# VIII. FRAKTALINĖ DIMENSIJA

## 8.1 Fraktalinės dimensijos samprata. Ar baigtinis Norvegijos sienos ilgis?

Tarkime, kad duota atkarpa, kurios ilgis lygus 1. Padalykime šią atkarpą į $n$ lygių dalių. Akivaizdu, kad kiekvienos šios dalies ilgis $r := 1/n$. Tuomet $r \cdot n = 1$. Toliau, tarkime, kad duotas kvadratas, kurio kraštinė lygi 1. Padalykime šį kvadratą į $n$ kopijų tokiu būdu, kad $n \cdot r^2 = 1$. Bet tuomet gauname, kad $r = 1/n^{1/2}$. Atlikime trimatės erdvės objekto, tiksliau kalbant kubo, dalijimo į $n$ lygių dalių, operaciją. Bet kokio kubo tūris lygus jo kraštinės ilgiui trečiuoju laipsniu. Taigi, kraštinės ilgis bus lygus

$$r = \frac{1}{n^{1/3}},$$

kadangi $n \cdot r^3 = 1$.

Šią operaciją apibendrinkime, bet kokio matavimo erdvės kubams. Tarkime, kad $d-$ matį kubą, kurio tūris $a$ (tūriu vadiname šio objekto matą) dalijame į $N := N(d)$ vienodų dalių ir kiekvienos dalies matas yra $r^{-d}$. Aišku, kad tuomet teisinga lygybė: $aN \cdot r^d = a$. Kitaip tariant, figūrą išskaidėme į $N$ vienodų dalių ir jomis uždengėme nagrinėjamą $d-$ matį kubą. Išsprendę $d$ atžvilgiu paskutiniąją lygybę gauname, kad

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}}. \tag{1}$$

Pastebėsime, kad $0 < r < 1$, todėl $d > 0$. Skaičius $d$ vadinamas nagrinėjamo objekto *fraktaline dimensija*. (Vėliau pateiksime ir daugiau fraktalinės dimensijos apibrėžimų). Fraktalinė dimensija nusako ryšį, tarp objektą dengiančių aibių skaičiaus ir šių aibių diametro. Akivaizdu, kad jau nagrinėtų - tiesės, kvadrato, bei kubo fraktalinės dimensijos sutampa su atitinkamomis jų topologinėmis dimensijomis (tiesės arba jos dalies topologinė dimensija lygi 1, plokštumos arba stačiakampio - 2, erdvės arba kubo lygi 3.)

Nesunku suprasti, kad figūros dimensija parodo, kaip keičiasi objekto matas (ilgis, plotas tūris) tiriamo objekto sienos matmenis keičiant kokiu nors pastoviu dydžiu. Kuo didesnė dimensija, tuo labiau pakinta objekto matas, keičiant sienos matmenis.

Suskaičiuokime Kocho kreivės fraktalinę dimensiją. Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad mes nagrinėjame metrines erdves, kuriose topologiją (aplinkų sistemą) nusakome metrikos pagalba. Prisiminkime Kocho kreivės konstrukciją (žr. 1.7 pav.). Intervalą $[0, 1]$ dalijome į tris lygias dalis, kur kiekvienos ilgis lygus $1/3$. Pašalinę iš šio intervalo viduriniąją dalį ją pakeitėme kampu, kurio kraštinės lygios $1/3$. Gavome Kocho kreivę generuojančios sekos pirmąjį narį. Prisiminkime, kad kiti sekos nariai gaunami, tą patį veiksmą atliekant su kiekviena, prieš tai gautos laužtės, dalimi. Grįžkime prie pirmojo sekos nario. Tad kiekviena laužtės atkarpa dalijama į $N = 4$ dalis, o kiekvienos naujai gautos laužtės ilgis lygus $1/3$. Tegu $d$ žymi Kocho kreivės dimensiją (kol kas nežinomą), o $a$ žymi hipotetinės kreivės, kurią vadiname Kocho vardu, ilgį. Tada šios kreivės ilgis $a = 4\big(1/3\big)^d a$. Iš pastarosios lygybės išplaukia

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26\ldots.$$

Taigi, fraktalinė dimensija nebūtinai sveikas skaičius. Beje, dažniausiai būtent nesveikas realus skaičius. Pastebėsime, kad tuo atveju kai kreivė, plokštumos dalis, ar erdvės sritis gali būti aproksimuojamos laužčių, stačiakampių, ar gretasienių sekomis atitinkamai, kurių ribos baigtinės, tai tuo atveju nagrinėjamų figūrų fraktalinė dimensija sutampa su jų topologine dimensija.

Šiame įžanginiame skyrelyje panagrinėsime keletą praktinių uždavinių, kurie stimuliavo fraktalų teorijos vystymąsi. Kocho kreivės pavyzdys įdomus tuo, kad baigtinę plokštumos sritį ribojanti kreivė gali būti begalinio ilgio. Mes tikimės, kad skaitytojas žino geografiją ir įsivaizduoja kaip atrodo Norvegijos arba Didžiosios Britanijos pakrantės. Šių valstybių pakrantės labai raižytos, todėl skaičiuoti jų sienų ilgį tiksliai nėra taip paprasta, o kas labai įdomu, kartais ir neįmanoma. Sakykime Ispanijos ir Portugalijos žinynuose pateikiami skirtingi šių valstybių sienų ilgiai ir tai visai nesusiję su šovinizmu. Tiesiog skaičiavimuose naudojami skirtingi metodai. Grįžkime prie Norvegijos pakrantės. Kaip galime skaičiuoti šios valstybės sieną?

Tarkime, kad mūsų žingsnis yra pastovus, ir tegu jo ilgis lygus $\delta$. Be to, mums prireikė $N := N(\delta)$ žingsnių šiai sienai išmatuoti. Tuomet apytikslis šios sienos ilgis yra

$$L(\delta) = N \cdot \delta.$$

Tikimės, kad tikslus sienos ilgis bus gautas, kai žingsnio ilgį neaprėžtai mažinsime. Bet prieš pradėdami šios pakrantės ilgio analizę grįžkime prie (1) formulės. Tarkime, kad kreivės ilgis lygus $a$. Tuomet

$$N \cdot \delta^d = a.$$

Iš pastarosios mes gauname apytikslę pakrantės ilgį reiškiančią formulę:

$$L(\delta) = N(\delta) \cdot \delta = \frac{a \cdot \delta}{\delta^{-d}} = a \cdot \delta^{1-d}.$$

Norvegijos pakrantės fraktalinė dimensija buvo suskaičiuota ir gauta, kad

$$d \approx 1.59\ldots.$$

Beje, D. Britanijos pakrantės fraktalinė dimensija lygi $d \approx 1.3\ldots$. Taigi, šių valstybių sienų fraktalinės dimensijos didesnės negu Kocho kreivės fraktalinė dimensija.

Žemiau mes apytiksliai suskaičiuosime Kocho kreivės bei Britanijos sienos fraktalines dimensijas.

Mes norėtume panagrinėti ir kiek kitokio pobūdžio aibių, tarkime Kantoro aibės, fraktalines dimensijas. Bet prieš tai prisiminkime kai kurias svarbias sąvokas.

### 8.2 Nulinio mato aibės. Nulinio mato aibių denginiai

Šiame skyrelyje sutapatinsime mato, bei ilgio sąvokas, tiesėje. Minėtasis matas, tai Borelio matas, apibrėžtas atvirų (uždarų ) intervalų generuotoje $\sigma-$ algebroje. Sakysime, kad aibės $F$ ilgis $L(F) = 0$ jeigu jos Borelio matas $m(F) = 0$.

Sakysime, kad aibė $E \subset [0,1]$ yra nulinio mato, jeigu visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti tokią intervalų šeimą $\{U_i; i \in \mathcal{N}\}$, kad

$$E \subset \cup_n U_n, \ \sum_n L(U_n) \le \epsilon.$$

Tarkime, kad $E = \{x_n, n \in \mathcal{N}\}$ yra realiųjų skaičių seka. Ši seka yra nulinio mato aibė, nes bet kokiam $\epsilon > 0$ ši aibė

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathcal{N}} U_n,$$

kur

$$U_n = \left[ x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right].$$

Nesunku matyti, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Matome, kad apibrėžimo sąlygos tenkinamos, vadinasi, aibė $E$ yra nulinio mato. Nesunku suprasti, kad bet kokia aibė, kuri ekvivalenti natūraliųjų skaičių aibei, yra nulinio mato. Antra vertus aibės matas nenusako jos topologinių savybių, kadangi nulinio mato aibėmis mes galime aproksimuoti ne nulinio mato aibes. Pvz. racionaliųjų bei realiųjų aibių santykis.

Priminsime, kad aibė $F$ vadinama tobula, jeigu ji begalinė, uždara, netuščia ir neturi izoliuotų taškų.

Bet kokiam metrinės erdvės elementui $x$ priskirkime rutulį $B_\epsilon(x)$, su centru taške $x$ bei spinduliu $\epsilon$. Tuomet, bet kokio šios erdvės kūno $P$ tūrį apytiksliai galime pakeisti rutulių, kuriais uždengiame ši kūną, tūrių suma. Perėję prie ribos, kai rutulių spindulys artėja į nulį (o tuo pačiu rutulių skaičius neaprėžtai auga) gauname, kad šio kūno tūris lygus minėtąjai sumai, kai dėmenų skaičius neaprėžtai auga, jeigu ši sumų seka turi ribą. Šį kūno $P$ dengin̨į

$$P(\epsilon) = \bigcup_{x \in P} B_\epsilon(x), \tag{4}$$

vadinsime Minkovskio denginiu ir trumpai žymėsime $D_M$.

Pavyzdžiui, bet kokio realiųjų skaičių intervalo $[a, b]$ $D_M$ sudaro (4) sajunga, kai $B_\epsilon(x) = [x - \epsilon, x + \epsilon]$. Beje, intervalo $P(\epsilon)$ ilgis ne mažesnis už $2\epsilon$.

Pastebėkime, kad $\epsilon$ tikslumu, aibės $E$ "užimamą vietą " metrinėje erdvėje galime pakeisti aibe $E(\epsilon)$, t.y. $D_M$, kurios ilgis (plotas, tūris) $L(E(\epsilon))$. Jeigu aibė $E$ uždara nulinio mato aibė, tai $L(E(\epsilon)) \longrightarrow 0$, kai $\epsilon \to 0$. Tačiau nesunku suprasti, kad priklausomai nuo to, kokiu greičiu vienos ar kitos aibės $D_M$ ilgis artėja į nulį, mes galime spręsti apie tos aibės "dydį" ir klasifikuoti nulinio mato aibes pagal šį požymį.

Sakysime, kad aibės $E$ užpildymo laipsnis aukštesnis negu aibės $F$, jeigu dydžio $L(E(\epsilon))$ konvergavimo į nulinį eilė mažesnė negu $L(F(\epsilon))$, kai $\epsilon \to 0$, t.y. $L(E(\epsilon)) = o(L(F(\epsilon)))$.

Dabar esame pasiruošę pateikti, bet kokios aibės $E \subset \mathcal{R}$, fraktalinės dimensijos apibrėžimą.

Aibės $E$ fraktaline dimensija vadinsime ribą

$$\Delta(E) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|},$$

jeigu pastaroji egzistuoja.

Dažnai patogu tolydų parametrą $\epsilon \to 0$ pakeisti diskrečia nykstama seka, kuri tenkina tam tikras sąlygas.

**8.1 Lema** *Tarkime, kad $\{\epsilon_n\}$ nykstama realių skaičių seka, kuri turi savybę:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \epsilon_n}{\log \epsilon_{n+1}} = 1.$$

*Tada aibės $E \subset \mathcal{R}$ fraktalinę dimensiją galime skaičiuoti taip:*

$$\Delta(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log N(\epsilon_n)}{|\log \epsilon_n|}.$$

$\ominus$

Mums pakanka parodyti, kad bet kokiam $\epsilon > 0$ ir $n \in \mathcal{N}$, $\epsilon_{n+1} < \epsilon < \epsilon_n$.

Bet kokiam fiksuotam $\epsilon > 0$ parinkime sekos numerį $n$ taip, kad būtų teisingos nelygybės:

$$N(\epsilon_n) \le 2 \cdot N(\epsilon), \; N(\epsilon) \le 2 \cdot N(\epsilon_{n+1}).$$

Taigi gauname, kad

$$\frac{\log N(\epsilon_n) - \log 2}{|\log \epsilon_{n+1}|} \le \frac{\log N(\epsilon)}{|\log \epsilon|} \le \frac{\log N(\epsilon_{n+1}) + \log 2}{|\log \epsilon_n|}$$

ir

$$\frac{\ln \epsilon_n}{\ln \epsilon_{n+1}} \left( \frac{\ln N(\epsilon_n)}{|\ln \epsilon_n|} - \frac{\ln 2}{|\ln \epsilon_n|} \right) \le \frac{\ln N(\epsilon)}{|\ln \epsilon|} \le$$

$$\frac{\ln \epsilon_{n+1}}{\ln \epsilon_n} \left( \frac{\ln N(\epsilon_{n+1})}{|\ln \epsilon_{n+1}|} - \frac{\ln 2}{|\ln \epsilon_{n+1}|} \right),$$

kai $n \to \infty$.

Iš pirmosios nelygybės gauname, kad

$$\limsup_n \frac{\ln N(\epsilon_n)}{|\ln \epsilon_n|} \le \Delta.$$

Iš antrosios išplaukia
$$\liminf_{n} \frac{\ln N(\epsilon_n)}{|\ln \epsilon_n|} \geq \Delta.$$

$\oplus$

Tarkime, kad nagrinėjama aibė yra tobula. Be to tarkime, kad $\omega_n = \omega_n(F)$ yra uždarų aibių, kurių ilgiai $2^{-n}$ ir kuriose yra bent vienas aibės $F$ elementas, skaičius. Tuomet šios aibės fraktalinė dimensija lygi

$$\Delta(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \omega_n(F)}{n \ln 2}.$$

Paminėsime kelias dimensijos savybes, kurias siūlome skaitytojui įrodyti pačiam. Laikysime, kad nagrinėjamų aibių matai baigtiniai.

1. Tarkime, kad $E \subset F$. Tada $\Delta(E) \leq \Delta(F)$.
2. Tarkime, kad $\overline{E}$ yra aibės $E$ uždarinys. Tada $\Delta(E) = \Delta(\overline{E})$.
3. $\forall E,\ 0 \leq \Delta \leq 1$.
4. $\forall E, F \Delta(E \bigcup F) = \max\{\Delta(E), \Delta(F)\}$
5. Tarkime, kad $T(E)$ kokia tai aibės $E$ afininė transformacija. Tada teisinga lygybė

$$\Delta(T(E)) = \Delta(E).$$

### 8.3 Hausdorfo- Besiechovičiaus dimensija (H-B). H-B ir fraktalinės dimensijos ryšys

Praeitame skyrelyje nagrinėjome erdvės $\mathcal{R}$ aibes. Šiame skyrelyje aptarsime fraktalinės dimensijos problemą, aukštesnių matavimų erdvėse. Tarkime duota fraktalų erdvė virš metrinės erdvės $(\mathcal{R}^3, \rho_3)$. Šioje fraktalų erdvėje išskirkime tokius kompaktiškus elementus: baigtinio ilgio kreivę, juostą, kurios du kraštai yra kreivė, bei erdvės kūnas, kurio dvi sienas sudaro nurodytoji juosta. Kaip praktiškai matuojamas šių elementų ilgis, plotas, bei tūris, atitinkamai. Į kreivę įbrėžkime vienodo ilgio $\delta$ laužtes. Tarkime jų skaičius $N(\delta)$. Tuomet apytikslis kreivės ilgis
$$L(\delta) = N(\delta)\delta.$$

Tarkime, kad kreivė ištiesinama, tuomet

$$\lim_{\delta\to 0} N(\delta)\delta = (\delta)^0 L_0.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad
$$N(\delta) \sim \frac{L_0}{\delta}.$$

Į juostą įbrėžkime vienodus kvadratus, kurių kraštinės ilgis $\delta$. Laikydami, kad ši juosta mati, gauname, kad

$$\lim_{\delta\to 0} N(\delta)\delta^2 = S_0.$$

Antra vertus, matome, kad paskutiniąją lygybę galime užrašyti ir taip:

$$S_0 = \lim_{\delta\to 0} (N(\delta) \cdot \delta) \cdot \delta = \lim_{\delta\to 0} (L(\delta) \cdot \delta).$$

Matome, kad $N(\delta) \sim (S_0 1/\delta^2)$. Analogiškai nagrinėdami erdvinį kūną, gauname, kad šio kūno tūris yra lygus

$$V_0 = \lim_{\delta\to 0} N(\delta)\delta^3.$$

Be to, $N(\delta) \sim V_0/\delta^3$.

Taigi, gauname, kad

$$L_0 = S_0 \cdot \delta^{-1} + o(1), \text{ arba } \frac{S_0}{\delta} \to \infty. \tag{5}$$

Iš pastarųjų sąryšių išplaukia labai svarbi savybė: plokštumos dalies negalime uždengti baigtiniu skaičiumi atkarpų, tuo tarpu begaline kreive "užkloti " plokštumą galime. Analogišką išvadą galime padaryti ir plokštumos ir erdvės santykiui.

Tarkime, kad $S$ kokia nors metrinės erdvės $X$ aibė ir be to

$$h(\delta) = \gamma(\delta)\delta^d$$

kokia nors funkcija, kuria konstruojame matą

$$M_d = \sum h(\delta).$$

Jeigu $S$ atkarpa, kvadratas ar kubas, tai $\gamma(d) = 1$. Tad kas gi toji funkcija $M_d$. Ši aibių funkcija reiškia aibių, kuriomis uždengiame nagrinėjamą aibę, matą, o funkcija

$$h(\delta) = \gamma(\delta)\delta^d$$

yra denginio funkcija. Pavyzdžiui, kai denginį sudaro atkarpos, tai $h(\delta) = \delta$, kvadrato atveju $h(\delta) = \delta^2$ ir taip toliau. Kitaip tariant $h(\delta)$ yra denginio vienetas.

Tarkime, kad $A$ apskritimas, o $S$ - sfera. Tad denginio vienetus, atitinkamai, parinkime taip:

$$h(\delta) = \frac{\pi}{4}\delta^2, \; h(\delta) = \frac{\pi}{6}\delta^3.$$

Prisiminkime (5) sąryšius. Tad galime padaryti išvadą, kad kai $\delta \to 0$, tai bendras denginio matas $M_d$ yra arba lygus nuliui, arba $\infty$.

Aibės $S$ Hausdorfo - Besiechovičiaus (toliau H-B) dimensija vadinsime tokį skaičių $D$, kuriam teisingi sąryšiai:

$$M_d = \sum \gamma(\delta)\delta^d = \lim_{\delta \to 0} \gamma(\delta)N(\delta)\delta^d = \begin{cases} 0, \text{ jei } d > D, \\ \infty, \text{ jei } d < D. \end{cases}$$

$D$ vadinamas kritiniu skaičiumi, $M_d$ vadinamas aibės $S$, $d$ matu. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad kai $d = D$, matas $M_d$ dažnai yra baigtinis, bet ne būtinai. Praeitame skyrelyje nagrinėti aibių denginiai turėjo vieną savybę- denginių diametrai buvo vienodi. Skaičiuojant aibės (H-B) dimensiją denginio rutulių diametrų lygybė nebūtina. Svarbu tik, kad spinduliai nebūtų didesni už $\delta$. Tuomet dimensija skaičiuojama imant apatinę ribą, kai $\delta \to 0$. Aišku, kad tuo atveju, kai nagrinėjami objektai yra atkarpos, kvadratai arba kubai bei šiais minėtais objektais aproksimuojamos figūros, tai jų (H-B) dimensija lygi 1, 2, 3 - atitinkamai.

Jau anksčiau esame minėję, kad aibę vadiname fraktalu, jeigu jos topologinė dimensija mažesnė už fraktalinę. Pavyzdžiui, Kantoro aibės topologinė dimensija lygi nuliui, tuo tarpu fraktalinė- teigiama. Arba Kocho kreivės topologinė dimensija lygi 1, o jos fraktalinė dimensija didesnė už 1. Apskaičiuokime Kocho kreivės (H-B) dimensiją. Prisiminkime, kad fraktalinė jos dimensija lygi $\ln 4/\ln 3$. Žinome, kad šios kreivės $n-$os generacijos laužtės ilgis

$$L(\delta) = (4/3)^n, \; \delta = 3^{-n}.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname, kad generacijos numeris

$$n = -\frac{\ln \delta}{\ln 3}.$$

Tuomet

$$L(\delta) = \exp\big(-\ln \delta \frac{(\ln \frac{4}{3})}{\ln 3}\big) = \delta^{1-D}.$$

Iš paskutiniosios išplaukia, kad

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Tuomet segmentų skaičius $n-$ ojoje iteracijoje lygus $N(\delta) = 4^n = \delta^{-D}$, kur $D$ Kocho kreivės fraktalinė dimensija.

Tarkime, kad

$$h(\delta) = \delta^d.$$

Suskaičiuokime dydį $M_d$. Turime

$$M_d = \sum h(\delta) = N(\delta)h(\delta) = \delta^{-D}\delta^d.$$

Taigi, šiuo atveju akivaizdu, kad kritinis skaičius yra $D = d$. Tai reiškia, kad šiuo atveju fraktalinė ir (H-B) dimensijos sutampa.

Grįžkime prie fraktalų erdvės. Tarkime, kad $(X, \rho)$ - pilna metrinė erdvė, o $(H(X), h(\rho))$ kaip paprastai fraktalų erdvė. Prisiminkime keletą, anksčiau naudotų žymėjimų. Tarkime, kad $\epsilon > 0$ bet koks teigiamas fiksuotas skaičius. Rutuliu aibėje $A \in H(X)$, kurio spindulys $\epsilon$ ir centras taške $x_0$, mes pavadinome aibę

$$B(x_0, \epsilon) = \{x \in A; \rho(x_0, x) \leq \epsilon\}.$$

Tarkime, kad $N(A, \epsilon)$ yra mažiausias natūralusis skaičius $M$ toks, kad

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{M} B(x_n, \epsilon),$$

čia $x_n$ kokia nors metrinės erdvės $X$ elementų seka. Ar toksai $M$ egzistuoja? Bet kokiam parinktam elementui $x \in A$, priskirkime atvirą $\epsilon$ spindulio rutulį, čia pastarasis priklauso kokiam nors aibės $A$ denginiui. Aibė $A$ kompaktiška, todėl iš šio denginio galime išskirti baigtinį podenginį, sudarytą iš ,tarkime $M_1$, atvirų rutulių. Paėmę kiekvieno šio rutulio uždarinį gausime denginį, sudarytą iš $M_1$ uždarų aibių, dengiančių aibę $A$. Pažymėkime raide $C$ šių uždarų denginių aibę. Matome, kad aibė $C$ netuščia. Tegu

$$f : C \longrightarrow \{1, 2, \ldots, M_1\},$$

čia $c \in C$, $f(c)$ reiškia rutulių, priklausančių denginio aibei $C$, skaičių. Tuomet $\{f(c); c \in C\}$ yra baigtinė, teigiamų skaičių aibė. Bet minėtoji aibė turi mažiausią elementą, kurį ateityje žymėsime $N(\epsilon) := N(A, \epsilon)$.

**8.1 Teorema** *Tarkime, $(X, \rho)$ pilna metrinė erdvė, o $A \in H(X)$. Sakykime, kad $\epsilon_n = c \cdot r^n$, čia $0 < r < 1$, $c > 0$, $n \in \mathcal{N}$. Jeigu*

$$D = \lim_n \{\frac{\ln(N(\epsilon_n))}{\ln(\frac{1}{\epsilon_n})}\}$$

*egzistuoja, tai fraktalo $A$ fraktalinė dimensija lygi $D$.* Šios teoremos įrodymas niekuo nesiskiria nuo 6.2 Lemos įrodymo, todėl jo nekartosime.

**8.2 Teorema (Dėžių teorema )** *Sakykime, kad $A \in H(\mathcal{R}^m)$, kur $\mathcal{R}^m$ $m-$ matė euklidinė erdvė. Tarkime, kad ši erdvė uždengta uždarais kubais, kurių kraštinės ilgis lygus $1/2^n$. Sakykime, kad $N_n(A)$ žymi kubų, kurių kraštinių ilgis $1/2^n$, minimalų skaičių, kuris reikalingas atraktoriui $A$ uždengti. Tarkime, kad*

$$D_1 = \lim_n \{\frac{\ln(N_n(A))}{\ln(2^n)}\}$$

*egzistuoja. Tada aibės $A$ fraktalinė dimensija $\Delta(A) = D_1$.*

$\ominus$

Visų pirma pastebėkime, kad, kai $m = 1, 2, \ldots$, tai

$$2^{-m} \cdot N_{n-1} \le N(A, \frac{1}{2^n}) \le N_{k(n)}$$

galioja visiems $n = 1, 2, \ldots$. Be to $k(n)$ yra mažiausias natūralusis skaičius, kuriam teisinga nelygybė: $k \ge n - 1 + 1/2 \cdot \log_2(m)$. Pirmoji nelygybė galioja, kadangi rutulys, kurio spindulys $1/2^n$, kertasi su nedaugiau kaip $2^n$ kubų, kurių kraštinių ilgiai $1/2^{n-1}$. Antroji nelygybė išplaukia iš to, kad kubai, kurių kraštinės ilgis $s$, gali būti patalpinti į rutulį, kurio spindulys $r$, kadangi iš Pitagoro teoremos turime, kad

$$r^2 \ge \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{s}{2}\right)^2 = m\left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Jei $k(n) \sim n$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln N_{k(n)}}{\ln 2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^{k(n)}}{\ln 2^n} \left(\frac{\ln N_{k(n)}}{\ln 2^k(n)}\right) = \Delta.$$

Lygiai taip pat

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(2^{-m} \cdot N_{n-1})}{\ln 2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln N_{n-1}}{\ln 2^{n-1}}\right) = \Delta.$$

Tegu $r = 0.5$. Iš 8.1 Teoremos išplaukia šios teoremos įrodymas.

$\oplus$

Žinoma, nėra būtina naudoti kubus, kurių kraštinių ilgiai lygūs $1/2^n$. Tą patį rezultatą gautume ir paėmę kubus, kurių kraštinės ilgis $c \cdot r^n$, $c > 0$, $0 < r < 1$.

Pateiksime keletą dimensijos skaičiavimo pavyzdžių. 1. Tarkime, kad $K \subset \mathcal{R}^2$, $K = \{0 \le x, y \le 1, x, y \in \mathcal{R}^2\}$. Tada

$$N_1(K) = 4,\ N_2(K) = 16, \ldots N_n(K) = 4^n,\ n \in \mathcal{N}.$$

gauname, kad

$$\Delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(N_n(K))}{\ln 2^n} = 2.$$

2. Sakykime, kad nagrinėjamoji aibė yra Sierpinskio trikampis $\triangle$, erdvėje $\mathcal{R}^2$. Matome, kad

$$N_1(\triangle) = 3,\ N_2(\triangle) = 3^2, \ldots N_n(\triangle) = 3^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Tada,

$$\Delta(\triangle) = \lim_n \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Naudodamiesi 8.1 Lema fraktalinę dimensiją galime skaičiuoti apytiksliai. Kiek plačiau apie tai. Tarkime kad kūbo kraštinės ilgis yra lygus $r_1$. Tada nagrinėjamas objektas patenka į $n_1$ kūbą. Sumažinkime kūbo kraštinę. Tarkime ši kraštinė yra lygi $r_2$, o nagrinėjamas objektas patenka į $n_2$ kūbus. Tada apytikslė fraktalinės dimensijos reikšmė bus lygi:

$$\Delta = \frac{\ln n_1 - \ln n_2}{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

Siūlome skaitytojui, naudojant šią formulę apskaičiuoti apytikslę D. Britanijos sienos (8.1 pav) fraktalinės dimensijos reikšmę, kai $r_1 = 1/12$, o $r_2 = 1/32$.

**8.3 Teorema** *Tarkime, kad erdvės $(X_1, \rho_1)$, $(X_2, \rho_2)$ yra metriškai ekvivalenčios. Tarkime, kad transformacija*

$$\theta := X_1 \longrightarrow X_2$$

*yra izometrija. Tegu , kad $A_1 \in H(X_1)$, ir $\Delta(A_1) = D$. Tada aibė $A_2 = \theta(A_1)$ turi tą pačią dimensiją kaip ir aibė $A_1$, t.y. $\Delta(A_1) = \Delta(\theta(A_1))$.*

$\ominus$

Kadangi nagrinėjamos erdvės metriškai ekvivalenčios, tai egzistuoja konstantos $e_1 < 1 < e_2$ tokios, kad

$$e_1 \cdot \rho_2\big(\theta(x), \theta(y)\big) < \rho_1\big(x, y\big) < e_2 \cdot \rho_2\big(\theta(x), \theta(x)\big), \ \ x, y \ \in X_1.$$

Bet tuomet

$$\rho_2\big(\theta(x), \theta(y)\big) < \frac{\rho_1\big(x, y\big)}{e_1}, \ \ x, y \ \in X_1. \tag{6}$$

Remdamiesi pastarąja nelygybe gauname, kad

$$\theta\big(B(x, \epsilon)\big) \subset B(\theta(x), \frac{\epsilon}{e_1}), \ x \in X_1. \tag{7}$$

Naudodamiesi $N(A_1, \epsilon)$ apibrėžimu, gauname, kad egzistuoja taškai $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X_1$ ir aibė $N := N(A_1, \epsilon)$ tokie, kad uždarų rutulių aibė $\{B(x_n, \epsilon); n = 1, \ldots N\}$ dengia aibę $A_1$. Bet tada aibė $\{\theta\{B(x_n, \epsilon)\}; n = 1, \ldots N\}$ dengia aibę $A_2$. Iš sąryšio (7) išplaukia, kad $N(A_2, \epsilon/e_1) \leq N(A_1, \epsilon)$. Tada

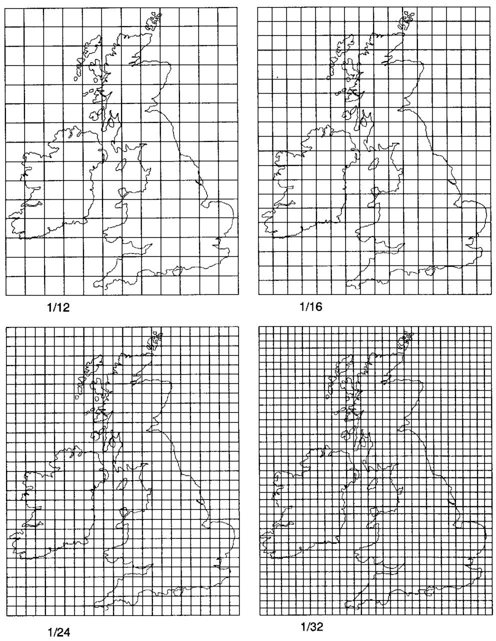
$$\frac{\ln(N(A_2, \frac{\epsilon}{e_1}))}{\ln\big(\frac{1}{\epsilon}\big)} \leq \frac{\ln N(A_1, \epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})},$$

kadangi $\epsilon < 1$. Vadinasi,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\ln(N(A_2, \frac{\epsilon}{e_1}))}{\ln\big(\frac{1}{\epsilon}\big)} = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\ln(N(A_2, \frac{\epsilon}{e_1}))}{\ln\big(\frac{1}{\epsilon}\big)} \leq \frac{\ln N(A_1, \epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} = \Delta(A_1). \tag{8}$$

Iš (6) nelygybės išplaukia, kad

$$\rho_1\big(\theta^{-1}(x), \theta^{-1}(y)\big) < \epsilon_2 \cdot \rho_1\big(x, y\big) \ x, y \ \in X_1.$$




**8.1 pav.**

Iš pastarosios nelygybės gauname, kad

$$\theta^{-1}\big(B(x,\epsilon)\big) \subset B(\theta^{-1}(x), \frac{\epsilon}{e_2}),\ x \in X.$$

Kitaip tariant, $N(A_1, \epsilon e_2) \leq N(A_2, \epsilon)$. Bet $\epsilon < 1$,

$$\frac{\ln(N(A_1, \epsilon \cdot e_2))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \leq \frac{\ln N(A_2, \epsilon \cdot e_2)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})},$$

ir

$$\Delta(A_1) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln(N(A_1, \epsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln(N(A_1, \epsilon e_2))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \leq$$

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(A_2, \epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Iš paskutiniosios ir (8) lygybių išplaukia, kad

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\ln(N(A_2, \epsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \Delta(A_1) = \limsup_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(A_2, \epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Vadinasi,

$$\Delta(A_2) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(A_2, \epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} = \Delta(A_1).$$

$\oplus$

Taigi, jeigu du atraktoriai metriškai ekvivalentūs, tai jų fraktalinės dimensijos sutampa.

Pateiksime pavyzdį. Tarkime metrinėje erdvėje $(\mathcal{R}^2, \rho_M)$ apibrėžtos dvi IAS.

$$\Big\{\mathcal{R}^2; \omega_1(x,y), \omega_2(x,y), \omega_3(x,y)\Big\}$$

ir

$$\Big\{\mathcal{R}^2; \omega_4(x,y), \omega_5(x,y), \omega_6(x,y)\Big\},$$

čia

$$\omega_1(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\omega_3(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\omega_4(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_5(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\omega_6(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sakykime, kad $A_1,\ A_2$ yra šių IAS atraktoriai. Parodysime, kad šių atraktorių fraktalinės dimensijos sutampa.

Pirmosios aibės atraktorius yra Sierpinskio trikampis, kurio dešinysis kampas taške (0,0), o įžambinė jungia taškus (1,0) ir (0,1), o antrosios - Sierpinskio trikampis, kurio statusis kampas taške (1,1), o įžambinė jungia taškus (0,0) ir (0,2). Šių IAS atraktoriai metriškai ekvivalentūs, kadangi juos vieną į kitą galime transformuoti afinine transformacija

$$\theta(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Apibendrinsime fraktalinės dimensijos apibrėžimą tokiu būdu.

Tarkime, kad $(X,\rho)$ pilna metrinė erdvė, $A \in H(X)$. Lai, be to, $N(\epsilon)$ žymi minimalų rutulių, kurių spindulys lygus $\epsilon$, skaičių, kuriais uždengiame aibę $A$. Tuomet ribinę reikšmę

$$\Delta(A) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup \Big\{ \frac{\ln N(\delta)}{\ln(\frac{1}{\delta})};\ \delta \in (0,\epsilon) \Big\},$$

jeigu ji egzistuoja, vadinsime fraktaline dimensija.

Galima parodyti (atlikite tai !), kad paskutinysis apibrėžimas ekvivalentus $\Delta(A)$ apibrėžimui.

**8.4 Teorema** *Tarkime, kad nagrinėjame metrinę erdvę $(\mathcal{R}^m, \rho)$. Tada bet kokiai aibei $A \in H(\mathcal{R}^m)$ fraktalinė dimensija $\Delta(A)$ egzistuoja. Jeigu $B \in H(\mathcal{R}^m)$, ir $A \subset B$, tai $\Delta(A) \le \Delta(B)$. Be to, visuomet teisinga nelygybė: $0 \le \Delta(A) \le m$.*

$\ominus$

Tarkime, kad $m = 2$. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $A \subset K$. Kitaip tariant, bet kokią aibę patalpiname kube. Vadinasi,

$$N(A,\epsilon) \le N(B,\epsilon),\ \epsilon > 0.$$

Taigi visiems $\epsilon > 0$

$$0 \le \frac{\ln N(A,\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \le \frac{\ln N(B,\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Nesunku matyti, kad

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sup \frac{\ln N(A,\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \le \lim_{\epsilon \to 0} \sup \frac{\ln N(B,\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Bet dešiniosios pusės riba egzistuoja ir yra lygi 2, taigi ir kairioji riba egzistuoja, be to, aprėžta tuo pačiu skaičiumi. Akivaizdu, kad $\Delta(A) \ge 0$. Tą patį galime pasakyti ir apie aibę $B$. Taigi $\Delta(A)$ ir $D(B)$ egzistuoja . Kadangi $A \subset B$ tai šiai aibei uždengti reikia ne didesnio aibių skaičiaus. Vadinasi $\Delta(A) \le \Delta(B)$.

$\oplus$

**8.5 Teorema** *Tarkime, kad $A,\ B \in H(\mathcal{R}^m),\ m \ge 0$. Tegu $\Delta(A)$ aibės $A$ fraktalinė dimensija. Jeigu $\Delta(B) < \Delta(A)$, tai tada*

$$\Delta(A \cup B) = \Delta(A).$$

$\ominus$

Iš 8.4 Teoremos išplaukia, kad $\Delta(A \cup B) = \Delta(A)$. Pastebėkime, kad

$$N(A \cup B, \epsilon) \le N(A,\epsilon) + N(B,\epsilon).$$

Vadinasi,

$$\Delta(A \cup B) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup \Big\{ \frac{\ln(N(A \cup B,\epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \Big\} \le \lim_{\epsilon \to 0} \sup \Big\{ \frac{\ln(N(A,\epsilon) + N(B,\epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \Big\} \le$$

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{\ln(N(A,\epsilon))}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}\right\} + \limsup_{\epsilon\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{N(B,\epsilon)}{N(A,\epsilon)}\right)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Įrodymas bus baigtas, jeigu parodysime, kad santykis po logaritmo ženklu mažesnis už vienetą, pakankamai mažam $\epsilon$. Pastebėkime, kad

$$\sup\left\{\frac{\ln(N(B,\delta))}{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)};\ \delta<\epsilon\right\}$$

yra mažėjanti argumento $\epsilon$ funkcija. Vadinasi, kai $\epsilon$ pakankamai mažas, tai

$$\frac{\ln N(B,\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} < \Delta(A).$$

Turime, kad riba egzistuoja, todėl pakankamai mažam $\epsilon$ gauname

$$\frac{\ln(N(B,\epsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} < \frac{\ln N(A,\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}.$$

Bet iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad

$$\frac{N(B,\epsilon)}{N(A,\epsilon)} < 1.$$

$\oplus$

Naudodamiesi šia teorema darome tokią išvadą: "silpnesnės" aibės prijungimas, nepakeičia pradinės aibės fraktalinės dimensijos.

**8.6 Teorema** *Sakykime, kad $\{\mathcal{R}^m;\omega_1,\ldots\omega_N\}$ - IAS, kurios atraktorius yra $A$. Tarkime, kad $\omega_n$ yra S.A., kurios s.k. yra $s_n$, $n\in\{1,\ldots,N\}$. Jeigu IAS yra visiškai nesusijusi arba besiliečianti, tai šios IAS atraktoriaus fraktalinė dimensija $\Delta(A)$ ir $H-B$ dimensija $D(A)$ sutampa, be to, abi šios dimensijos yra lygties*

$$\sum_{i=1}^{N}|s_i|^D = 1, D\in[0,m], D:=\Delta(A)=D(A),$$

*sprendinys. Jeigu $D>0$, tai tada $M_{D(A)}$ yra realus teigiamas skaičius.*

$\ominus$

Teoremą įrodysime tuo atveju, kai $N(A,\epsilon)\sim C\cdot e^{-D}$.

Visų pirma atkreipsime dėmesį, kad $s_i>0, i\in\{1,\ldots,N.\}$ Tegu $\epsilon>0$ bet koks laisvai parinktas skaičius. Kadangi $\omega_i$ yra S.A. tai ši transformacija uždarus rutulius vaizduoja į uždarus, t.y.

$$\omega_i(B(x,\epsilon)) = B(\omega_i(x),|s_i|\epsilon).$$

Kadangi $\omega_i$ apverčiami, tai

$$\omega_i^{-1}(B(x,\epsilon)) = B(\omega_i^{-1}(x),|s_i|^{-1}\epsilon).$$

Iš pastarųjų lygybių gauname, kad

$$N(A,\epsilon) = N(\omega_i^{-1}(A),|s_i|\epsilon).$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia

(3) $$N(\omega_i(A),\epsilon) = N(A,|s_i|^{-1}\epsilon),\ i\in\{1,\ldots,N\}.$$

Užrašykime aibės $A$ atraktorių tokiu būdu :

$$A=\omega_1(A)\cup\ldots\cup\omega_n(A),$$

čia $\omega_i(A),\ i = 1, \ldots, N$, yra kompaktiškos aibės. Tarkime, kad $\epsilon > 0$ tiek mažas, kad $x \in \mathcal{R}^m$, ir $i \in \{1, \ldots, N\}$ tokie, kad

$$B(x, \epsilon) \cap \omega_i(A) \neq \emptyset$$

ir

$$B(x, \epsilon) \cap \omega_j(A) = \emptyset, j \in \{1, \ldots, N\}, \neq j.$$

Vadinasi, jeigu $\epsilon > 0$, pakankamai mažas, tai

$$N(A, \epsilon) = N(\omega_1(A), \epsilon) + \ldots + N(\omega_N(A), \epsilon).$$

Remdamiesi (3) lygybe, gauname, kad pakankamai mažiems $\epsilon > 0$ teisinga lygybė

$$N(A, \epsilon) = N(A, |s_1|^{-1}\epsilon) + \ldots + N(A, |s_N|^{-1}\epsilon).$$

Turėjome, kad

$$N(A, \epsilon) \sim C \cdot \epsilon^{-D}.$$

Tada,

$$C \cdot \epsilon^{-D} \sim C|s_1|^D \cdot \epsilon^{-D} + \ldots + C \cdot |s_N|^D \epsilon^{-D}.$$

Iš paskutiniosios lygybės ir to, kad $\epsilon$ mažas ir pasirinktas laisvai gauname,

$$1 = |s_1|^D + \ldots + |s_n|^D.$$

$\oplus$

Atkreipsime dėmesį, kad aibių $\omega_j$ denginiai skirtingiems $j$ gali būti skirtingi, t.y $e_i$ nebūtinai lygus $e_j$ kai $i \neq j$.

Pateiksime kelis pavyzdžius. Sierpinskio trikampis yra IAS, kurią sudaro trys S.A., su s.k. lygiais 0.5, atraktorius. Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad

$$0.5^D + 0.5^D + 0.5^D = 1.$$

Taigi gauname, kad $D = \ln 3 / \ln 2$

Arba, pavyzdžiui, Kantoro aibė yra IAS

$$\{[0, 1]; \omega_1(x) = \frac{x}{3}; \omega_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \}$$

atraktorius, čia s.k. lygus 1/3.

Naudodamiesi paskutiniąja teorema, gauname, kad

$$\left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1.$$

Suskaičiavę gauname, kad $D \simeq 1.874$.

Kyla klausimas, kodėl kartu su fraktaline dimensija nagrinėjame ir H-B dimensiją? Pasirodo, kad H-B dimensija yra subtilesnė už fraktalinę ta prasme, kad jos dėka galime palyginti tas aibes, kurių fraktalinės dimensijos sutampa. Pateiksime kitą, literatūroje dažnai sutinkamą H-B dimensijos apibrėžimą.

Tarkime, kad $(X, \rho) = (\mathcal{R}^m, \rho_m),\ m \in \mathcal{N}$ . Be to tarkime, kad $A \subset \mathcal{R}^m,$ kokia nors aprėžta aibė. Tegu, be to $\epsilon > 0,\ 0 \leq m < \infty$. Raide A pažymėkime visų aibės $A$ denginių klasę, trumpai

$$\mathcal{A} = \big\{A_i \subset A;\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big\}.$$

Pažymėkime

$$M(A,p,\epsilon) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}(\overline{d}(A_i))^p; A_i \in \mathcal{A},\ \overline{d}(A_i) < \epsilon, i = 1,2,\dots\Big\},$$

kur

$$\overline{d}(A) = \sup\{\rho(x,y);\ x,y \in A\}$$

be to, laikome, kad $\left(\overline{d}(\emptyset)\right)^0 = 0$. Vadinasi,

$$f_{A,p}(\epsilon) := M(A,p,\epsilon) \in [0,\infty].$$

Pažymėkime

$$M(A,p) = \sup_{\epsilon>0} M(A,p,\epsilon).$$

Tada, $p \in [0,\infty]$ dydį $M(A,p)$ vadinsime aibės $A$ Hausdorfo p - dimensija.

**8.7 Teorema** *Tarkime, kad $A$ aprėžta aibė, $\epsilon > 0$ . Tada funkcija $f_{A,\epsilon}(\epsilon)$ yra nedidėjanti, $p \in [0,\infty]$.*

Šios teoremos neįrodinėsime.

Tarkime $C$ Kantoro aibė intervale $[0,1]$. Tada $M(C,0) = \infty$ ir $M(C,1) = 0$. Pastebėkime, kad, jeigu $p = 0$, tai pasirinktam $\epsilon = 1/3^n$ yra ne daugiau negu $2^n$ poaibių, kurių diametrai mažesni už $\epsilon$ ir kurie dengia aibę $C$. Be to, $2^n$ nesikertančių intervalų, kurių diametrai $1/3^n$ galiniai taškai priklauso aibei $C$, taigi šie taškai negali būti tuose poaibiuose (poaibiai atviri). Vadinasi, kai $\epsilon \to 0$, tai $M(A,p,\epsilon) \to \infty$. Kadangi $M(C,0)$ yra šių skaičių viršutinė riba, tai $M(C,0) = \infty$. Tarkime, kad $p = 1$. Tuomet duotam $\epsilon > 0$ mes galime parinkti tokį numerį $n$, kad $1/3^n < \epsilon$ ir $C$ denginį sudarys $2^n$ poaibių, kurių diametrai $< \epsilon$. Tuomet apatinė riba pagal tuos $\epsilon$ yra lygi ribai pagal $n$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = 0.$$

Kadangi $M(C,p,\epsilon) = 0$, tai $M(C,1) = 0$.

**8.8 Teorema** *Sakykime, kad $A \subset \mathcal{R}^m$ aprėžta aibė. Tuomet egzistuoja vienintelis realus skaičius $D_H \in [0,m]$, kuriam teisinga lygybė*

$$M(A,p) = \begin{cases} \infty; & p < D_H \wedge p \in [0,\infty], \\ 0; & p > D_H \wedge p \in [0,\infty)\ . \end{cases}$$

Šios teoremos įrodymo nepateiksime.

Skaičius $D_H := D_H(A)$ vadinamas aibės $A$ H-B dimensija. Pastarasis H-B dimensijos apibrėžimas reiškia tą patį skaičių, kaip ir anksčiau pateiktasis. Paskutinioji teorema užtikrina, kad mūsų naudotas apibrėžimas turiningas.

**8.9 Teorema** *Tarkime $a \in \mathcal{R}^m$ aprėžta aibė. Tuomet šios aibė fraktalinę dimensiją $\Delta(A)$ bei H-B dimensiją $D_H(A)$ sieja nelygybės:*

$$0 \le D_H(A) \le \Delta(A) \le m.$$

$\ominus$

Tarkime $\epsilon > 0$ aibę $A$ dengiančių rutulių diametrai, o $N(\epsilon)$ jų skaičius. Tuomet

$$D(A) = \lim_{\epsilon\to 0} N(\epsilon)\cdot\epsilon.$$

Vadinasi,

$$\Delta(A)\ln\frac{1}{\epsilon}\approx \ln N(\epsilon)\Rightarrow N(\epsilon)\sim \epsilon^{-\Delta(A)}.$$

Todėl

$$N(\epsilon)\cdot\epsilon^{\Delta(A)}\sim\sum_{i\le N}\epsilon^{\Delta(A)}.$$

Žinome, kad $A_i$ parinktas taip, kad $A_i = B_i \cup A$. Taigi

$$\overline{d}(A_i)\le B_i$$

ir parinktam $\epsilon$ turime

$$M(A, D_H, \epsilon) < \infty.$$

Bet $\Delta(A)$ yra sekos riba, todėl $\epsilon > 0$ turi galioti nelygybė:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\overline{d}(A_i)\right)^p\le 1,$$

kai $p = \Delta(A)$. Jeigu suma lygi nuliui, tai $D_H(A) \le \Delta(A)$, o kitu atveju $D_H(A) = \Delta(A)$. Pabaigai pastebėkime, kad tuo atveju, kai $M(A, \Delta(A)) = 0$, tai nelygybė triviali.

$\oplus$

Tarkime, kad duotas Sierpinskio trikampis $(0,1), (0,0), (1,0)$. Įvertinkime dydį $M(\triangle, p, \epsilon)$, kai $p \in [0,1]$ įvairioms $\epsilon > 0$ reikšmėms. Tegu

$$\epsilon=\frac{\sqrt{2}}{2^n},\ n=0,1,\ldots.$$

Pastebėkime, kad šis trikampis gali būti padengtas $3^n$ diskais , kurių spinduliai lygūs $\frac{\sqrt{2}}{2^n.}$ Tada

$$M(A,p,\frac{\sqrt{2}}{2^n})=3^n\frac{(\sqrt{2})^p}{2^{np}}, n=1,\ldots.$$

Tada

$$M(\triangle,p)=\lim_{n\to\infty}(3^n(\sqrt{2})^p2^{-np}=\begin{cases}\infty, & p<\frac{\ln 3}{\ln 2},\\ (\sqrt{2})^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}, & p=\frac{\ln 3}{\ln 2},\\ 0, & p>\frac{\ln 3}{\ln 2}.\end{cases}$$

Sierpinskio trikampio fraktalinė dimensija yra lygi $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. Bet šios aibės H-B dimensija lygi

$$M(\triangle, D_H(\triangle))=\sqrt{2}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Jeigu tą patį atliktume su trikampiu $(0,0)$, $(0,\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ tai gautume, kad

$$M(\triangle_1, D_H(\triangle_1))=1.$$

Matome, kad paskutiniojo trikampio Hausdorfo dimensijos matas mažesnis už pirmojo. Bet tai reiškia, kad atraktoriai nėra metriškai ekvivalentūs.

**8.10 Teorema** *Tarkime, kad $A, B \subset \mathcal{R}^m$. Be to sakykime, kad šios aibės metriškai ekvivalenčios. Tada šių aibių Hausdorfo -Besiechovičiaus dimensijos sutampa.*

$\ominus$

Sakykime, kad $f : A \longrightarrow B$. Kadangi šios aibės metriškai ekvivalenčios, tai egzistuoja teigiamos konstantos $c_1, c_2$ tokios, kad

$$\overline{d}(f(B_1)) \leq c_1\overline{d}(B_1), \ \overline{d}(f(B_1)) \leq c_2\overline{d}(B_1).$$

Tuomet jeigu $M(A_1, p) = \infty$, tai bet kokiam aibių rinkiniui turime, kad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{d}^p(C_i) = \infty$$

Tuomet, bet kokiam aibių rinkiniui dengiančiam aibę B

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_2\overline{d}^p(C_i^0) = \infty.$$

Vadinasi,

$$M(B, p) = \infty.$$

Tarkime, kad $M(A, p) = 0$. Tuomet apatinė riba, pagal $\epsilon$ reikšmes renkamas visiems poaibiams, lygi nuliui. Taigi, bet kokiam $\delta > 0$, galime nurodyti aibių rinkinį $\{C_i\}$ tokį, kad $\overline{d}(C_i) < \epsilon$ ir $M(A, p, \epsilon) < \delta$, kai $\epsilon > 0$. Renkame aibių rinkinį, kurių diametrų suma mažesnė už $\frac{\delta}{c_1}$. Naudodamiesi aibių metriniu ekvivalentumu gauname, kad ir antrajai aibei teisinga lygybė

$$M(B, p) = 0.$$

Imdami funkcijos $f$ atvirkštinę, bei keisdami konstantų rolę tą patį atliekame ir su aibe $B$. Bet šių abiejų aibių apatinė riba lygi nuliui, o $M(A, p)$ reikšmė fiksuotai aibei yra vienintelė, taigi

$$D_H(A) = D_H(B).$$

$\oplus$

**Užduotys**

1. Sakykime, kad duota metrinė erdvė $(X, \rho)$. Be to tarkime, kad $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ ir $A \subset X$. Kam lygi aibės $A$ fraktalinė dimensija?

2. Tarkime, kad nagrinėjamoji metrinė erdvė yra Euklidinė plokštuma. Tarkime, kad aibė $A$ sudaro kokie nors 5 plokštumos taškai. Parodykite, kad šiuo atveju,

$$M(A, 0) = 7, \text{ ir } M(A, p) = 0, \ p > 0.$$

3. Tarkime, kad $A$ kokia tai begalinė, skaiti plokštumos taškų aibė. Parodykite, kad $M(A, 0) = \infty$ ir $M(A, p) = 0, p > 0$.

4. Parodykite, kad Kantoro aibei $K$ yra teisingos lygybės:

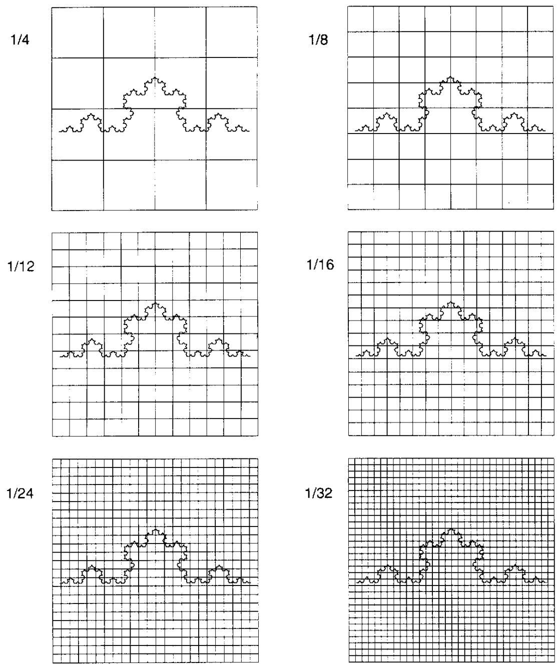
$$M(K, 0) = \infty, \ M(K, 1) = 0.$$

5. Tarkime, kad $S$ yra Sierpinskio trikampis. Įrodykite, kad $M(S, 1) = \infty$ ir $M(S, 2) = 0$. Suskaičiuokite $M(S, \ln 3/\ln 2)$.

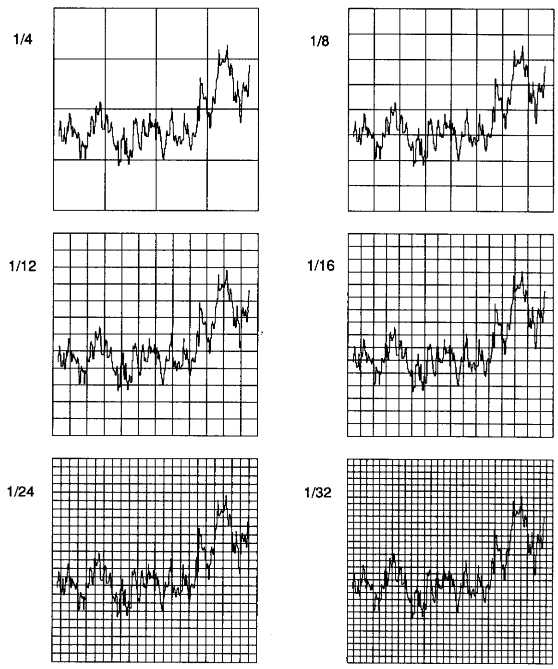
6. Naudodami 8.2 ”dėžių teoremą” apskaičiuokite 8.2 ir 8.3 pav. pateiktų kreivių fraktalines dimensijas.

7. Naudodami 8.2 pav. ’dėžes’ apytiksliai apskaičiuokite Kantoro aibės fraktalinę dimensiją.

8. Apskaičiuokite Kantoro aibės, kuri gaunama iš intervalo $[0, 1]$ išmetant vidurinį, vienetinio ilgio intervalą.




**8.2 pav.**




**8.3 pav.**