokiame nors intervale (a, b). Tada egzistuoja vienintelis, šios dif. lygties Koši uždavinio sprendinys. Beje, skaičius $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ galime parinkti laisvai, o $x_0 \in (a, b.)$ Be to, kiekvienas šios lygties bendrasis sprendinys yra apibrėžtas intervale (a, b). Ši lygtis ypatingų sprendinių neturi (kodėl?).

Nuosekliai integruodami (3.10) diferencialinę lygtį, $n-$ kartų ir naudodamiesi lygybe

$$\int_{x_0}^{x} \Big(\int_{x_0}^{\xi} f(t)\mathrm{d}t \Big) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \Big(\int_{t}^{x} f(t)\mathrm{d}\xi \Big) = \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

gauname,

$$y^{(n-1)} = c_{n-1} + \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$$

$$y^{(n-2)} = c_{n-2} + \int_{x_0}^{x} \big(c_{n-1} + \int_{x_0}^{\xi} (f(t)\mathrm{d}t) \big)\mathrm{d}\xi =$$

$$c_{n-2} + c_{n-1}(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f(t)\mathrm{d}t,$$

$$y = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + c_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t. \tag{3.12}$$

Arba

$$y = \int\int \ldots \int f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x \ldots \mathrm{d}x + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Paskutiniosios dvi lygybės yra (3.10) dif. lygties bendrasis sprendinys, srityje $x \in (a, b)$, $|y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, |y^{(n-1)}| < \infty$. Be to (3.12) lygybė apibrėžia lygties (3.10) bendrąjį sprendinį Koši formoje.

Beje, bendrąjį sprendinį galime užrašyti ir Koši forma, t.y.

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x \ldots \mathrm{d}x + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ldots+y_0(x-x_0)+y_0.$$

Čia $x_0 \in (a,b)$ yra fiksuotas taškas, o skaičiai $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ yra laisvai parinkti.

3.3 Lygtys neišreikštos $n-$ os eilės išvestinės atžvilgiu

1. Tarkime, kad duota dif. lygtis

$$F(x, y^n) = 0. \tag{3.1}$$

Jeigu šioje lygtyje galime išreikšti $n-$ os eilės išvestinę, tai turėsime 1.2 skyrelyje nagrinėtą situaciją.

Tarkime, kad išvestinės, kintamojo x atžvilgiu, išreikšti negalime, bet galime nežinomuosius parametrizuoti tokiu būdu:

$$x = \varphi(t),\ y^{(n)} = \xi(t).$$

Suprantama, kad šiuo atveju gausime sprendinį, išreikštą parametriniu būdu.

Pastebėkime, kad kintamąjį x galime išreikšti kintamojo t atžvilgiu. Tada naudodamiesi lygybe

$$\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\mathrm{d}x = \xi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

gauname, kad

$$y^{(n-1)} = \int \xi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t + c_1 \equiv \xi_1(t, c_1).$$

Pažeminome išvestinės eilę vienetu ir gavome vieną tarpinį integralą. Toliau elgdamiesi visiškai analogiškai gauname, kad

$$y = \xi_n(t, c_1, \ldots, c_n).$$

Tada bendrąjį nagrinėjamos diferencialinės lygties sprendinį, parametrinėje formoje, galime užrašyti taip:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \xi_n(t, c_1, \ldots, c_n). \end{cases}$$

3.4 Dif. lygtys be laisvojo kintamojo

Šiame skyrelyje nagrinėsime tokią dif. lygtį:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Parodysime, kad pažymėję $y' = z(y)$ dif. lygties eilę galima su/-mažinti viena eile. Iš tiesų, remdamiesi paskutiniuoju apibrėžimu gauname,

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z'_y \cdot z,$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y} \cdot z = \Big(\frac{d^2z}{\mathrm{d}y^2}z + (z'_y)^2\Big) \cdot z$$

$$y^{(n)} = \big(\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}y^3}z + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + 2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}\big) \cdot z, \ \ldots$$

$y^{(n)} = f(z, z', \ldots z^{(n-1)})$.

Įrašę paskutiniąsias funkcijos y išvestinių reikšmes į pradinę dif lygtį gauname dif. lygtį, kurios vienetu mažesnė negu pradinė. Tęsdami procesą pradinės dif lygties eilę galime mažinti iki pirmos eilės. Tiesa, atlikę keitimą $z = y'$ galėjome prarasti sprendinius $y = c$. Bet ar funkcija $y = c$ yra pradinės dif. lygties sprendinys įsitikiname pastarąją funkciją įrašę į duotąją lygtį.

3.5 Dif. lygtys kuriose nėra ieškomosios funkcijos

Šiame skyrėlyje nagrinėsime dif. lygtį

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \ 1 \leq k < n.$$

Pažymėję $y^{(k)} = z$, $z = z(x)-$ nauja nežinoma funkcija, gauname lygtį, kurios eilė k vienetų mažesnė:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Jeigu pastarąją lygtį mokame integruoti, tai randame tarpinį integralą

$$z = \varphi(x, c_1, \ldots c_{n-k}), \ \text{ arba } \ \Phi(x, z, c_1, \ldots, c_{n-k}) = 0.$$

Iš paskutiniųjų lygybių gauname, kad ieškomąją funkciją rasime spręsda mi tokią dif lygtį:

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k}), \ \text{ arba } \ \Phi(x, y^{(k)}, c_1, \ldots, c_{n-k}) = 0.$$

Pastebėsime, kad paskutiniosios lygties sprendimo metodą esame aptarę 3.3 skyrelyje.

Tarkime duota lygtis

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} = f(x).$$

Pakeitę $y^{(n-1)} = z$ gauname tiesinę nehomogeninę dif. lygtį

$$z' + p_1(x)z = f(x).$$

3.6 Homogeninės (apibendrintos homogeninės), funkcijos ir jos išvestinių atžvilgiu, dif. lygtys

1. Sakysime, kad lygtis

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

yra homogeninė funkcijos y ir jos išvestinių $y', \dots, y^{(n)}$ atžvilgiu, jeigu minėtasias funkcijas pakeitę fukcijomis $ky^{(i)},\ \ i = 0, \dots, n$ gauname

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^l F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

l vadinamas lygties homogeniškumo eile.

Jeigu dif. lygtis yra homogeninė nurodytų funkcijų atžvilgiu, tai atlikę keitinį $y' = yz,\ z = z(x)$ gauname, kad

$y'' = (z^2 + z')y,\ \ y''' = (z^3 + 3zz' + z'')y, \dots,$

$y^{(n)} = f(z, z', \dots, z^{(n-1)})y.$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad remdamiesi F homogeniškumu nagrinėjamą funkciją galime perrašyti taip:

$$y^l F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, f(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Paskutinioji dif. lygtis yra $n-1$ eilės, t.y. vienetu žemesnė negu prieš tai buvusi. Tarkime, kad šią lygtį pavyko išspręsti ir gavome jos bendrąjį sprendinį

$$z = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1}),$$

kuris yra tarpinis pradinės dif. lygties sprendinys. Be to, pastebėję, kad $z = y'/y$ gauname, kad bendrasis pradinės dif. lygties sprendinys yra tokia funkcija:

$$y = c_n \exp\{\varphi(x, c_1, \dots, c_{n-1})\}.$$

2. Dif. lygtį
$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$
vadinsime apibendrinta homogenine lygtimi, jeigu egzistuoja racionalus skaičius k toks, kad nagrinėjama lygtis tampa homogenine, reiškinyje F esančius dydžius $x, y, y', \dots y^{(n)}$ laikant 1−ojo, k−ojo, $k-1$-ojo, $\dots k-n-$ ojo matavimo dydžiais, atitinkamai. Jeigu toks k egzistuoja, tai tada darome keitinį
$$x = \mathrm{e}^t, \quad y = z\mathrm{e}^{kt}.$$

Pastebėsime, kad
$$y' = y'_t\mathrm{e}^{-t} = \big(z'_t\mathrm{e}^{kt} + kz\mathrm{e}^{kt}\big)\mathrm{e}^{-t}.$$

Siūlome skaitytojui pačiam suskaičiuoti keletą aukštesnių eilių išvestinių.

Taikymai fizikoje

1. Tarkime, kad m masės materialus taškas juda tiese, veikiamas jėgos F. Beje, laikysime, kad judėjimas priklauso tik nuo laiko, greičio arba taško koordinatės. Tarkime, kad tiesė, kuria juda taškas sutampa su Ox ašimi. Tada remintis Niutono dėsniu
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F.$$
Tarkime, kad pradiniu laiko momentu t_0 taškas yra x_0 padėtyje, o jo greitis v_0. Tegu jėga, veikianti tašką priklauso nuo laiko, t.y. $F = F(t)$. Remdamiesi tuo, kad $v = x'_t$ ir $v'_t = x''_{tt}$ gauname, kad
$$v = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(u)\mathrm{d}u + c_1.$$
Išsprendę Koši uždavinį gauname, kad
$v = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(u)\mathrm{d}u$ arba
$$x = v_0t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{t_0}^{z} F(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}z + c_2.$$
Dar kartą spręsdami Koši uždavinį randame konstantos c_2 reikšmę, kuri lygi $c_2 = x_0 - v_0t_0$.

Tada dif. lygties sprendinį, Koši formoje, galime užrašyti taip:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\Big(\int_{t_0}^{z} F(u)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}z + c_2. \qquad (3.13)$$

2. Tarkime, kad m masės materialusis taškas juda tiese, veikiamas jėgos, kuri tolygiai mažėja, didėjant laikui ir laiko momentu T šios jėgos reikšmė tampa lygi nuliui. Pažymėkime $F_0 = F(0)$, $v_0 = v(0)$ ir $x_0 = 0$. Remdamiesi pradine prielaida turime, kad $F = F_0 - kt$, čia k koks nors proporcingumo koeficientas. Kadangi $F(T) = 0$, tai $F_0 - kT = 0$. Iš čia gauname proporcingumo koeficiento reikšmę, kuri lygi $k = F_0/T$. Vadinasi teisinga lygybė: $F = F_0(1 - t/T)$.

Įrašę gautąją jėgos reikšmė į (3.13) formulę ir suintegravę gauname, kad

$$v = \frac{F_0}{m}\Big(t - \frac{t^2}{2T}\Big), \quad x = \frac{F_0 t^2}{2m}\Big(1 - \frac{t}{3T}\Big).$$

3. Aptarsime atvejį, kai jėga yra greičio funkcija, t.y. $F = F(v)$.

Naudodami Niutono dėsnį gauname, kad $mv'_t = F(v)$. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia

$$t + c_1 = m\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}u}{F(u)}.$$

Išsprendę Koši uždavinį randame $c_1 = -t_0$. Tada

$$t - t_0 = m\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}u}{F(u)}. \qquad (3.14)$$

Tarkime, kad dešiniąją pusę suintegravome ir gavome, kad

$$v = \varphi(t, t_0, v_0).$$

Tada

$$x = \int_{t_0}^{t}\varphi(z, t_0, v_0)\mathrm{d}z + c_2.$$

Dar kartą spręsdami Koši uždavinį gauname, kad $c_2 = x_0$. Taigi, materialaus taško judėjimo dėsnį, kai $F = F(v)$ galime aprašyti tokia formule:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t}\varphi(z, t_0, v_0)\mathrm{d}z.$$

Tarkime, kad (3.14) lygtyje mums nepavyksta išreikšti $v = v(t)$. Tada atlikę keitinį $v = x'_t$, $x''_{tt} = v'_t = v'_x x'_t = vv'_x$ Niutono dėsnį perrašome taip:

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(v).$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$x = m\int_{v_0}^{v}\frac{u\mathrm{d}u}{F(u)} + c.$$

Spręsdami Koši uždavinį gauname, kad $c = x_0$. Vadinasi judėjimo dėsnis yra toks:

$$x = m\int_{v_0}^{v}\frac{u\mathrm{d}u}{F(u)} + x_0. \tag{3.15}$$

Aptartoji situacija pasitaiko, pavyzdžiui tada, kai materialus taškas atlieka tiesiaeigį judesį aplikoje, su pasipriešinimo jėgomis, kurios yra tiesiog proporcingos greičiui, t.y. šiuo atveju $F = F(v) = -kv$. Remdamiesi paskutiniąja lygybe bei (3.15) judėjimo dėsniu gauname, kad

$$x = x_0 - \frac{m}{k}(v - v_0),$$

o (3.15) formulę galime perrašyti taip

$$\frac{m}{k}\ln\frac{v_0}{v} = t - t_0,$$

arba

$$v = v_0\exp\big(-k(t-t_0)/m\big).$$

4. Tarkime, kad jėga, veikianti materialųjį tašką, yra kelio funkcija, t.y. $F = F(x)$. Tada $v = x'_t$, o $x''_{tt} = vv'_x$. Tada antrąjį Niutono dėsnį galime perrašyti taip:

$$mvv'_x = F(x).$$

Integruodami paskutiniąją lygybę gauname

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u + c_1.$$

Spręsdami Koši uždavinį nustatome, kad $c_1 = mv_0^2/2$. Tada

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u.$$

Išsprendę šią lygtį v atžvilgiu gauname, kad

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u}.$$

Iš paskutiniosios lygybės (integruodami) gauname

$$t = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u}} + c_2.$$

Iš paskutiniosios, išsprendę Koši uždavinį randame, kad

$$t = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} F(u)\mathrm{d}u}} + t_0.$$

Suintegravę paskutinį reiškinį ir išreiškę x, t atžvilgiu gauname judėjimo dėsnį.

5. Išspręskime vieną šilumos laidumo uždavinį.

Tarkime, kad duotas cilindrinis vamzdis, kurio vidinis spindulys yra r, o išorinis spindulys lygus R. Nustatysime šilumos perdavimos iš vidaus į išorę dėsnį, laikydami, kad cilindro viduje palaikoma pastovi temperatūra, be to temperatūra θ bet kokiame vamzdžio taške nepriklauso nuo laiko ir kinta tik priklausomai nuo jo atstumo iki cilindro ašies.

Žinoma, kad šilumos kiekis, kirsdamas nykstamą ploto dalį, kuri statmena ašiai, ir šilumos srautas taip pat stakmenas šiai ašiai, per laiko tarpą $\mathrm{d}t$, yra proporcingas šiam plotui $\mathrm{d}F$, laiko tarpui $\mathrm{d}t$, ir temperatūros spinduliavimo greičiui nurodyta kryptimi, trumpai

$$\mathrm{d}q = -\lambda \mathrm{d}F \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}t,$$

λ proporcingumo koeficientas, priklausantis nuo aplinkos kurioje sklinda šiluma, yra vadinamas šilumos laidumo koeficientu, $r < \rho < R$ yra tarpinio cilindro spindulys.

Kadangi šilmos kiekis nepriklauso nei nuo $\mathrm{d}F$, nei nuo $\mathrm{d}t$, tai integruodami paskutiniąją lygybę gauname

$$Q = -\lambda F \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}.$$

Tarkime, kad cilindro ilgis yra l. Tada $F = 2\pi\rho l$. Tada šilumos kiekis cilindre lygus

$$Q = -2\pi\lambda l\rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}. \tag{3.16}$$

Remdamiesi prielaida turime, kad šilumos kiekis nusistovėję ir nesikaupia nė viename taške. Taigi, $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}\rho = 0$.

Diferencijuodami (3.16) lygybę ρ atžvilgiu gauname tokią dif. lygtį:

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho} = 0.$$

Gavome diferencialinę lygtį, kurioje nėra ieškomosios funkcijos. Skaitytojui siūlome šią lygtį suintegruoti. Bendrasis šios diferencialinės lygties sprendinys yra

$$\theta = c_1 \ln\rho + c_2.$$

Uždaviniai

Raskite duotųjų dif. lygčių bendruosius integralus.

1. $y'' = \sin x^2$, **2.** $x - \sin y'' + 2y'' = 0$

3. $y''^3 - 1 = 0$, **4.** $x = y''/\sqrt{1 + y''^2}$.

Raskite sprendinius tenkinančius pradines sąlygas. Padarykite brėžinius.

5. $y'' = 6x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0;$

6. $y''' = \mathrm{e}^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

Raskite bendruosius sprendinius

7. $xy''\ y'\ln\frac{y'}{x}$; **8**. $y'(1 + y'^2) = 2y''$.

Išspręskite Koši uždavinius

9. $y''^2 = y',\ y(0) = 0, y'(0) = 1;$

10. $y''^2 - 4xy'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = -1.;$

Suinterguokite

11. $yy'' = y'^3$, **12**. $2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0.$

13. Raskite dif. lygties

$$yy'' + y'^2 = 1$$

integralinę kreivę, kuriai priklauso taškas (0, 1) ir kuri šiame taške liečia tiesę $x + y = 1$.

14. Raskite dif. lygties

$$yy'y'' = y'^3 + y''^2$$

integralinę kreivę, kuri koorinačių pradžioje liestų tiesę $x + y = 0$.

Raskite dif. lygčių bendruosius sprendinius.

15. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$;

16. $x^2yy'' = (y - xy')^2 = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}$;

17. $xyy'' + yy' - x^2y'^3 = 0$;

18. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$;

19. Tarkime, kad materialus taškas juda tiese, veikiamas jėgos $F = 3m/x^3$, kai išpildytos pradinės sąlygos: $x(0) = 1, v(0) = 0$. Raskite judėjimo dėsnį.

20. Motorinė valtis plaukia $10km/h$. Plaukiant šiuo greičiu variklis buvo išjungtas ir po $20s$. valties greitis nukrito iki $6km/h$. Apskaičiuokite valties greitį po $2min.$, kai buvo išjungtas variklis ir atstumą, kurį valtis nuplaukė per minutę, išjungus variklį.

21. Raskite greitį, kurį meteoritas pasieks beatsitrenkdamas į žemę, jei laikysime, kad jis pradeda kristi iš neaprėžtai toli, būdamas ramybės būsenoje. Be to, judant žemės link jo pagreitis yra atvirkščiai proporcingas atstumo iki žemės kvadratui.