Gintautas Bareikis

DIFERENCIALINĖS LYGTYS

Paskaitų konspektas

Šis diferencialinių lygčių paskaitų ciklas yra skaitomas VU Fizikos fakulteto studentams. Paskaitose bei praktiniuose užsiėmimuose, kurie trunka vieną semestrą (2+2+1), studentai supažindinami su įvairių diferencialinių lygčių integravimo metodais. Konspekte pateikiami taikomojo pobūdžio pavyzdžiai, bei po kiekvieno skyriaus uždaviniai įgūdžiams tobulinti.

Vilniaus Universitetas, Matematikos fakultetas

2001.09.01

Turinys

V. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

VI. TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS, DALINĖMIS IŠVESTINĖMIS

VII. OPERACINIS SKAIČIAVIMAS IR DIF. LYGTYS

I. PIRMOS EILĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

1.1 Įžanginės pastabos

Simboliu $\mathcal{R}$ žymėsime realiųjų skaičių aibę. Realiųjų skaičių aibės intervalais (atviru, uždaru, pusiau uždaru, pusiau atviru), vadinsime tokias realiųjų skaičių aibes $(a,b) = \{x, a < x < b\}$, $[a,b] = \{x, a \leq x \leq b\}$, $[a,b) = \{x, a \leq x < b\}$, $(a,b] = \{x, a < x \leq b\}$, atitinkamai. Jei nagrinėjamo intervalo struktūra nebus svarbi, tai intervalą žymėsime simboliu $< a, b >$.

Apibrėžimas *Tarkime, kad $M-$ kokia nors aibė. Šią aibę vadinsime metrine erdve, jeigu egzistuoja realiųjų, neneigiamų reikšmių funkcija ρ , apibrėžta bet kokiai šios aibės elementų porai (x,y) ir tokia, kad*

$$\rho(x,y) = 0, \quad \text{tada ir tik tada, kai } \ x = y; \qquad 1)$$

$$\rho(x,y) = \rho(y,x); \qquad 2)$$

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \ \ (\forall x,y,z \in M). \qquad 3)$$

Funkcija $\rho(x,y)$ paprastai yra vadinama metrika, o pora $(M,\rho)-$ vadinama metrine erdve. Pavyzdžiui, erdvėje $\mathcal{R}^n$ metriką galime apibrėžti taip:

$$\rho_n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

čia $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}^n$.

Metrines erdves $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3$ vadinsime tiese, plokštuma ir erdve, atitinkamai.

Taško $x \in \mathcal{R}$ aplinka vadinsime bet kokį atvirą intervalą, kuriam priklauso taškas x. Aibę vadinsime atvira, jeigu bet koks šios aibės taškas, kartu su aplinka, priklauso šiai aibei. Metrinės erdvės $\mathcal{R}^n$ atviru (uždaru) rutuliu, kurio centras taške a, o spindulys r vadinsime aibę

$$B(a,r) = \{x \in \mathcal{R}^n; \rho(x,a) < 0\}, \ \ B(a,r) = \{x \in \mathcal{R}^n; \rho(x,a) \leq 0\}.$$

Pastebėsime, kad tiesėje, rutulys vadinamas atkarpa, plokštumoje skrituliu, trimatėje erdvėje- rutuliu. Erdvės $\mathcal{R}^n$ aibė yra susijusi, jeigu bet kuriuos šios aibės taškus galime sujungti kreive, kurios taškai priklauso šiai sričiai . Taigi, aukščiau apibrėžti intervalai yra susijusios aibės, tačiau intervalų sąjunga nebūtinai susijusi aibė (kodėl?). Plokštumos aibės siena vadinsime taškų aibę, kurios bet kokio taško aplinkoje yra šios aibės ir jos papildinio taškų. Sritimi, vadinsime atvirą, susijusią aibę. Srities sieną žymėsime ∂G. Jeigu plokštumos aibei priklauso visi jos sienos taškai, tai šią aibę vadinsime uždara sritimi. Jeigu G sritis, tai prie jos prijungę sienos taškų aibę ∂G gausime uždarą sritį, kurią žymėsime $\overline{G}$:

$$G \cup \partial G = \overline{G}.$$

Pastebėsime, kad atviras rutulys yra sritis, o uždaras rutulys yra uždara sritis.

Tarkime, kad G, bet kokia aibė. Tada tolydžių funkcijų, apibrėžtų šioje aibėje, aibę žymėsime simboliu $C(G)$. Kitaip tariant, simbolis $f \in C(G)$ reiškia tolydžią, aibėje G, funkciją. Jei srityje G funkcija turi tolydžią išvestinę, tai sakysime, kad funkcija yra tolydžiai diferencijuojama ir žymėsime $f \in C^1(G)$.

Apibrėžimas *Reiškinį:*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

vadinsime $n-$os eilės diferencialine lygtimi.

T.y. diferencialine lygtimi vadiname bet kokią lygybę, kuri sieja funkciją $y = f(x)$, bet kurios eilės jos išvestines ir laisvą kintamąjį. Beje, F yra $n+2$ kintamųjų funkcija. $n-os$ eilės diferencialinės lygties sprendiniu, intervale $< a, b >$, vadinsime funkciją $\varphi(x)$, apibrėžtą šiame intervale ir turinčią $n-$os eilės išvestines tame pat intervale $< a, b >$, kuriai galioja tapatybė:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in < a, b > .$$

Apskritai paėmus, sprendinys gali būti apibrėžtas skirtinguose intervaluose. Tačiau apie tai kiek vėliau, kai nagrinėsime konkrečias diferencialines lygtis.

Skaitytojas, klausęs matematinės analizės pagrindų kursą žino, kad norint išspręsti lygtį

$$y' = f(x) \tag{1.1}$$

mums reikia rasti funkciojos $f(x)$ pirmykštę funkciją. Kitaip tariant, reikia suintegruoti (1.1) lygybę. Yra žinoma, kad jei funkcija $f \in C(a, b)$, tai šiame intervale egzistuoja (1.1) lygties sprendinys, kuris skaičiuojamas taip:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(z) \mathrm{d}z + c, \quad x_0, x \in (a, b), c \in \mathcal{R}. \tag{1.2}$$

Ši lygybė vadinama bendruoju (1.1) lygties sprendiniu.

Taigi, (1.1) lygtis turi begalo daug sprendinių, kuriuos gauname parinkę konstantą. Šių sprendinių grafikai yra vadinami integralinėmis kreivėmis. Beje, reikalavimas, kad $f(x)$ būtų tolydi yra esminis. Pavyz džiui, tarkime, kad

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \ x < 0 \\ 0, \ x = 0, \\ x^2 + 1, \ x > 0. \end{cases}$$

Matome, kad ši funkcija neturi tikslios pirmykštės, realiųjų skaičių aibėje. Jei (1.2) lygybėje fiksuosime konstantą ($c = c_0$), tai tada iš bendrojo sprendinio išrinksime konkrečią funkciją, kurią vadinsime atskiruoju (1.1) dif. lygties sprendiniu.

Jei norime rasti (1.1) lygties kurį nors vieną sprendinį, tai šios lygties sprendiniui turime kelti papildomus reikalavimus, būtent reikalauti, kad ieškomosios funkcijos reikšmė, kokiame nors taške x_0, būtų lygi $f(x_0) = y_0$. (1.1) lygtį, su minėtu papildomu reikalavimu galime perrašyti taip:

$$\begin{cases} y' = f(x), \\ f(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

(1.3) sistema vadinama (1.1) dif. lygties Koši uždaviniu. Tada, šio uždavinio sprendinys atrodo taip:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t) \mathrm{d}t.$$

Šis sprendinys vadinamas (1.1) Koši uždavinio sprendiniu. Nesunku matyti, kad iš (1.2) lygybės gauname (1.3) uždavinio sprendinį, kai $c = y_0$.

1.2 Pirmos eilės dif. lygties sprendinys. Koši uždavinys. Geometrinė interpretacija

Mes nagrinėsime pirmos eilės diferencialinę lygtį:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.4}$$

Laikysime, kad funkcija $F(x, y, y')$ apibrėžta kokiame nors trimatės erdvės poaibyje $\Omega \subset \mathcal{R}^3$, kuri yra tolydi šioje srityje, kartu su savo išvestinėmis $F'_y, F'_{y'}$.

Apibrėžimas (1.4) *diferencialinės lygties sprendiniu, intervale* $< a, b >$, *vadinsime bet kokią realių reikšmių funkciją* $\varphi(x)$, *turinčią tolydžią išvestinę šiame intervale ir tenkinančią sąlygą:*

$$F(x, \varphi(x), (\varphi(x))') \equiv 0, \ \ (x \in (a, b), \ (x, \varphi(x), (\varphi(x))') \in \Omega).$$

Pirmos eilės diferencialinės lygties Koši uždavinys. Koši uždavinys formuluojamas taip: *Reikia rasti* (1.4) *lygties sprendinį* $\varphi(x)$ *išpildantį papildomą sąlygą*

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

čia (x_0, y_0) *laisvai pasirinktas plokštumos taškas.*

Žinoma, bendrai paėmus, sprendinys su tokiais reikalavimais gali ir neegzistuoti. Tuo atveju sakysime, kad Koši uždavinys sprendinio neturi. Jei Koši uždavinys turi sprendinį, tai reikia išsiaiškinti, ar jis vienintelis.

Visų pirma mes aptarsime atskirą (1.4) lygties atvejį, t.y.

$$y' = f(x, y), \ \ (x, y) \in G \subset \mathcal{R}^2.$$

Apibrėžimas *Tarkime, kad funkcija* $f(x, y)$ *yra apibrėžta ir tolydi plokštumos srityje* G. *Diferencialinės lygties*

$$y' = f(x, y) \tag{1.5}$$

sprendiniu, intervale $< a, b >$, *vadinsime funkciją* $y = \varphi(x)$, *apibrėžtą intervale* $< a, b >$, *turinčią kiekviename šio intervalo taške išvestinę ir išpildančią sąlygą:*

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \ \ x \in < a, b > . \tag{1.6}$$

Jei intervalo galai priklauso aibei $< a, b >$, tai šiuose taškuose nagrinėjamos vienpusės išvestinės. Pastarąjį apibrėžimą perrašykime naudodami jau mums žinomus simbolius.

Apibrėžimas *Sakykime, kad funkcija* $f(x, y) \in C(G)$. *Funkciją* $\varphi \in C^1(< a, b >)$ *vadinsime* (2.2) *lygties sprendiniu intervale* $< a, b >$, *jeigu*

1) $$(x, \varphi(x)) \in G, \ \text{kai } x \in < a, b >;$$

2) $$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \ x \in < a, b > .$$

Aptarsime (1.5) lygties Koši uždavinio problemą.

Kaip jau esame minėję, tam kad iš integralinių kreivių šeimos galėtume išskirti vienintelę kreivę, mums reikia papildomų sąlygų. Natūralu reikalauti, kad integralinei kreivei priklausytų koks nors iš anksto pasirinktas srities G taškas, tarkime (x_0, y_0). Suformuluokime Koši uždavinį (1.5) diferencialinei lygčiai. *Rasti* (1.5) *diferencialinės lygties sprendinį, kuris tenkina sąlygą:*

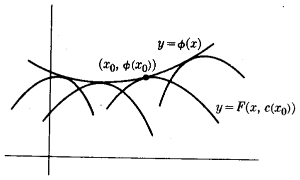
$$y(x_0) = y_0. \tag{1.7}$$

(1.7) sąlygos yra vadinamos *pradinėmis arba Koši sąlygomis.* Be to Koši uždavinio sprendinys yra vadinamas (1.5) diferencialinės lygties *atskiru sprendiniu* tenkinančiu pradines sąlygas.

Kiek vėliau įsitikinsime, kad funkcijos $f(x, y)$ tolydumas, srityje G, užtikrina (1.5) lygties sprendinio egzistavimą. Deja, Koši uždavinio vienetinumo tai dar negarantuoja.

Sprendinį, kurio kiekviename taške pažeidžiama Koši uždavinio vienetinumo sąlyga, vadinsime *ypatingu* sprendiniu.

Apibrėžimas Sakysime, kad kreivių $y = \varphi(x, c)$ arba $\Phi(x, y, c) = 0$ šeima turi *gaubiamąją* $y = \phi(x)$, jei bet kurį kreivės $y = \phi(x)$ tašką liečia viena šeimos kreivė. 1.1 pav.



1.1 pav.

Iš gaubiamosios apibrėžimo išplaukia, kad ši kreivė yra ypatingas dif. lygties sprendinys.

Teorema 1.1 *Kreivių šeima* $y = F(x,c)$ *turi gaubiamąją* $y = \phi(x)$ *tada ir tik tada, kai egzistuoja funkcija* $c = c(x)$, *kad* $F'_c(x, c(x)) \equiv 0$, *ir* $\phi(x) = F(x, c(x))$.

Pastarosios teoremos neįrodysime, tik pastebėsime, kad iš šios teoremos išplaukia, jog kreivių šeimos gaubiamoji yra randama sprendžiant sistemą

$$y = F(x,c), \;\; 0 = \frac{\partial F}{\partial c}.$$

Pavyzdžiui, tarkime duota kreivių šeima $(x-c)^2 + y^2 = 1$. Tada skaičiuodami šios funkcijos išvestinę c atžvilgiu gauname $2(x-c) = 0$. Iš pastarosios eliminavę $c = c(x)$ ir įrašę į pradinę lygtį gauname kreivių šeimos gaubiamosios lygtį: $y^2 = 1$.

Tarkime, kad duota funkcijų šeima: $y = F(x,c)$. Laikysime, kad funkcija $F(,)$ yra tolydžiai diferencijuojama abiejų kintamųjų atžvilgiu. Tada $y' = F'_x(x,c)$. Iš pastarųjų dviejų lygčių eliminavę konstantą c ir pastarąją įrašę į pradinės šeimos lygtį gauname diferencialinę lygtį $G(x, y, y') = 0$. Žinoma, kad visos pradinės šeimos funkcijos yra šios dif. lygties sprendiniai ir atvirkščiai. Nurodėme būdą, kaip turint funkcijų šeimą rasti ją atitinkančią dif. lygtį.

Raskime kreivių šeimos $y = ce^x$ dif. lygtį. Suskaičiavę išvestinę gauname, kad $y' = ce^x$. Tada $c = y'e^{-x}$. Įrašę šią c reikšmę į pradinę lygtį gauname tokią dif. lygtį: $y' - y = 0$.

Apibrėžimas *Funkciją*

$$y = \varphi(x,c),$$

priklausančią nuo laisvojo kintamojo x *ir konstantos* c, *vadinsime bendruoju* (1.5) *lygties sprendiniu, jeigu laisvai parinkę konstantą* $c_0 \in \mathcal{R}$ *gausime, kad funkcija* $y = \varphi(x, c_0)$ *yra* (1.5) *lygties sprendinys.*

Kitaip tariant, bendrąjame sprendinyje fiksavę konstantą gauname lygties atskirą sprendinį.

Apibrėžimas (1.5) *lygties bendruoju integralu vadinsime reiškinį*

$$\Phi(x, y, c) = 0, \tag{1.8}$$

iš kurio (1.5) *lygties atskirieji sprendiniai gaunami parinkus konstantą c.*

Kitaip tariant visi diferencialinės lygties sprendiniai kartu yra ir (1.8) lygties sprendiniai.

Jei (1.8) lygtį galima išreikšti konstantos atžvilgiu, t.y. $\Psi(x,y) = c$, tai šią specialią išraišką vadiname *kanoniniu bendruoju integralu.*

Taigi, jei į kanoninį integralą įrašysime diferencialinės lygties spren- dinį $y = \varphi(x)$, gausime tapatybę

$$\Psi\big(x, \varphi(x)\big) \equiv c.$$

Tarkime, kad duota (1.4) diferencialinė lygtis. Be to reikalaujame, kad funkcija $F(x,y,z)$ ir jos dalinės išvestinės F'_x, F'_y yra tolydžios kokioje tai trimatės erdvės dalyje Ω. Be to tarkime, kad $\Phi(x,y,c) = 0$ yra bendrasis (1.4) lygties integralas, čia funkcija Φ turi tolydžias dalines išvestines srityje Ω. Tegu $y = y(x)$. Diferencijuodami (1.4) lygties (1.8) bendrąjį integralą x atžvilgiu gauname lygtį

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0.$$

Eliminavę c bendrojo integralo išraiškoje, kartu su paskutiniąja lygtimi galime sudaryti diferencialinę lygtį, ekvivalenčią (1.4) dif. lygčiai. Kitaip tariant, mes nurodėme būdą, kaip turint funkcijų šeimą (priklausančią nuo parametro) galime gauti šią šeimą atitinkančią diferencialinę lygtį, t.y. pradinė šeima yra diferencialinės lygties bendrasis integralas.

Pateiksime pavyzdį. Tarkime, kad duota funkcijų šeima

$$y = (x - c)^3, \ \ x \in \mathcal{R}.$$

Diferencijuokime šią šeimą, x atžvilgiu, ir gautąją lygybę pakėlę kūbu, gausime tokį reiškinį,

$$(y')^3 = 27(x - c)^6.$$

Naudodamiesi paskutiniąja, bei pradine lygybėmis gauname tokią diferencialinę lygtį

$$(y')^3 - 27y^2 = 0.$$

Įrodysime tokią

2.1 **Teorema** *Tarkime, kad duota diferencialinė lygtis*

$$F(x, y, y') = 0, \ \ (x, y, y') \in \Omega. \tag{1.4$'$}$$

Be to reikalaujame, kad funkcija $F(x, y, z)$ ir jos dalinės išvestinės $F'_x, \ F'_y$ yra tolydžios kokioje nors trimatės erdvės dalyje Ω. Be to tarkime, kad

a) $\Phi(x, y) = c$ *yra bendrasis šios lygties integralas, čia funkcija $\Phi(x, y)$ yra tolydžiai diferencijuojama plokštumos srityje G.*

Jeigu funkcija $y = y(x), \ \ (x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, yra tolydžiai diferencijuojamas, intervale (a, b), lygties $\Phi(x, y) = c$ sprendinys, kokiam nors c, tai funkcija $y(x)$ yra ir lygties $(1.4)'$ sprendinys ir atvirkščiai, bet koks lygties $(1.4)'$ sprendinys yra ir bendrojo integralo $a)$ sprendinys, kokiai nors konstantai c.

$\ominus$

Tarkime, kad $y = y(x), \ x \in (a, b)$ yra tolydžiai diferencijuojamas $a)$ bendrojo integralo sprendinys, kai $c = c_0$:

$$\Phi(x, y(x)) = c_0.$$

Diferencijuodami paskutiniąją lygybę, x atžvilgiu, gauname

$$\Phi'_x(x, y(x)) + \Phi'_y(x, y(x))y'(x) = 0, \ x \in (a, b). \tag{1.9}$$

Remdamiesi paskutiniąja lygybe gauname, kad $y(x)$ yra diferencialinės lygties

$$\Phi'_x(x, y) + \Phi'_y(x, y)y' = 0, \tag{1.10}$$

sprendinys. Bet tuo pačiu, $y(x)$ yra ir lygties $(1.4)'$ sprendinys, kuri srityje Ω yra ekvivalenti (1.10) lygčiai (remiantis bendrojo integralo apibrėžimu).

Atvirkščiai. Tarkime, kad $y(x), \ a < x < b$ yra diferencialinės lygties $(1.4)'$ sprendinys, o tuo pačiu ir (1.10) lygties sprendinys, kurią galime perrašyti taip:

$$\Phi'_x(x, y(x)) \equiv 0, \ x \in (a, b).$$

Integruodami paskutiniąją tapatybę intervale $(x_0, x) \subset (a, b)$, gauname

$$0 \equiv \int_{x_0}^{x} \Phi_x(x, y(x))\mathrm{d}x = \Phi(x, y(x)) - \Phi(x_0, y(x_0)) = \Phi(x, y(x)) - c_0,$$

t.y. funkcija $y(x)$ intervale (a, b) tenkina sąlygą: $\Phi(x, y) = c_0$.

$\oplus$

Grįžkime, prie jau nagrinėtos, diferencialinės lygties

$$F(x,y,y')=0,\ \ F(x,y,y')=(y')^3-27y^2. \tag{1.4''}$$

Funkcija F yra tolydžiai diferencijuojama visoje erdvėje $\mathcal{R}^3$. Mes jau žinome, kad

$$y=(x-C)^3,\ \ x\in\mathcal{R} \tag*{b)}$$

yra $(1.4)''$ diferencialinės lygties bendrasis integralas. Išsprendę b) bendrąjį integralą c atžvilgiu gauname

$$\Phi(x,y)=c,\ \ \Phi(x,y)=x-y^{1/3}.$$

Matome, kad paskutinioji funkcija nediferencijuojama tiesėje $y=0$, todėl šioje plokštumos srityje 2.1 Teoremos sąlygos nėra išpildytos. Todėl negalima garantuoti, kad bet kokį diferencialinės lygties $(1.4)''$ sprendinį galime rasti iš bendrojo integralo, parinkus konstantą c.

Taigi, $(1.4)''$ diferencialinė lygtis turi bendrą integralą, apibrėžtą visoje plokštumoje, tačiau bendrasis integralas neapima visų diferencialinės lygties sprendinių, kaip berinktume konstantas c. Bet jei $(1.4)''$ diferencialinės lygties apibrėžimo sritį susiaurintume, t.y. pareikalautume, kad $x\in\mathcal{R},\ \ y>0$, tai tada bendrasis integralas $b)$ šioje srityje tolydžiai diferencijuojamas. Taigi, šiuo atveju $b)$ bendrasis integralas apima visus diferencialinės lygties sprendinius susiaurintoje apibrėžimo srityje.

Pastebėsime, kad (1.5) dif. lygtis apibrėžia ryšį tarp taško $M(x,y)$ koordinačių ir šios lygties integralinės kreivės krypties koeficiento, šiame taške, t.y.

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y).$$

Tarkime, kad funkcija $f(x,y)$ yra apibrėžta kokioje nors plokštumos srityje G. Tada taške $M\in G$ egzistuoja kryptis, kurios krypties koeficientas taip pat lygus $f(x,y)$. Taške M nubrėžę vektorių, su minėtąja kryptimi (šio vektoriaus koordinatės yra $(1,f(x,y)))$ mes gauname taške M kryptį, kurią apibrėžia (1.5) diferencialinė lygtis. Kadangi $M\in G$ yra bet koks laisvai pasirinktas plokštumos srities taškas, tai šios srities kiekviename taške, (1.5) lygtis apibrėžia konkrečią kryptį. Šių krypčių visuma, apibrėžta (1.5) lygties, vadinama *krypčių lauku*. Tada, integralinių kreivių liestinių ir krypčių lauko vektorių kryptys, integralinių kreivių taškuose, sutampa.

Aptarkime, kaip galima nubrėžti integralines kreives, žinant krypčių lauką. Tarkime, kad duota diferencialinė lygtis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x},\ \ G=\{(x,y);x>0,\ y>0\}. \tag{1.11}$$

Nesunku suprasti, kad tiesėse $y=cx$, krypčių laukas pastovus, kadangi $y/x=c$ ir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c.$$

Tuo būdu, nurodytos tiesės taškuose, vektorius $\mathbf{s}=\{\mathbf{1},\mathbf{c}\}$ yra lygiagretus tiesei, todėl ir krypčių laukas išsidėstęs tiesės kryptimi, kaip parodyta 1.2 pav.. Aišku, kad vektorinio lauko kreivės sutampa su pradinėmis tiesėmis, t.y. $y=cx$. Tada santykis $y/x=c,\ \ 0<c<\infty$ yra (1.11) lygties kanoninis integralas.

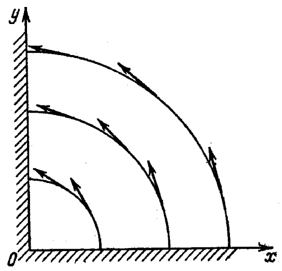
Panagrinėkime tokią diferencialinę lygtį:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y},\ G=\{(x,y);x>0,y>0\}. \tag{1.12}$$

Diferencialinių lygčių (1.11) ir (1.12) vektorinių laukų kryptys yra ortogonalios (kodėl?). Beje, nesunkiai gauname, kad integralinės (1.12) lygties bendrasis sprendinys yra toks:

$$y=\sqrt{C-x^2},\ 0<c<\infty. \tag{1.13}$$

Paskutiniosios funkcijos apibrėžimo sritis priklauso nuo konstantos c (kodėl?).

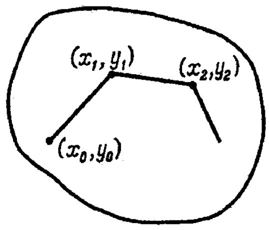


1.2 pav.

Krypčių lauko ir vektorinių kreivių (linijų) lauko sąvokos nurodo būdą, kaip apytiksliai būtų galima rasti dif. lygties Koši uždavinio sprendinį:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y); \ \ y(x_0) = y_0.$$

Iš taško $(x_0, y_0) \in G$ brėžiame tiesę, kurios krypties koeficientas $f(x_0, y_0)$. Parenkame šioje tiesėje ("netoli") kitą tašką $(x_1, y_1) \in G, \ x_1 > x_0$. Iš šio taško brėžiame tiesę, kurios krypties koeficientas $f(x_1, y_1)$ ir šioje tiesėje parenkame tašką $(x_2, y_2), \ x_2 > x_1$. Pratęsę šį procesą gauname laužtę (1.3 pav.). Natūralu tikėtis, kad jei laužtės "žingsnis" pakankamai smulkus, tai ši laužtė pakankamai arti integralinės kreivės, kuriai priklauso taškas (x_0, y_0). Taigi, šią laužtę galime laikyti apytiksliu Koši uždavinio sprendiniu. Šis metodas vadinamas *Oilerio laužčių metodu.*



1.3 pav.

Aptarsime kitą, geometrinį, integralinių kreivių paieškos metodą, kuris vadinamas *izoklinų metodu.*

Apibrėžimas (1.8) *dif. lygties krypčių lauko izoklina vadinsime kreivę, kurios taškuose krypčių laukas yra pastovus.*

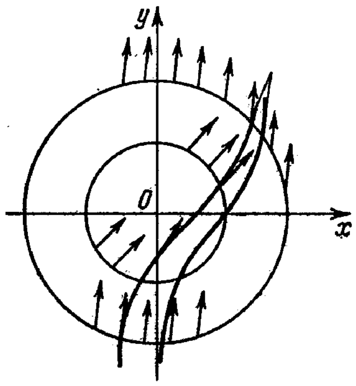
Izoklinos taškuose teisinga lygybė:

$$f(x, y) = c.$$

Kai izoklinos žinomos, tai mes lengvai galime nubrėžti krypčių lauką, o kai žinomas krypčių laukas, pagal jį galime rekonstruoti integralines kreives. Pateiksime pavyzdžių. Tarkime, kad duota diferencialinė lygtis

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2, \ \ G = \big\{(x, y); \ x, y \in \mathcal{R}\big\}.$$

Tada apskritimai $x^2 + y^2 = R^2$ yra šios dif. lygties izoklinos. Matome, kad kuo didesnis R, tuo krypčių lauko vektoriaus krypties kampas didesnis. 1.4 pav. pateikiama iterpretacija, kaip rekonstruojamas integralinės kreivės, naudojant izoklinas.



1.4 pav.

Jeigu taške (x_0, y_0), funkcija $f(x_0, y_0) = \infty$, tai krypčių laukas šiame taške yra lygiagretus Oy ašiai. Šiuo atveju sprendžiame apverstą dif. lygtį, t.y.

$$\frac{1}{f(x,y)} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}.$$

Jeigu taške (x_0, y_0) funkcija $f(x, y)$ turi neapibrėžtumą $0/0$, tai sakysime, kad šiame taške krypčių laukas neapibrėžtas, o tašką (x_0, y_0) vadinsime *ypatingu dif. lygties tašku.*

Jeigu egzistuoja integralinė kreivė $y = y(x)$ turinti savybę: $y(x) \to y_0$, kai $x \to x_0$, tai sakysime, kad kreivė *šliejasi* prie šio ypatingo taško. Šiuo atveju dif. lygtis ypatingame taške neapibrėžia kampo, kuriuo kreivė šiejasi prie šio taško. Panagrinėkime kiek plačiau šią problemą, kitaip tariant panagrinėkime integralinių kreivių elgesį ypatingų taškų aplinkoje.

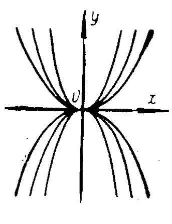
1. Tarkime, kad duota diferencialinė lygtis

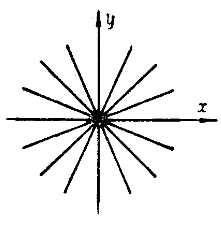
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x}. \tag{1.14}$$

Ištirsime integralinių kreivių elgesį, ypatingo taško (0, 0) aplinkoje. Integruodami (1.14) diferencialinę lygtį gauname:

$$y = cx^2 \ \ (x \neq 0).$$

Be to, šios lygties sprendiniais bus ir spinduliai Ox bei Oy. Šios diferencialinės lygties integralinių kreivių išsidėstymas demonstruojamas 1.5 pav. kairėje pusėje. Matome, kad šio ypatingo taško aplinka užpildyta nesikertančiomis integralinėmis kreivėmis, kurios šliejasi prie šio ypatingo taško, skirtingomis kryptimis, o visų ribinė kryptis yra ta pati, beje šiuo atveju ribinė liestinė yra koordinatinė ašis Ox. Toks ypatingas taškas yra vadinamas *mazgu.*





1.5 pav.

2. Panagrinėkime labai panašią lygtį

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}, \tag{1.15}$$

kurios ypatingas taškas sutampa su (1.14) lygties ypatingu tašku. Šios lygties bendrasis sprendinys yra toks:

$$y = cx \ \ (x \neq 0), x = 0(y \neq 0).$$

Integralinių kreivių išsidėstymas, ypatingo taško (0, 0) aplinkoje, nurodytas 1.5 pav. dešinėje. Toks ypatingas taškas yra vadinamas *diskriminantiniu mazgu.* Diskriminantinio mazgo esmė- visos integralinės kreivės šliejasi prie šio taško, ir visos integralinės kreivės šio taško aplinkoje turi skirtingas kryptis.

3. Išspręskime lygtį

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y + x}{x}. \tag{1.16}$$

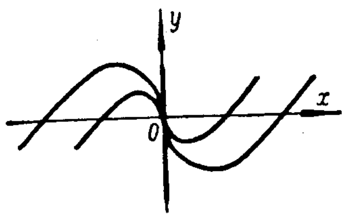
Šios lygties ypatingas taškas (0, 0). Matome, kad tai homogeninė diferencialinė lygtis. Pažymėję $y = zx$ gauname, kad $y' = xz' + z$. Įrašę pastarąsias lygybes į (1.16) lygtį turime

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1.$$

Integruodami pastarąją lygtį gauname, kad $z = \ln|x| + c$. Nesunkiai randame (1.16) lygties bendrąjį sprendinį

$$y = x(\ln|x| + c).$$

Matome, kad visos integralinės kreivės šliejasi prie taško (0, 0), bet (skirtingai negu mazgo (1.15) lygtis) visos šios integralinės kreivės turi apibrėžta liestinę ypatingame taške, mūsų atveju, liestinė yra Oy ašis (žr. 1.6 pav.). Toks taškas vadinamas *išsigimusiu mazgu.*



1.6 pav.

4. Lygties

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}, \tag{1.17}$$

kurios ypatingas taškas yra (0, 0), bendrasis sprendinys yra toks:

$$y = \frac{c}{x} \ \ (x \neq 0), x = 0(y \neq 0).$$

Šiuo atveju hiperbolės yra (1.17) lygties integralinės kreivės. Prie taško (0, 0) šliejasi tik baigtinis kreivių skaičius (žr. 1.7 pav. kairėje). Toks ypatingas taškas vadinamas *balno tašku.*

5. Nagrinėsime tokią lygtį

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y + x}{x - y}. \tag{1.18}$$

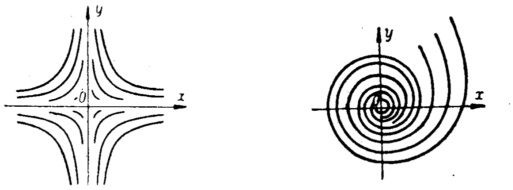
Matome, kad tai homogeninė diferencialinė lygtis (žr. 1.6 skyrelį). Keisdami ieškomąją funkciją $y = zx$, gauname (detaliai suskaičiuoti siūlome skaitytojui) tokį (1.18) lygties bendrąjį integralą:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c\mathrm{e}^{\mathrm{arctg(y/x)}}.$$

Naudodami polines koordinates $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ paskutiniąją lygybę perrašome

$$r = ce^{\theta}.$$

Pastaroji lygybė reiškia logaritminių spiralių šeimą (1.7 pav. dešinėje). Šios spiralės šliejasi prie ypatingo taško (0, 0) sukdamasi apie jį, t.y. visų kreivių lauko kryptis šiame taške neapibrėžta. Toks ypatingas taškas vadinamas *židiniu.*



1.7 pav.

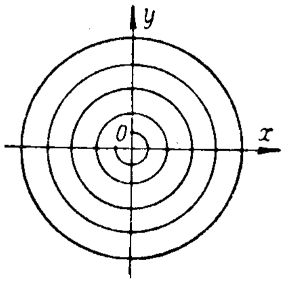
6. Lygties

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}, \tag{1.19}$$

ypatingas taškas yra (0, 0), o bendrasis integralas

$$x^2 + y^2 = c.$$

Ypatingo taško aplinkoje šios kreivės išsidėstę koncentriškais apskritimais ir nė vienas apskritimas neprisišlieja prie šio taško, o šio taško aplinkoje yra begalo daug apskritimų, kurių spinduliai kiek norimai maži. Toks ypatingas taškas vadinamas *centru* (žr. 1.8 pav.).



1.8 pav.

1.3 Diferencialinės lygtys išreikštos diferencialais

1. Diferencialinė lygtis

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1.20}$$

čia $M(x,y), N(x,y) \in C(G)$, $G \subset \mathcal{R}^2$ vadinama diferencialine lygtimi išreikšta diferencialais.

(1.20) lygtį galime perrašyti tokiu būdu:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{1.21}$$

$$M(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + N(x,y) = 0. \tag{1.22}$$

(1.21) lygties atveju ieškosime sprendinio $y = y(x)$, o (1.22) lygties atveju, ieškosime sprendinio $x = x(y)$. Detaliau panagrinėkime (1.21) dif. lygtį, kadangi (1.22) lygties atveju samprotavimai visiškai analogiški.

Tarkime, kad funkcija $N(x,y) \neq 0$, bet kokiai porai $(x,y) \in G$. Kadangi funkcija yra tolydi, tai srityje G funkcija $N(x,y)$ arba teigiama arba neigiama. Tada, (1.21) dif. lygtį perrašome tokiu būdu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \ (x,y) \in G. \tag{1.20$'$}$$

Taigi, lygtys (1.21) ir (1.20)' yra ekvivalenčios.

Tuo atveju, kai egzistuoja srities G taškai, kuriuose funkcija $N(x,y) = 0$, tai tada lygtys (1.21) ir (1.20)' yra ekvivalenčios tik srityje $G \setminus G_0$, čia $G_0 = \{g \in G, N(g) = 0\}$.

Tarkime, kad $(x_0, y_0) \in G_0$. Jeigu $M(x_0, y_0) \neq 0$, tai lygtis (1.21) neturi sprendinių, kuriems priklausytų taškas (x_0, y_0). Tuo atveju, kai $N(x_0, y_0) = M(x_0, y_0) = 0$ tai šis taškas gali nepriklausyti nė vienam dif. lygties sprendiniui, gali priklausyti vienam arba daugiau dif. lygties sprendinių. Kai taškas priklauso ne vienam dif. lygties sprendiniui, tai šis taškas vadinamas *ypatingu, diferencialinės lygties, tašku.* Beje, šiame taške krypčių laukas yra neapibrėžtas.

Tarkime, kad funkcijos $N(x,y), M(x,y) \neq 0, \ \ (x,y) \in G$. Tuomet (1.20)' lygties dešinioji pusė turi pastovų ženklą, srityje G. Tad šiuo atveju diferencialinės lygties sprendinys $y = \varphi(x)$ yra griežtai monotoninė funkcija, apibrėžimo srityje, tarkime intervale (a,b). Vadinasi egzistuoja šiam sprendiniui atvirkštinė, tolydžiai diferencijuojama, funkcija $x = \varphi^{-1}(y)$, intervale (c,d). Be to

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{-\frac{M}{N}} = -\frac{N}{M}.$$

Bet paskutinioji lygybė reiškia, kad atvirkštinė funkcija yra dif. lygties (1.22) sprendinys. Taigi, srityje, kur abi funkcijos $M(x,y)$ ir $N(x,y)$ yra nelygios nuliui, bet koks (1.21) sprendinys turi atvirkštinę funkciją, kur pastaroji taip pat (1.20) lygties sprendinys. Taigi, šios lygtys yra ekvivalenčios.

1.4 **Diferencialinių lygčių integravimas. Lygtys su atskirtais kintamaisias**

Apibrėžimas (1.20) *lygtis bus vadinama diferencialine lygtimi su atskirtais kintamaisiais, jeigu*

$$M(x,y) = \varphi(x), \ \ x \in (a,b) \ \ (M(x,y) = \xi(y), \ \ y \in (c,d)),$$

$$N(x,y) = \xi(y), \ \ y \in (c,d) \ \ (N(x,y) = \varphi(x), \ \ x \in (a,b)).$$

Laikome, kad $\varphi(x)$ ir $\xi(y)$ yra tolydžios funkcijos. Pažymėkime stačiakampę plokštumos sritį tokiu būdu:

$$\Delta = \begin{cases} a < x < b, \\ c < y < d. \end{cases}$$

Tarkime, kad $y = y(x)$ yra dif. lygties

$$\varphi(x)\mathrm{d}x + \xi(y)\mathrm{d}y = 0, \tag{1.23}$$

sprendinys, apibrėžtas intervale $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$. Tada yra teisinga lygybė:

$$\varphi(x)\mathrm{d}x = -\xi[y(x)]\mathrm{d}y(x), \ x \in (\alpha, \beta).$$

Integruodami paskutiniąją lygybę gauname

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = -\int \xi[y(x)]\mathrm{d}y(x) + c = -\int \xi(y)\mathrm{d}y + c_1.$$

Pažymėję funkcijų $\varphi(x)$ ir $\xi(y)$ pirmykštes $\Phi(x)$ ir $\Psi(y)$, atitinkamai, gauname, kad bet koks diferencialinės lygties sprendinys, apibrėžtas stačiakampyje Δ, yra lygties

$$F(x,y) := \Phi + \Psi = c_1, \tag{1.24}$$

sprendinys. Funkcija $F(x,y)$ yra tolydi ir diferencijuojama stačiakampyje Δ, ir $F'_y = \xi(y),\ \ F'_x = \varphi(x)$.

Tarkime, kad $y = y(x)$. Diferencijuodami (1.24) lygybę x atžvilgiu gauname

$$\varphi(x) + \xi(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Bet ši lygtis sutampa su (1.23) lygtimi. Vadinasi (1.24) yra (1.23) lygties bendrasis integralas, lygties sprendiniui $y = y(x)$. Remdamiesi 2.1 Teorema gauname, kad visi (1.24) sprendiniai $y = y(x)$ yra lygties (1.23) sprendiniai ir atvirkščiai.

Iš paskutiniųjų samprotavimų išplaukia, kad (1.23) diferencialinės lygties sprendinių $y = y(x)$ ir $x = x(y)$ bendrasis integralas išreikštas (1.24) lygybe.

Pavyzdžiui, diferencialinės lygties

$$\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y,$$

bendrasis integralas yra toks skirtumas

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y = c.$$

Beje, paskutiniojo integralo negalime išreikšti elementariosiomis funkcijomis.

1.5 Diferencialinės lygtys su atskiriamais kintamaisiais.

Ateityje mes nagrinėsime dif. lygties, analizinius, sprendinio radimo būdus.

Sakysime, kad diferencialinė lygtis yra *integruojama* (kartais *išsprendžiama kvadratūromis*), jeigu jos sprendinys $\varphi(x)$ yra išreikštas elementariosiomis funkcijomis. (Kokias funkcijas vadiname elementariosiomis).

Sakysime, kad dif. lygties sprendinys *išreiškiamas kvadratūromis*, jeigu sprendinys išreiškiamas elementariomis funkcijomis. Šiuo atveju sakysime, kad diferencialinė lygtis *išsprendžiama kvadratūromis*.

Apibrėžimas *Diferencialinę lygtį*

$$y' = g(x)/h(y),\ (x,y) \in \Delta, \tag{1.25}$$

vadinsime lygtimi su atskiriamais kintamaisiais, čia g, h yra tolydžios apibrėžimo srityse funkcijos, be to $h(y) \neq 0$, kai $y \in (c,d)$.

Esant šioms prielaidoms, (1.25) lygtis turi sprendinį. Be to, Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį.

Panagrinėkime patį paprasčiausią šios lygties atvejį, t.y., kai $h(y) \equiv 1$.

Šiuo atveju mes turime tokią dif. lygtį

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x). \tag{1.25$'$}$$

Jeigu funkcija tolydi apibrėžimo srityje, tai bendrasis šios lygties sprendinys yra toks

$$y = \int f(x)\mathrm{d}x + c,\ c \in \mathcal{R},\ x \in (a,b),\ y \in \mathcal{R}. \tag{1.26}$$

Kitaip tariant, visa plokštuma užpildyta nesikertančiomis kreivėmis, kurios yra (1.25) diferencialinės lygties atskiri sprendiniai. Šių sprendinių algebrinės lygtys gaunamos parinkus konstantą $c_0 \in \mathcal{R}$.

Jei (1.25) dif. lygties bendruoju sprendiniu imsime funkciją

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x,\ x_0, x \in (a,b)$$

tai tada bendąjį sprendinį galime užrašyti taip

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x + c.$$

Matome, kad jei paimsime $x = x_0$, tai gausime $y = y_0$. Taigi, (1.25) sprendinį su pradinėmis salygomis x_0, y_0 galime užrašyti taip

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x + y_0.$$

Jei tarsime, kad y_0 yra bet koks realus skaičius, tai paskutinioji lygybė reiškia (1.25) *bendrąjį, Koši formos, sprendinį* nurodytoje apibrėžimo srityje. Beje, matome, kad Koši uždavinio sprendinys yra tolydi, tolydžiai diferencijuojama, kintamojo x atžvilgiu, funkcija.

Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi taško ξ aplinkoje, o taškas $\xi \in (a, b)$ yra trūkio taškas, kuriame funkcijos reikšmė lygi begalybei, tai tada (1.25)' bendrasis sprendinys apibrėžtas tokioje srityje:

$$a < x < \xi, |y| < \infty, \quad \xi < x < b, |y| < \infty.$$

Aišku, kad tiesė $x = \xi$ yra lygties $x'(y) = 1/f(x)$ sprendinys, todėl ji turėtų irgi būti prijungta prie (1.25)' diferencialinės lygties sprendinių šeimos. Beje, šis sprendinys gali būti *ypatingas,* t.y. arba integralinių kreivių šeimos gaubiamoji, arba asimptotė (tiesė, prie kurios artėja integralinės, kai $x \to \infty$).

Vertėtų pastebėti, kad jeigu funkcija $f(x)$ kokiame nors apibrėžimo srities taške lygi nuliui, tarkime $f(x_0) = 0$ ir be to ši funkcija įgyja skirtingų ženklų reikšme, kai $x < x_0, x > x_0$, tai taške x_0 kiekviena integralinė kreivė pasiekia ekstremumą. Ši tiesė bus vadinama integralinių kreivių minimumų arba maksimumų tiese. Dar daugiau, jeigu funkcija $f(x)$ yra diferencijuojama ir apibrėžimo srityje išlaiko pastovų ženklą, tai minėtoje sityje visos integralinės kreivės turi tą patį iškilumą. Jei $f''(x_0) = 0$ ir be to $f''(x)$ turi skirtingas ženklo reikšmes, kai $x < x_0$ ir $x_0 > x$ tai tiesė $y = x_0$ yra visų integralinių kreivių perlinkio tiesė.

Panagrinėkime dar vieną (1.25) dif. lygties atvejį:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y). \tag{1.27}$$

Paskutiniąją lygtį galime perašyti taip:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(y)}. \tag{1.28}$$

Matome, kad paskutinioji lygtis sutampa su (1.26) diferencialine lygtimi. Taigi, šios lygties sprendinį galime užrašyti taip

$$x = \int \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y + c, \ c < y < d, x \in \mathcal{R},$$

o šios lygties Koši formos bendrąjį sprendinį galime užrašyti taip:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y + x_0,$$

čia x_0 yra laisvai parenkama konstanta, o y_0 fiksuotas skaičius.

Tarkime, kad funkcija $y = \varphi(x)$ yra (1.25) lygties sprendinys. Tada nagrinėjamą dif. lygtį galime perrašyti taip:

$$h(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = g(x)\mathrm{d}x.$$

Tegu $G(x)$ yra funkcijos $g(x)$ pirmykštė funkcija. Tada paskutiniąją lygybę galime perrašyti taip:

$$\mathrm{d}G(x) = h(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x). \tag{1.29}$$

Jeigu funkcija $H(y)$ yra funkcijos $h(y)$ pirmykštė funkcija, tai naudodamiesi diferencialo invariantiškumu gauname, kad

$$\mathrm{d}G(x) = \mathrm{d}H(\varphi(x))$$

arba

$$G(x) = H(\varphi(x)) + c. \tag{1.30}$$

Žinome, kad funkcija h nekeičia ženklo, o $H(y)$ yra monotoninė funkcija (kodėl?), tai $H(y)$ turi atvirkštinę H^{-1} apibrėžimo srityje. Tad iš (1.30) lygybės gauname, kad

$$\varphi(x) = H^{-1}\big(G(x) - c\big).$$

Nesunku patikrinti, kad fiksavus c, paskutinėje lygybėje, šios lygybės dešinioji pusė yra (1.29) lygties sprendinys. Tada funkcija

$$y = H^{-1}\big(G(x) - c\big) \tag{1.31}$$

yra (1.30) lygties bendrasis sprendinys. Šios lygties bendrasis integralas yra toks

$$G(x) - H(y) = c. \tag{1.32}$$

Koši uždavinio sprendinį, taške (x_0, y_0), gauname iš (1.31) formulės, t.y. $c_0 = G(x_0) - H(x_0)$. Imdami taškus $(x, y) \in \Delta$, mes gausime visas galimas konstantos c reikšmes iš lygybės (1.32). Įrašę šias konstantų reikšmes į (1.31) gauname dif. lygties (1.32) atskirus sprendinius.

Atskiri, diferencialinės lygties su atskiriamais kintamaisiais, atvejai.

1. Tarkime, kad integruojama lygtis yra tokia:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by).$$

Iš šios lygties galime gauti jau nagrinėtą atvejį, jeigu atliksime keitimą

$$z = ax + by, \quad z - \text{naujas kintamasis.}$$

Iš tiesų, $z' = a + by'$ ir $z' = a + bf(z)$. Taigi, gavome diferencialinę lygtį su atskiriamais kintamaisias.

1.6. Homogeninės diferencialinės lygtys.

Apibrėžimas *Funkciją $M(x, y)$ vadinsime m- ojo laipsnio homogenine funkcija, jeigu visiems $x, y, t > 0$ teisinga lygybė*

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y).$$

Jeigu funkcijos $M(x, y), N(x, y)$ yra m-ojo laipsnio homogeninės funkcijos, tai diferencialinė lygtis $M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$ vadinama $m-$ojo laipsnio homogenine diferencialine lygtimi.

Paskutiniąją diferencialinę lygtį perrašykime taip:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M\big(x, |x|\frac{y}{|x|}\big)}{N\big(x, |x|\frac{y}{|x|}\big)} =$$

$$-\frac{|x|^m M\big(\pm 1, \pm\frac{y}{x}\big)}{|x|^m N\big(\pm 1, \pm\frac{y}{x}\big)} = f(\frac{y}{x}),$$

t.y.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x}). \tag{1.33}$$

Pažymėję $y = xz$, čia $z = z(x)$ gauname, kad

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z.$$

Tada

$$x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = f(z)$$

arba

$$\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integruodami gauname

$$x=c\exp\Big(\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z}\Big),\ c\neq 0.$$

Nagrinėdami (1.33) lygtį pastebime, kad koordinačių pradžios taške krypčių laukas yra neapibrėžtas, taigi taškas (0, 0) yra ypatingas šios dif. lygties taškas. Beje, šios lygties izoklinas apibrėžia tiesės $y = kx(x\neq 0)$. Visos integralinės kreivės, kerta šią tiesę tuo pačiu kampu.

Homogeninės dif. lygties ypatingais sprendiniais gali būti tiesės Oy spinduliai be pradžios taško $(0,0)$ ir spinduliai $y=z_ix,\ x\neq 0$.

Panagrinėkime lygtį

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\Big(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\Big). \tag{1.34}$$

Parodysime, kad pertvarkius (1.34) lygtį, galime gauti homogeninę dif. lygtį.

Visų pirma tarkime, kad

$$\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Atlikę keitimą

$$x=\phi+e,\ \ y=\eta+f,$$

čia ϕ,η kintamieji, e,f yra konstantos, randamos iš sistemos

$$\begin{cases} a_1e+b_1f+c_1=0,\\ ae+bf+c=0.\end{cases}$$

Atlikę šį keitinį gauname, tokią dif. lygtį

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}=f\Big(\frac{a_1\phi+b_1\eta}{a\phi+b\eta}\Big).$$

Matome, kad ši lygtis yra pirmojo laipsnio homogeninė dif. lygtis.

Panagrinėsime atvejį, kai

$$\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}=0.$$

Šiuo atveju turime, kad

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\Big(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\Big)\equiv f_1(ax+by).$$

Bet šį atvejį taip pat esame nagrinėję.

Apibendrintos homogeninės lygtys

Apibrėžimas *Diferencialinę lygtį*

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.35}$$

vadinsime apibendrinta, $m-$ojo laipsnio homogenine lygtimi, jeigu egzistuoja racionalus skaičius k toks, kad (1.35) *lygties kairioji pusė tampa $x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ atžvilgiu m-ojo laipsnio homogenine lygtimi, kada x laikomas 1-ojo matavimo dydžiu, $y-$ k-ojo matavimo dydžiu, $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ yra laikomi $0-$inio ir $k-1-$ojo matavimo dydiais, atitinkamai.*

Tada keitiniu $y=zx^{-m}$, nagrinėjamoji lygtis pertvarkoma į lygtį su atskiriamais kintamaisiais.

Paaiškinimui pateiksime tokį pavyzdį. Tarkime duota diferencialinė lygtis

$$\Big(\frac{2}{x^2} - y^2\Big)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0.$$

Raskime tokį k, kuriam būtų teisingas sąryšis

$$-2 = 2k = k - 1.$$

Bet toks k iš tiesų egzistuoja ir yra lygus -1. Taigi, šiuo atveju $k = -1$, o homogeniškumo koeficientas yra $m = -2$. Apibendrintą homogeninę lygtį galime pertvarkyti į lygtį su atskiriamais kintamaisias, jeigu atliksime keitimą:

$$y = zx^{-2},$$

čia z yra nauja funkcija.

1.7 Tiesinės diferencialinės lygtys

Apibrėžimas *Lygtį*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = f(x); \quad (a < x < b), \quad p, f \in C(a, b) \tag{1.37}$$

vadinsime tiesine, pirmos eilės diferencialine lygtimi. Jei $f(x) \equiv 0$, *tai lygtis*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) = 0$$

yra vadinama tiesine, homogenine, pirmos eilės diferencialine lygtimi, o kitu atveju- nehomogenine.

Homogeninė lygtis visada turi sprendinį $y(x) \equiv 0$. Kadangi ši lygtis yra su atskiriamais kintamaisiais, tai be jokių ypatingų pastangų galime suintegruoti, būtent

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x \ (y \neq 0),$$

o iš čia gauname,

$$\ln|\frac{y}{c}| = -\int p(x)\mathrm{d}x \ (c \neq 0)$$

arba

$$y = c\exp\big(-\int p(x)\mathrm{d}x\big). \tag{1.38}$$

Pastebėsime, kad iš (1.38) bendrojo sprendinio išraiškos, kai $c = 0$, gauname ir sprendinį $y \equiv 0$. Beje, iš (1.38) sprendinio išraiškos išplaukia, kad sprendinio grafikas yra virš ašies Ox, jei $c > 0$ ir žemiau Ox ašies, jei $c < 0$. Pastebėsime, kad integralas $\int p(x)\mathrm{d}x$ yra funkcijos $p(x)$, apibrėžtos intervale (a, b), pirmykštė funkcija, taigi ir tiesinės, homogeninės lygties sprendinys taip pat apibrėžtas intervale (a, b).

Rasime tiesinės nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį.

Tarkime, kad $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Tada $y' = uv' + u'v$. Įrašę šiuos reiškinius į (1.37) lygtį gauname lygybę

$$(v' + p(x)v)u + u'v = f(x).$$

Parinkime funkciją v taip, kad $v' + p(x)v = 0$. Pastaroji lygybė yra tiesinė homogeninė dif. lygtis. Remdamiesi (1.38) lygybe gauname, kad

$$v = \exp\big(-\int p(x)\mathrm{d}x\big). \tag{1.39}$$

Antra vertus, jei funkcija v išreiškiama (1.39) lygybe, tai tada $u'v = f(x)$. Matome, kad tuomet

$$\mathrm{d}u = \frac{f(x)}{v(x)}\mathrm{d}x,$$

arba

$$u = \int \frac{f(x)}{v(x)} \mathrm{d}x + c = \int f(x) \exp\big(\int p(x)\mathrm{d}x\big)\mathrm{d}x + c.$$

Taigi, (1.37) nehomogeninės lygties sprendinį galime užrašyti taip:

$$y = uv = \exp\big(-\int p(x)\mathrm{d}x\big)\big(c + \int f(x)\exp\big(\int p(x)\mathrm{d}x\big)\big)\mathrm{d}x. \tag{1.40}$$

Bendrąją sprendinio formą galime perrašyti ir taip:

$$y = \exp\big(-\int_{x_0}^{x} p(x)\mathrm{d}x\big)\big(c + \int_{x_0}^{x} f(x)\exp\big(\int_{x_0}^{u} p(x)\mathrm{d}\big)\big)\mathrm{d}x, \tag{1.41}$$

kai $x_0, x \in (a, b)$.

Jeigu spręsime Koši uždavinį, t.y. ieškosime sprendinio, išpildančio pradines sąlygas $x = x_0, y = y_0$, tai bendroji sprendinio išraiška yra tokia:

$$y = \exp\big(-\int p(x)\mathrm{d}x\big)\big(y_0 + \int f(x)\exp\big(\int p(x)\mathrm{d}x\big)\big)\mathrm{d}x. \tag{1.42}$$

Iš (1.40) formulės išplaukia, kad bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys yra lygus atitinkamos tiesinės homogeninės dif. lygties bendrojo ir atskirojo nehomogeninės lygties sprendinių sumai.

Apibrėžimas *Lygtį*

$$y' + p(x)y = y^{\alpha} f(x)$$

vadinsime Bernulio diferencialine lygtimi, $\alpha \in \mathcal{R}$*, o* $p, f \in C(a, b)$.

Pastebėsime, kad jei $\alpha = 0, 1$, tai dif. lygtis yra tiesinė. Kitais atvejais, atlikę keitimą

$$z = y^{1-\alpha},$$

Bernulio lygtį pertvarkome į tiesinę lygtį, funkcijos z atžvilgiu. Be to, jei $\alpha > 0$, tai Bernulio dif. lygtis turi sprendinį $y = 0$. Šis sprendinys bus atskiras, jeigu $\alpha > 1$ ir ypatingas, jeigu $0 < \alpha < 1$.

Apibrėžimas *Lygtį*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad P, Q, R \in C(a, b), \tag{1.43}$$

vadinsime Rikačio lygtimi.

Koks bebūtų srities $a < x < b$, $|y| < +\infty$ taškas (x_0, y_0), egzistuoja vienintelė (1.43) dif. lygties integralinė kreivė. Tačiau įdomu tai, kad integralinės kreivės yra apibrėžtos nebūtinai visame intervale (a, b). Beje, įpatingų sprendinių Rikačio lygtis neturi. Bendru atveju, Rikačio lygtis neintegruojama. Panagrinėkime tuos atvejus, kai ši lygtis yra integruojama.

1) Tarkime, kad yra žinomas atskiras Rikačio lygties sprendinys, tarkime t. Tada atlikę keitimą

$$y = t + \frac{1}{z},$$

z nauja funkcija, mes gausime tiesinę dif. lygtį.

2) Rikačio lygtis

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \quad A, B, C, \in \mathcal{R}, \ (B+1)^2 \geq 4AC, \tag{1.44}$$

turi tokį atskirą sprendinį:

$$y_1 = \frac{a}{x},$$

čia a yra skaičius, kuris nustatomas paskutiniąją lygtį įrašius į (1.44) dif. lygtį.

3) (1.43) Rikačio lygtį, keitinio $y = z + g(x)$ dėka, visuomet galime pertvarkyti į tokią lygtį:

$$y' = By^2 + R(x),$$

čia $g(x)$ yra lygties

$$2Ag(x) + Q + \frac{P'}{P} \equiv 0$$

sprendinys. Tarkime, kad

4) $R(x) = Ax^{-2}$. Tada, (siūlome skaitytojui tai atlikti) ši lygtis yra apibendrinta homogeninė lygtis.

5) Jei $R(x) = Ax^{\alpha}$ ir $\alpha_n = -\frac{4n}{2n-1}$, $n-$sveikas skaičius, tai keitiniu

$$\frac{1}{\eta(\xi)} = x^2 y(x) + \frac{x}{b}, \xi = x^{\alpha_n + 3} (n \geq 1)$$

mes gauname tokią lygtį

$$\eta' = -\frac{A\eta^2}{\alpha_n + 3} - \frac{B\xi^{\alpha_{n-1}}}{\alpha_{n+3}}$$

Taikydami šį keitinį kelis kartus galime pasiekti, kad $\alpha_0 = 0$, o tuo pačiu ir $R(x) = c$. Jeigu $n \leq -1$, tai keitiniu

$$\frac{1}{y(x)} = \xi^2 \eta(\xi) + \frac{(\alpha_n + 1)\xi}{A}, \quad \xi = x^{-\alpha-1}$$

nagrinėjamą lygtį galime pertvarkyti į tokią:

$$\eta' = \frac{A}{\alpha_n + 1}\eta^2 + \frac{B}{\alpha_n + 1}\xi^{\alpha_{n-1}}.$$

naudodami minėtąjį keitinį baigtinį skaičių kartų galime pasiekti, kad $\alpha_0 = 0$. Visais kitais atvejais suintegruoti Rikačio lygties nepavyksta.

1.8 Diferencialinės lygtys pilnais diferencialais. Integruojamas daugiklis

Tarkime, kad duota lygtis

$$M(x, y)\mathrm{dx} + \mathrm{N(x, y)dy} = 0, \tag{1.45}$$

o šios lygties kairioji pusė yra kokios nors funkcijos U pilnas diferencialas. Tada (1.45) lygtį galime perrašyti taip $dU = 0$. Aišku, kad šios lygties bendrasis integralas yra lygus $U(x, y) = c$. Laikome, kad $M, N \in C(D)$, čia D kokia tai plokštumos sritis, be to šioje srityje turi tolydžias dalines išvestines, kintamųjų x ir y atžvilgiu, atitinkamai. Išklausę matematinės analizės kursą žino, kad tam, kad (1.45) lygtis būtų lygtimi pilnais diferencialais būtina ir pakankama, kad galiotų lygybė:

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.46}$$

Jei pastaroji sąlyga išpildyta, tai bendrąjį integralą galime užrašyti taip:

$$\int M(x, y)\mathrm{dx} + \int N(x_0, y)\mathrm{dy} = c \tag{1.47}$$

arba

$$\int M(x, y_0)\mathrm{dx} + \int N(x, y)\mathrm{dy} = c,$$

čia taškai $x_0, y_0 \in D$.

Koši uždavinio sprendinį, kai duotos pradinės sąlygos $x_0, y_0 \in D$, tuo atveju kai abi funkcijos M ir M nėra tapatingai lygios nuliui, gauname iš bendrojo integralo (1.47), kai $c = 0$ ir iš formulės

$$\int M(x,y)\mathrm{dx} + \int N(x_0,y)\mathrm{dy} = 0 \tag{1.48}$$

arba

$$\int M(x,y_0)\mathrm{dx} + \int N(x,y)\mathrm{dy} = 0.$$

Tuo atveju, kai nagrinėjamame plokštumos taške funkcijos $M \equiv N \equiv 0$, tai šiame taške krypties laukas neapibrėžtas, taigi sprendinys arba neegzistuoja arba yra nevienintelis.

Aptarsime integruojamo daugiklio metodą.

Apibrėžimas *Jeigu lygtis* (1.45) *nėra lygtis pilnais diferencialais, bet egzistuoja funkcija* $\mu = \mu(x,y)$ *tokia, kad lygtis*

$$\mu(M\mathrm{dx} + \mathrm{Ndy}) = 0 \tag{1.49}$$

yra pilnais diferencialais, t.y.

$$\mu(M\mathrm{dx} + \mathrm{Ndy}) = \mathrm{dU},$$

tai funkcija μ *yra vadinama integruojamu daugikliu, o funkcija* U, *šį integruojamą daugiklį atitinkančiu integralu.*

Taigi, jei integruojamas daugiklis yra žinomas, tai padauginę pradinę lygtį iš šio daugiklio mes gauname lygtį pilnais diferencialais. Tačiau pastebėsime, kad dauginant iš kitos funkcijos mes galime arba prarasti sprendinius arba gali pasirodyti nauji sprendiniai, priklausomai nuo to ar kreivės taškuose integruojamo daugiklio reikšmė begalybė ar nulis.

Tarkime, kad integruojamas daugiklis μ yra tolydžiai diferencijuojama funkcija. Tada turime, kad

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad integruojamas daugiklis μ yra lyg- ties, su dalinėmis išvestinėmis

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\big) \tag{1.50}$$

sprendinys.

Jei iš anksto yra žinoma, kad funkcija $\mu = \mu(\omega)$, čia ω yra žinoma x ir y funkcija, tai (1.50) lygtis yra tiesinė dif. lygtis, su nežinoma funkcija $\mu = \mu(\omega)$:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} = \phi(\omega)\mu, \tag{1.51}$$

ir

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}} \equiv \phi(\omega).$$

Spręsdami (1.51) lygtį gauname integruojantį daugiklį

$$\mu = \exp\big(\int \phi(\omega)\mathrm{d}\omega\big),\ (c = 1).$$

Tarkime, kad integruojamas daugiklis priklauso tik nuo vieno kintamojo

$$\omega = x\ (\omega = y).$$

Tada:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\phi(x)\ \ \big(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\phi(y)\big).$$

Integruojamas daugiklis yra skaičiuojamas taip:

$$\mu=\exp\big(\int\phi(x)\mathrm{dx}\big)\ \ (\mu=\exp\big(\int\phi(y)\mathrm{dy}\big)).$$

Jei lygtis (1.51) yra homogeninė, tai naudojamas toks integruojamas daugiklis

$$\mu=\frac{1}{Mx+Ny,}$$

jei tik $Mx+Ny\neq 0$.

Pasirodo, kad jei žinome du (8.1) lygties integruojamus daugiklius, tarkime μ_1 ir μ_2 ir be to $\mu_1/\mu_2\neq 0$, tai tada santykis

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=c$$

yra lygties bendrasis integralas. Įdomu tai, kad jei lygtis (1.45) yra homogeninė ir pilnais diferencialais, tai funkcija $Mx+Ny=C$ yra bendrasis integralas, jei tik $Mx+Ny\neq const$.

I. Taikymai fizikoje

1. Yra žinoma, kad kūno aušimo greitis tiesiogiai proporcingas kūno ir aplinkos temperatūrų skirtumui. Tarkime, kad kūno, kurio temperatūra laiko momentu t yra $\theta(t)$, o aplinkos temperatūra yra pastovi ir lygi a. Tada temperatūros kitimo greitis yra lygus

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}=-k(\theta(t)-a),$$

čia $k>0$ yra proporcingumo koeficientas. Tegu pradiniu laiko momentu $t=0$ temperatūra yra $\theta(0)=\theta_0>a$.

Integruodami lygtį su atskirtais kintamaisiais gauname, kad $\theta(t)=C\mathrm{e}^{-kt}+a$. Išsprendę Koši uždavinį gauname, kad $C=\theta_0-a$. Jeigu žinotume aplinkos temperatūrą, bei temperatūros dydį laiko momentu $\theta(t_1)$, tai galėtume nustatyti proporcingumo koeficientą.

2. Raskime veidrodžio formą, kurios dėka, lygiagrečių spindulių pluoštas surenkamas į vieną tašką.

Tarkime, kad nagrinėjamas pluoštas lygiagretus Ox ašiai. Nesunku suprasti, kad nagrinėjamas veidrodžio paviršius turėtų būti sukimosi paviršiaus, gauto sukant kreivę apie Ox ašį, dalis (simetrijos principas). Raskime minėtąją kreivę, tarkime $L=L(x,y)=0$.

Tegu $M(x,y)\in L$. Tarkime SM yra krentantis spindulys. Tegu MO yra atspindžio spindulys, $TT'-$ yra liestinė kritimo taške M, o NN' yra normalė taške M.

Žinome, kad kritimo ir atspindžio kampai yra lygūs, taigi $\angle SMN=\angle OMN$. Be tada $\angle SMT'=\angle OMT$. Toliau, $\angle OTM=\angle SMT'$, taigi ir $\angle OTM=\angle OMT$. Gauname, kad trikampis $\triangle MOT$ yra lygiašonis.

Turėdami šiuos duomenis sudarykime dif. lygtį. Visų pirma pastebėkime, kad

$$\mathrm{tg}\angle OTM=y'.$$

Antra vertus,

$$\mathrm{tg}\angle OTM=\frac{|MP|}{|TP|}.$$

Pastebėję, kad $|MP|=y$, ir $|TP|=|OT|-|OP|=|OM|-|OP|=\sqrt{x^2+y^2}+x$, gauname tokią lygybę

$$y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname homogeninę diferencialinę lygtį:

$$(\sqrt{x^2+y^2}+x)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0.$$

Pastarąją integruodami žinomu būdu, gausime tokį bendrąjį šios diferencialinės lygties sprendinį:

$$y^2 = 2c(x+\frac{c}{2}).$$

Taigi, šio sprendinio grafikas yra parabolė, kurios viršūnė yra taške $(-c/2, 0)$.

Be to pastebėsime, kad $y = 0 (x \leq 0)$ yra šios diferencialinės lygties ypatingas sprendinys.

3. Tarkime, kad kaip paprastai $I = I(t), V = V(t), R = R(t)$ elektros srovės stiprumas, įtampa ir varža grandinėje, laiko momentu t, atitinkamai. Be to tegu $L-$ saviindukcijos koeficientas. Žinoma, kad įtampą, bet kuriuo laiko momentu t, galime išreikšti tokia lygybe:

$$V = IR + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname, kad

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}. \tag{2}$$

Tarkime, kad I_0 yra srovės stiprumas pradiniu laiko momentu $t = 0$. Išsprendę paskutiniąją diferencialinę lygtį, mes rasime srovės kitimo, grandinėje, dėsnį, tenkinančio pradines sąlygas $I = I_0$, kai $t = 0$. Tarkime, kad V, R, L yra pastovūs dydžiai. Tada spręsdami lygtį (2) gauname tokį bendrąjį sprendinį:

$$I = \frac{V}{R} + c\mathrm{e}^{-(R/L)t}. \tag{3}$$

Spręsdami Koši uždavinį gauname tokį atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas:

$$I = \frac{V}{R} + \mathrm{e}^{-R/Lt}\big(I_0 - \frac{V}{R}\big).$$

Matome, kad (3) lygybės antrasis dėmuo artėja prie nulio, kai $t \to \infty$. Taigi, kai t didelis, galime laikyti, kad $I = V/R$, t.y. galioja Omo dėsnis.

4. Žinoma, kad radžio skilimo laikas yra proporcingas jo masei. Raskime radžio skilimo lygtį, jeigu žinoma, kas per 1600 metus suskyla pusė radžio masės. Koks radžio procentas liks nesuskilęs po 300 metų?

Tegu R reiškia radžio masę, laiko momentu t, o R_0 masę pradiniu laiko momentu $t_0 = 0$. Tada radžio skilimo greitis yra $\mathrm{d}R/\mathrm{d}t$. Kadangi skilimo greitis mažėja, mažėjant masei, tai ši išvestinė yra neigiama. Be to skilimo greitis yra tiesiog proporcingas greičiui, tai

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -kR,$$

čia $k > 0$. Gauname diferencialinę lygtį su atskirtais kintamaisiais. Integruodami šią lygtį gauname, kad $R = c\mathrm{e}^{-kt}$.

Raskime proporcingumo koeficientą ir c. Spręskime Koši uždavinį. Kai $t = 0$ gauname, kad $R = R_0$. Taigi, $R = R_0\mathrm{e}^{-kt}$. Toliau, raskime k. Kai $t = 1600$, t.y. praėjus skilimo periodo pusei gauname, kad $R = 0.5R_0$. Vadinasi teisinga lygybė

$$0.5R_0 = R_0\mathrm{e}^{-k1600}.$$

Iš pastarosios lygybės gauname, kad $k \approx 0,00043$.

Antrąją užduoties dalį paliekame skaitytojui.

Uždaviniai

1. Nustatykite kūno aušimo dėsnį, jeigu aplinkos temperatūra yra 20^0C, o kūnas per $20min.$ atvėsta nuo 100 iki 60^0C. Per kiek laiko temperatūra nukris iki 30^0C?

2. Vertikaliame oro vamzdyje žemiau esančių oro sluoksnių slėgis p tiesiogine priklausomybe susietas su virš jo esančiu oro stulpo aukščiu h. žinoma, kad oro slėgis virš jūros lygio yra lygus $1kg/cm^2$ o slėgis $500m$ aukštyje yra lygus $0,92kg/cm^2$.

3. Raskite srovės stiprumo kitimo dėsnį, jeigu žinoma, kad $I(0) = I_0$ ir $v = A\sin(\omega t)$, čia v yra įtampa.

4. Raskite visas kreives, kurių normalės Ox ašyje atkerta y^2/x ilgio atkarpas.

Išspręskite pateiktas diferencialines lygtis:

$$\textbf{5}.\ y' = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}};\ \ \textbf{6}.\ y' = y\ln y;\ \ \textbf{7}.\ y' = x + y + 1.$$

Raskite sprendinius tenkinančius pradines sąlygas (išspręskite Koši uždavinius) taške $(2, 1)$:

$$\textbf{8}.\ y' = \mathrm{e}^{x+y} - 1;\ \ bf9.\ y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x;\ \ \textbf{10}.\ y' = -y^2 - 2xy - x^2.$$

Raskite diferencialinės lygties bendruosius bei ypatingus sprendinius, jeigu jie egzistuoja:

$$\textbf{11}.\ y' = \frac{y-1}{x+1};\ \ \textbf{12}.\ y' = -2xy;\ \ \textbf{13}.\ \mathrm{d}x = \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y;$$

$$\textbf{14}.\ y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}};\ \ \textbf{15}.\ y' = x\sqrt{1+y^2};\ \ \textbf{16}.\ y' = xy^{(2/3)}.$$

$$\textbf{17}.\ x(x+2y)\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y = 0;\ \ \textbf{18}.\ y' = \frac{x+2y}{-x};$$

$$\textbf{19}.\ \frac{\mathrm{d}x}{y+x} = \frac{\mathrm{d}y}{y-x}.$$

Nubrėžkite dif. lygties integralinių kreivių šeimos krypčių lauką, bei naudodamiesi šiuo lauku rekonstruokite šias dif. lygties integralines kreives:

$$\textbf{20}.\ y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x}};\ \ \textbf{21}.\ y' = -x\sqrt{4y};\ \ \textbf{22}.\ y' = -\frac{x-1}{y-2}.$$

Sudarykite duotosios kreivių šeimos diferencialines lygtis:

$$\textbf{23}.\ y = 2cx - c^2;\ \ \textbf{24}.\ y = (x-c)^3;\ \ \textbf{25}.\ y = c - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\textbf{25}.\ y'(x^2y^2 - 1) + 2xy^3 = 0;\ \ \textbf{26}.\ 2yy' = 1 + \sqrt{\frac{y^2}{x} - 1};$$

$$\textbf{27}.\ (y^4 - 3x^2)\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}x.$$

Raskite sprendinius, tenkinančius pradines sąlygas $y(0) = 0$:

$$\textbf{28}.\ y' = 2xy + 1;\ \ \textbf{29}.\ xy' = x + 2y;\ \ \textbf{30}.\ xy' = x + y.$$

Išspręskite pateiktas dif. lygtis:

$$\textbf{31}.\ y' = 2xy + 2x^3y^2;\ \ \textbf{32}\ \ 3y^2y' = -y + y^2\ln x, y(1) = 1;$$

$$\textbf{33}.\ xy' = xy^2 - y, y(0) = 1.$$

34. Raskite kreives, kurių liestinės Oy ašyje atkerta atkarpas, lygias lietimosi taško ordinatės kvadratui.

$$\textbf{35}.\ y' + \frac{1}{4x^2} = y^2;\ \ \textbf{36}.\ y' = y^2 + \frac{1}{x^2};\ \ \textbf{37}.\ xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2.$$

$$\mathbf{38}.\ \frac{2x}{y^3}\mathrm{d}x = \frac{3x^2 - y^2}{y^4}\mathrm{d}y; \quad \mathbf{39}.\ x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0;$$

$$\mathbf{40}.\ \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y\mathrm{d}x}{x^2}.$$

$$\mathbf{41}.\ \big(\frac{x}{y} + 1\big)\mathrm{d}x + \big(\frac{x}{y} - 1\big)\mathrm{d}y = 0; \quad \mathbf{42}.\ (xy^2 + y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0;$$

$$\mathbf{43}.\ \big(2y + \frac{1}{(x+y)^2}\big)\mathrm{d}x + \big(3y + x + \frac{1}{(x+y)^2}\big)\mathrm{d}y = 0,$$

$$\mathbf{44}.\ (\sqrt{x^2 - y} + 2x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0.$$

1.9 Pirmos eilės diferencialinė lygtys neišspręstos išvestinės atžvilgiu. Bendrosios sąvokos

Lygtį

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.52}$$

vadinsime pirmos eilės diferencialine lygtimi, neišspręsta išvestinės atžvilgiu. Kaip ir pirmąjame skyriuje, kuomet nagrinėjome dif. lygtis išspręstas išvestinės atžvilgiu, (1.52) lygtis plokštumoje apibrėžia krypčių lauką, tik šiuo atveju kiekviena taške ne būtinai nusakoma viena kryptis, t.y. y' taške nebūtinai įgyja vieną reikšmę. Beje, taške (x_0, y_0) visos išvestinės reikšmės randamos sprendžiant lygtį

$$F(x_0, y_0, y') = 0.$$

Šiuo atveju integralinės kreivės liestinė, taške, sutampa su viena iš kryp- čių šiame taške.

Funkciją $y = \phi(x) \in C^1 < a, b >$, vadinsime (1.52) dif. lygties sprendiniu, jeigu $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$. Beje, (1.52) lygties sprendiniai gali būti gaunami neišreikštine forma $\Phi(x, y) = 0$, bei parametrine $x = \phi(x), y = \xi(x)$.

Koši uždaviniu, kaip ir anksčiau, vadinsime integralinės kreivės, kuriai priklauso nurodytas taškas, radimą. Sprendinys vadinamas atskiru, jeigu per kiekvieną kreivės tašką eina tik viena integralinė kreivė. Kitaip tariant, fiksuotai krypčiai yra viena integralinė kreivė, nors šiuo atveju, tame pat taške gali būti ir daugiau duotosios lygties integralinių kreivių, bet jų krypčių laukas bus kitas. Priešingu atveju sprendinys vadinamas ypatingu.

Jeigu (1.52) lygties kairioji pusė yra tolydi srityje $\Omega \subset \mathcal{R}$, ir be to turi tolydžią dalinę išvestinę, y' atžvilgiu, tai galimą ypatingą sprendinį rasime spręsdami lygčių sistemą:

$$F(x, y, y') = 0; \ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Šios lygčių sistemos sprendinį vadinsime *diskriminantine kreive.* Diskriminantinė kreivė bus ypatingas sprendinys, jeigu šios kreivės taškuose pažeistos sprendinio vienatinumo sąlygos.

1.10 $n-$os eilės dif. lygtys

Apibrėžimas *Pirmos eilės, $n-$ojo laipsnio diferencialine lygtimi vadinsime tokį reiškinį:*

$$A_0(x, y)y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x, y)y' + A_n(x, y) = 0, \tag{1.53}$$

$A_i \in G \subset \mathcal{R}, \ \ i = 1, \ldots n.$

Pastebėsime, kad (1.53) lygtį galime interpretuoti kaip $n-$ ojo laipsnio polinomą. Tarkime, kad šis polinomas turi $m \leq n$ šaknų, t.y.

$$y' = f_i(x, y) \ \ (i = 1; \ldots, m). \tag{1.54}$$

Jeigu kiekvieną iš šių funkcijų galime suintegruoti, tai gausime bendrųjų integralų (sprendinių) šeimą

$$\psi_i(x,y) = c_i \ \ (i = 1,\dots,m).$$

Šį bendrą integralą galime užrašyti ir taip:

$$\big[\psi_1(x,y) - c\big] \times \big[\psi_2(x,y) - c\big] \times \ldots \times \big[\psi_m(x,y) - c\big] = 0,$$

kuris yra $m-$ojo laipsnio polinomas c atžvilgiu.

(1.54) lygčių ypatingi sprendiniai yra ir lygties (1.53) ypatingi sprendiniai.

Panagrinėsime kvadratinę lygtį, y' atžvilgiu.

Tarkime duota lygtis

$$y'^2 + 2P(x,y) + Q(x,y) = 0. \tag{1.55}$$

Išsprendę šią lygtį y' atžvilgiu gauname,

$$y' = -P(x,y) \pm \sqrt{P^2(x,y) - Q(x,y)}. \tag{1.56}$$

Žinoma, kad pastarieji sąryšiai turi prasmę plokštumos srityje $P^2 - Q \geq 0$. Integruodami (1.56) lygybę gauname bendrąjį (1.55) lygties sprendinį. Beje, lygties (1.56) diskriminantinė kreivė yra lygties $P^2(x,y) - Q(x,y) = 0$ sprendinys (kodėl?).

1.11 Nepilnosios diferencialinės lygtys

1. Visų pirma panagrinėkime tokią dif. lygtį;

$$F(y') = 0. \tag{1.57}$$

Laikysime, kad funkcija F yra tolydi, be to turi baigtinį nulių skaičių. Tarkime, kad $y = y(x) \in C^1 < a, b >$ yra lygties sprendinys. Aišku, kad funkcija $y'(x)$ taip pat yra viena iš lygties (1.57) šaknų, kurią pažymėkime θ. Taigi $y' = \theta$. Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $y = \theta x + c$. Taigi gauname, kad

$$F\big(\frac{y-c}{x}\big) = 0 \qquad (1.58).$$

Atvirkščiai, tarkime, kad $(y-c)/x = \theta, x \neq 0$, o θ yra kokia nors lygties (1.57) šaknis. Bet tada $y = \theta x + c$ ir $y' = k$, o tuo pačiu ir $F(y') = 0$. Taigim, gavome, kad bet koks (1.57) lygties sprendinys apibrėžiamas (1.58) lygybe, c yra konstanta.

2. Nagrinėsime lygtį

$$F(x, y') = 0. \tag{1.59}$$

Aptarsime dvi galimybes:

a) (1.59) lygtis išsprendžiama išvestinės atžvilgiu. Turime, kad $y' = f_k(x), \ k = 1,\dots,m$. Iš paskutiniojo sąryšio gauname, kad

$$y = \int f_k(x)\mathrm{d}x + c, \ k = 1,\dots,m.$$

b) aptarsime atvejį, kai (1.59) lygtis nėra išsprendžiama y' atžvilgiu. Tada šią lygtį galime spręsti parametrizę (jei įmanoma) $x = \phi(t), \ y = \theta(t)$. Šiuo atveju galime rasti bendrąjį sprendinį naudojant sąryšį $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$. Gauname

$$\mathrm{d}y = \theta(t)\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Integruodami paskutiniąją lygybę, bei naudodamiesi parametrinėmis lygtimis gauname tokį bendrąjį sprendinį:

$$\begin{cases} x = \phi(x); \\ y = \int \theta(t)\phi'(t)\mathrm{d}t + c. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad jeigu egzistuoja skaičius a toks, kad

$$\lim_{y'\to\infty} F(a, y') = 0,$$

tai $x = a$ yra (1.59) lygties sprendinys. Beje, jis gali būti ir ypatingas.

3. Nagrinėsime lygtį, kurioje nėra nepriklausomo kintamojo:

$$F(y, y') = 0.$$

Skirsime du atvejus:

a) $y' = f_k(y),\ k = 1, \ldots, m$. Tada, kaip ir auksčiau aptartu atveju, galime atskirti kintamuosius ir integruoti. Gausime, kad

$$x + c = \int \frac{\mathrm{d}y}{f_k(y)},\ k = 1, \ldots, m.$$

b) Aptarsime atvejį, kai duotąją lygtį galime parametrizuoti, t.y. egzistuoja funkcijos $\phi(t) = y$ ir $\theta(t) = y'$. Tada teisingi sąryšiai

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x,\ \phi'(t)\mathrm{d}t = \theta(t)\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x = \frac{\phi'(t)\mathrm{d}t}{\theta(t)}.$$

Iš pastarųjų sąryšių gauname, kad

$$\begin{cases} x = \int \frac{\phi'(t)\mathrm{d}t}{\theta(t)} + c, \\ y = \phi(t). \end{cases}$$

1.12 Lagranžo ir Klero lygtys

Apibrėžimas *Lygtį*

$$y = \xi(y')x + \phi(y')\ (\xi(y') \neq y') \tag{1.60}$$

vadinsime Lagranžo dif. lygtimi.

Aptarsime šios lygties integravimo metodą. Pasižymėkime $y' = p$, čia p yra parametras. Tada nagrinėjamoji (1.60) lygtis gali būti perrašyta taip:

$$y = \xi(p)x + \phi(p). \tag{1.61}$$

Skaičiuodami paskutiniosios lygybės abiejų pusių diferencialus gauname lygybę

$$p\mathrm{d}x = \xi(p)\mathrm{d}x + (\xi'(p)x + \phi(p))\mathrm{d}p$$

arba

$$(\xi(p) - p)\mathrm{d}x + (\xi'(p)x + \phi(p))\mathrm{d}p = 0.$$

Tarkime, kad $\xi(p) \neq p$. Tada padalinę abi paskutiniosios lygybės puses iš skirtumo $\xi(p) - p$ gauname tokią tiesinę lygtį:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\xi'(p)}{\xi(p) - p}x = \frac{\phi(p)}{p - \xi(p)}.$$

Kadangi lygtis tiesinė, tai jos sprendinį galime užrašyti tokiu būdu: $x = A(p)c + B(p)$. Įrašę gautą x reikšmę į (1.61) gauname funkcijos y reikšmę. Tada Lagranžo diferencialinės lygties bendrasis sprendinys užrašomas parametrinėje formoje:

$$\begin{cases} x = A(p)c + B(p), \\ y = E(p)c + F(p). \end{cases}$$

Tada, kai $\xi(p) = p$ mes gauname algebrinę lygtį, kurią išsprendę randame $p = p_i,\ i = 1, \ldots, m$. Įrašę gautąsias reikšmes į (1.61) gauname sprendinių šeimą $y = xp_i + \phi(p_i),\ i = 1, \ldots, m$. Pastebėsime, kad šios tiesės gali būti ypatingi Lagranžo dif. lygties sprendiniai.

Apibrėžimas *Lygtį*

$$y = xy' + \phi(y'),\ (\phi(y') \neq ay' + b)$$

vadinsime Klero dif. lygtimi.

Rasime šios dif. lygties bendrąjį sprendinį. Elgdamiesi tokiu pat būdu, kaip ir ieškodami Lagranžo dif. lygties bendrojo sprendinio parametrizavę Klero lygtį

$$y = xp + \phi(p), \tag{1.62}$$

gauname lygybę

$$p\mathrm{d}x = p\mathrm{d}x + (x + \phi'(p))\mathrm{d}p$$

arba

$$(x + \phi'(p))\mathrm{d}p = 0. \tag{1.63}$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname dvi lygtis: $\mathrm{d}p = 0$, ir $x + \phi'(p) = 0$. Iš pirmosios išplaukia, kad $p = c$. Šią parametro reikšmę įrašę į (1.62) lygybę gauname $y = xc + \phi(c)$. Paskutinioji tiesių šeima yra Klero dif. lygties bendrasis sprendinys. Iš pastarojo sąryšio gauname, kad norint rasti Klero dif. lygties bendrąjį sprendinį pakanka išvestinės vietoje įrašyti c.

Grįžkime prie (1.63) lygybės antrojo sąryšio $x + \phi'(x) = 0$. Bet pastaroji lygybė kartu su Klero dif. lygtimi parametrinėje formoje (1.62) reiškia Klero dif. lygties sprendinį užrašytą parametrinėje formoje

$$\begin{cases} x = -\phi(p), \\ y = -\phi'(p)p + \phi(p). \end{cases} \tag{1.64}$$

Pastebėsime, kad šis sprendinys paprastai yra ypatingas. Įsitikinkime tuo. Rasime Klero dif. lygties diskriminantinę kreivę.

Ieškodami šeimos $y = xc + \phi(c)$ diskriminantinės kreivės sudarome sistemą

$$\begin{cases} x + \phi(c) = 0, \\ y = -\phi'(c)c + \phi(c). \end{cases}$$

Matome, kad pastaroji sistema sutampa su (1.64) sistema, jeigu parametro vietoje įrašytume konstantą c. Dar daugiau, jeigu funkcija $\phi''(c)$ nekeičia ženklo (funkcija neturi perlinkio taškų), tai diskriminantinė kreivė yra gaubiamoji.

Ir pabaigai, Klero dif. lygties bendrasis sprendinys gaunamas lygtyje y' pakeitus konstanta c, o ypatingas sprendinys randamas ieškant šeimos $y = cx + \phi(c)$ gaubiamosios.

1.13 Lygtys, išsprendžiamos laisvojo kintamojo arba funkcijos atžvilgiu.

Aptarsime keletą atvejų, kai diferencialines lygtis pavyksta išspręsti taikant tam tikrus keitinius.

Tarkime duota dif. lygtis

$$y = \phi(x, y'). \tag{1.65}$$

Pastarąją lygtį kartais pavyksta pertvarkyti į jau žinomas lygtis atlikus keitinį $y' = p$. Tada diferencijuodami abi (1.65) lygybės puses gauname:

$$\phi'_x \mathrm{d}x + \phi'_p \mathrm{d}p = p\mathrm{d}x.$$

Tarkime, kad gautąją lygtį pavyksta išspręsti kvadratūromis, kai p yra ieškomoji funkcija, o x laisvas kintamasis. Tada bendrasis sprendinys užrašomas $p = \omega(x, c)$; $x = \theta(p, c)$. Įrašę šį sprendinį į (1.65) lygties parametrinę formą gauname

$$y = \phi(x, \omega(x, c)).$$

Tada pradinės lygties sprendinys gaunamas parametrinėje formoje:

$$\begin{cases} x = \theta(p, c), \\ y = \phi\big(\theta(p, c), p\big). \end{cases}$$

Tuo atveju, kai lygtis yra išsprendžiama laisvojo kintamojo atžvilgiu, tai turime $x = \phi(y, y')$. Parametrizavę $y' = p$ gauname

$$x = \phi(y, p), y' = p. \tag{1.66}$$

Naudodami funkcijos diferencialo formulę gauname, kad

$$\mathrm{d}y = p(\phi'_y \mathrm{d}y + \phi'_p \mathrm{d}p).$$

Jei pastaroji lygtis integruojama kvadratūromis, tai tada galime rasti ir (1.66) lygties bendrąjį sprendinį.

Keli taikymai ir pavyzdžiai

Kreivę L vadinsime izogonaliąja kreivių šeimos $\Phi(x, y, a) = 0$ ((a parametras) trajektorija, jeigu pastaroji kreivė visas šeimos kreives kerta tuo pačiu kampu. Tada, kai $\alpha = \pi/2$, tai izogonaliąją kreivę vadinsime ortogonaliąja trajektorija.

Norint rasti izogonaliąsias kreivių šeimos trajektorijas reikia 1) sudaryti duotosios šeimos diferencialinę lygtį, 2) gautoje diferencialinėje lygtyje funkcijos išvestinę y' reikia pakeisti dydžiu

$$\frac{y' - k}{1 + ky'}, \ k = \mathrm{tg}\alpha, \ \text{ jeigu } \ \alpha \neq \pi/2$$

ir dydžiu $-1/y'$, jeigu $\alpha = \pi/2$.

Jeigu kreivių šeima apibrėžta polinėje koordinačių sistemoje, tarkime lygtimi $\Phi(r, \theta, a) = 0$, tai sudarę šios šeimos diferencialinėje lygtyje $r'(\theta)$ keičiame dydžiais

$$\frac{1 + k\frac{r}{r'}}{\frac{r}{r'} - k}, \ k = \mathrm{tg}\alpha, \ \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

ir $-r^2/r'$ jeigu $\alpha = \pi/2$.

Sakoma, kad jėgos laukas sukurtas jėgos F, kurios potencialas yra $U(x, y)$, jeigu jėgos F projekcijos į koordinatines ašis yra lygios

$$F_x = U'_x, \ \ F_y = U'_y.$$

Kreivės $U(x, y) = c$ yra vadinamos lygio linijomis. Kreivės, kurių liestinių kryptys, lietimosi taške, sutampa su jėgos lauko kryptimi, vadinama jėgos lauko kryptimis (linijomis).

Išspręskite duotąsias diferencialines lygtis ir kur nurodyta, išspręskite Koši uždavinį

$$\mathbf{1}. \ yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0; \ \ M(1, 1).$$

$$\mathbf{2}. \ y'^2 - 4y = 0; \ \ M(1, 0). \ \ \mathbf{3}. \ y'^2 = \frac{1}{|x|}.$$

$$\mathbf{4}. \ yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0; \ \ M(1, 1).$$

$$\mathbf{5}. \ x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$$

Raskite pateiktų diferencialinių lygčių bendruosius sprendinius bei išskirkite ypatingus sprendinius, jei jie egzistuoja:

$$\mathbf{6}. \ (xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0. \ \ \mathbf{7}. \ y'^2 - 2yy' + x^2 = 0.$$

$$\mathbf{8}. \ y'^3 - 4yy' - y'^2 + 4y = 0. \ \ 9. y'^2 - 4y = 0.$$

10. Sudarykite kreivių šeimos

$$(\sqrt{y - x^2} - c)^2 - \frac{x^2}{4} = 0$$

diferencialinę lygtį.

11. Raskite visas kreives, kurių liestinės atkerta ašyje Ox atkarpas, lygias vektorio, lietimosi taške, ilgiui.

Išspręskite duotas dif. lygtis:

$$\mathbf{12}.\ y'^3 + 1 = 0;\quad \mathbf{13}.\ xy'3 = 1 + y';\mathbf{14}.\ 2y'^3 + y'^2 = y;$$

$$\mathbf{15}.\ y = \frac{y'^2}{2} + \ln y';\mathbf{16}.\ x^3 - y'^3 = xy';\quad \mathbf{17}.\ 2yy' = x(y'^2 + 4);$$

$$\mathbf{18}.\ y = -xy' + y'2;\quad \mathbf{19}.\ y = x + y'^2 - y';\mathbf{20}.\ x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2};$$

$$\mathbf{21}.\ y = \frac{xy'}{2} + \frac{y'^2}{x^2};\mathbf{22}.\ x = \frac{y}{y'}\ln y - \frac{y'^2}{y^2};\quad \mathbf{23}.\ y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0;$$

24. Raskite visas kreives, kurių liestinės koordinatinėse ašyse atkerta atkarpas, kurių ilgiai lygūs 4.

25. Raskite visas kreives, kurių atstumų tarp liestinių ir dviejų fiksuotų taškų sandauga yra pastovi.

26. Raskite apskritimų $x^2 + y^2 = R^2$ šeimos ortogonaliąsias trajektorijas. Padarykite brėžinį.

27. Raskite kreives, kurios kerta spindulius, išeinančius iš koordinačių pradžios, kampu $\pi/4$. Padarykite brėžinį.

28. Parodykite, kad lauko jėgos linijos, sudarytos jegų, su potencialo funkcija $U(x, y)$ yra lygio kreivių šeimos ortogonaliosios kreivės.

29. Raskite jėgos lauko kreives, kurį sukuria jėgos su potencialo funkcija

$$U = x^2 + y^2.$$