VI. JULIJAUS AIBĖS

6.1 Konvergavimo ir divergavimo aibės. Kintamo laiko algoritmas (KLA)

Tarkime, kad iteracinė seka (žr. III skyrių) konverguoja taške $z_0 \in \mathcal{C}$. Tada tašką z_0 vadinsime iteracinės sekos *konvergavimo tašku.* Aibę, sudarytą iš iteracinės sekos konvergavimo taškų vadinsime šios iteracinės sekos *konvergavimo aibe.* Konvergavimo aibę žymėsime raide K. Tašką z_0, vadinsime iteracinės sekos *divergavimo tašku,* jeigu šiame taške iteracinės sekos modulis yra neaprėžtas. Aibę, kurią sudaro iteracinės sekos divergavimo taškai, vadinsime iteracinės sekos divergavimo aibe, kurią žymėsime raide D. Tarkime, kad $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ kokia nors polinominė transformacija, kurios laipsnis didesnis už vienetą. Tada šios transformacijos konvergavimo ir divergavimo aibes žymėsime simboliais K_f ir D_f.

Apibrėžimas Aibę

$$F_f = \{z \in \mathcal{C}; \overline{\lim_{n\to\infty}} |f^n(z)| < \infty\}$$

vadinsime *pilnąja transformacijos f Julijaus (Julia) aibe.* Šios aibės sieną J_f vadinsime *transformacijos f Julijaus aibe.*

Kitais žodžiais tariant, J_f yra aibė, kuri skiria D_f ir K_f aibes.

Tegu $[a, b] \subset X$, čia X kokia nors metrinė erdvė. Tarkime, kad intervalas $f([a, b]) \subset [a, b]$, tada šį intervalą vadinsime *invariantiniu intervalu* arba tiesiog *invariantu*, transformacijos f atžvilgiu. Kitaip tariant, invariantai yra aibės K_f poaibiai. Pasirodo, kad jei stačiakampis $[a, b] \times f([a, b]) \subset [a, b] \times [a, b]$, tai intervalas $[a, b]$ yra invariantas transformacijos f atžvilgiu. Pastaroji savybė literatūroje vadinama *dėžės testu.*

Pastaba. Galima įsitikinti, kad norint rasti maksimalų, kvadratinės transformacijos $f(x) = x^2 + c$ invariantinį intervalą, pakanka rasti šios transformacijos ir tiesės $y = x$ bendrus taškus. Tada maksimalus invariantinis intervalas bus apibrėžtas bendrų taškų abscisėmis. Aišku, kad šiuo atveju invariantinis intervalas sutampa su konvergavimo aibe. Pasirodo, kad jei iteruojame apibrėžtą kvadratinę transformaciją, tai konvergavimo aibė yra susijusi, jeigu $0 \in K_f$. Jeigu $0 \in D_f$, tai šios transformacijos konvergavimo aibė yra nesusijusi.

Šiame skyriuje nagrinėsime atvaizdžių sekų (iteracinių sekų) konvergavimo bei divergavimo aibių struktūrą.

Nagrinėsime transformacijos $f(z) = z^2$ iteracinę seką. Aišku, kad šios iteracinės sekos elementai priklauso aibei

(1) $$\{z_{n+1} = z_n^2, n = 0, 1, \ldots\}.$$

Transformacija $f(z) = z^2$ kompleksinį skaičių z transformuoja į skaičių z_1 taip, kad $|z_1| = |z|^2$, o skaičiaus z_1 argumentas yra dvigubai didesnis už pirmvaizdžio z argumentą. Nesunku suprasti, kad transformacijos $f(z)$ divergavimo aibę sudaro visi kompleksiniai skaičiai, kurių moduliai didesni už vienetą. Šios transformacijos konvergavimo aibė $K_f \subset \{z \in \mathcal{C}; |z| \leq 1\}$. Pastebėsime, kad ne visus konvergavimo aibės taškus transformacija veikia vienodai. Jei taško modulis mažesnis už vienetą, tai tada šio taško riba lygi nuliui. O jei taško modulis lygus vienam, tai žinome, kad šie taškai priklauso vienetiniam apskritimui. Bet jei taškas priklauso vienetiniam apskritimui, tai nebūtinai jis priklauso transformacijos konvergavimo aibei. Pavyzdžiui, taškas $z = 1$ yra konvergavimo aibės taškas. Deja, to paties negalime pasakyti apie tašką $z = i$. Šis taškas nėra konvergavimo aibės taškas, bet kadangi iteracinė seka šiame taške yra aprėžta, tai jis nepriklauso ir divergavimo aibei. Taigi, jis priklauso transformacijos, Julijaus aibei. Atkreipsime dėmesį, kad visi kompleksinės plokštumos taškai, priklausantys vienetiniam apskritimui, yra invariantiški minėtosios transformacijos atžvilgiu, t.y. bet koks apskritimo taškas, veikiamas iteracinės sekos, pasilieka apskritime. Beje, transformacijos $f(z)$ iteracijų seka turi du nejudamus taškus: 0 ir 1. Tada $D_f = \{z \in \mathcal{C}; |z| > 1\}$, $K_f = \{z \in \mathcal{C}; |z| \leq 1, \ \{f^n(z)\} \text{ konverguoja }\}$, $F_f = \{z \in \mathcal{C}; |z| \leq 1\}$ ir $J_f = \{z \in \mathcal{C}; |z| = 1\}$.

Tarkime, kad iteracijų seka apibrėžta tokia transformacija

(2) $$f_c(z) = z^2 + c, \ c \in \mathcal{C}.$$

Matome, kad pastarąją transformaciją galime perrašyti ir taip:

$$f_c(z) = (x^2 + y^2 + c_1, 2xy + c_2), \text{ čia } c = c_1 + ic_2, z = x + iy.$$

Nesunku suprasti, kad auksčiau nagrinėtąjį atvejį atitinka paskutinioji transformacija, kai $c = 0$. Aišku, kad ši transformacija skiriasi nuo pirmosios tik tuo, kad yra atliktas plokštumos postūmis vektoriaus (c_1, c_2), kryptimi. Konvergavimo bei divergavimo aibės priklausys nuo parametro c parinkimo. Pažymėkime

$$D_c = \{z_0 \in \mathcal{C} : |f^n(z_0)| \to \infty, \text{ kai } n \to \infty\}.$$

Tada

$$K_c = \{z_0 \in \mathcal{C}; \{f^n(z_0)\} \text{ konverguoja }\}.$$

Kaip rasti divergavimo (konvergavimo) aibės elementus? Aišku, kad jei skaičių z_0 moduliai yra dideli, tai jų iteracijos diverguoja. Kaip optimizuoti šį uždavinį, t.y. nuo kokių taškų pradėti, kad veltui nešvaistytume laiko nustatant, kurie taškai priklauso divergavimo aibei. Prieš pradėdami nagrinėti šią problemą, visų pirma aptarsime metodą, kurį vadinsime *kintamojo laiko algoritmu* (trumpai KLA), kurio dėka, naudodami kompiuterinę grafiką, galėtume nurodyti taškus kompiuterio ekrane, arba popieriuje, priklausomai nuo to ar pasirinktasis taškas priklauso duotosios transformacijos f aibei D_f ar K_f.

Tarkime, kad duotas stačiakampis $W \subset \mathcal{R}^2$, kurio kairiojo apatinio kampo koordinatės yra (a, b), o dešiniojo viršutinio kampo koordinatės yra (c, d). Tegu $M \in \mathcal{N}$. Pažymėkime

$$x_{p,q} = \left(a + p\frac{(c-a)}{M}, b + q\frac{(d-b)}{M}\right),$$

čia $p, q = 0, 1, \ldots, M$. Pastarieji taškai priklauso aibei W. Kitaip tariant, šie pasirinkti taškai reprezentuoja aibę W. Mes palyginsime sekų $\{f^n(x_{p,q}), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ orbitas, kai $p, q = 0, 1, \ldots M$. Tarkime, kad R pakankamai didelis teigiamas skaičius, be to tarkime, kad R yra apskritimo, kurio centras koordinačių pradžios taške, spindulys. Apibrėžkime aibę

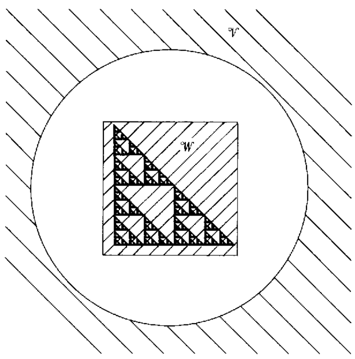
$$V = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2; x^2 + y^2 > R\}.$$

Trumpai nusakysime KLA idėją. Sakykime, kad N, bet koks natūralusis skaičius, kurį vadinsime *stabdymo skaičiumi.* Užrašykime kiekvienam taškui $x_{p,q}$ orbitą:

$$\{f^1(x_{p,q}), f^2(x_{p,q}), \ldots, f^n(x_{p,q})\},$$

kai $p, q = 0, 1, 2, \ldots, M, x_{p,q} \in W$. Beje, orbitos elementų skaičius $n \leq N$. Kitaip tariant, $n \leq N$ yra mažiausias natūralusis skaičius toks, kad $f^n(x_{p,q}) \in V$ arba, jei orbitos visi elementai priklauso aibei W, tai tada $n = N$. Ir vienu ir kitu atveju orbitos taškų skaičiavimas (taške $x_{p,q}$) yra nutraukiamas, ir skaičiuojama orbitos kitame taške, kai $n \geq N$. Be to galime susitarti, kad jei kokiam nors $n \leq N$ orbitos elementas $f^n(x_{p,q}) \in V$, tai tašką $x_{p,q}$ galime nuspalvinti pasirinkta spalva.

Pateiksime KLA taikymo pavyzdį. Tarkime, kad W yra kvadratas, kurio apatinis kairysis kampas yra koordinačių pradžios taške, o dešinysis viršutinis kampas yra taške $(1, 1)$. Tarkime, kad $M = 100, R = 200, N = 20$. Tarkime $S \subset W$ yra Sierpinskio trikampis, kaip pavaizduota 6.1 pav..

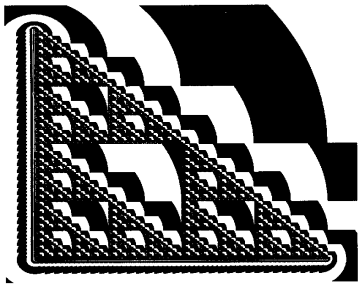


6.1 pav.

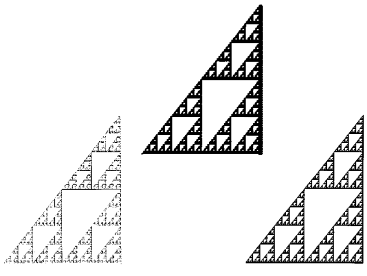
Skaičiuodami aibės S taškų orbitas, mes aibės S tašką spalvinkime juodai tada, kai iteracijų skaičius, kuomet pasiekiama aibė V, yra nelyginis arba taškų iteracijos, kai $n \leq 20$, aibės V nepasiekia. Gautas vaizdas iliustruojamas 6.2 pav..

KLA yra naudojamas IAS- mos, apibrėžtos aibėje $\mathcal{R}^2$, atraktorių grafiniam vaizdui gauti ir tuo atveju, jei nagrinėjamos aibės atraktorius yra nestabilus. (Atraktorius nestabilus, jei egzistuoja taškai, priklausantys atraktoriui, kurių orbitos diverguoja). Norint atlikti šį darbą, mums teks realizuoti tokį algoritmą:

Anksčiau minėtu būdu apibrėžkime aibes W ir V. Mes žymėsime (priskirsime atraktoriui) tik tuos taškus, kurie pasiekia aibę V "nelabai" greitai. Kaip greitai pasiekiama aibė V nusakome patys, pasirinkdami N. Jei N per didelis, tai per mažai taškų pasieks aibę V, vadinasi atraktoriaus vaizdas bus skurdus ir atvirkščiai, jei N per mažas, tai vaizdas bus labai "sodrus" ir tuo pačiu netikslus. 6.3 pav. pateikiamas Sierpinskio trikampio grafinis vaizdas, priklausomai nuo N dydžio.



6.2 pav.



6.3 pav.

KLA - mas gali būti taikomas, bet kokių atraktorių grafiniams vaizdams nustatyti. Apie tai kalbėsime kiek vėliau.

Nagrinėsime transformaciją, apibrėžtą (2) formule. Pažymėkime:

$$r(c) = \max\{|c|, 2\}.$$

Teisinga tokia

Teorema 6.1 *Kompleksinės plokštumos taškai, turintys savybę:*

$$|z| \geq r(c)$$

priklauso aibei D_c.

$\ominus$

Remdamiesi teoremos prielaidomis, gauname, kad $|z| > |c|$ ir $|z| > 2$. Vadinasi egzistuoja $\epsilon > 0$ toks, kad $|z| = 2 + \epsilon$. Tada

$$|z^2| \leq |z^2 + c| + |c|.$$

Be to,

$$|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \geq (1 + \epsilon)|z|.$$

Naudodamiesi šiomis nelygybėmis gauname, kad

$$|z_1| \geq (1 + \epsilon)|z_0|.$$

Taigi, bet kokiam $k \in \mathcal{N}$ turime, kad

$$|z_k| \geq (1 + \epsilon)^k |z_0|.$$

Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad taškas $z_0 \in D_c$.

$\oplus$

Naudodamiesi paskutiniąja teorema galime tvirtinti, kad norint nustatyti konvergavimo aibę, mums pakanka pradinius iteracinės sekos elementus rinkti iš aibės

$$Q_c = \{z_0; |z_0| \leq r(c)\}.$$

Sakykime, kad $z_0 \in Q_c$. Jei $|z_1| \geq r(c)$, tai tada $z_0 \in D_c$. Apibendrindami galime teigti, kad $z_0 \in D_c$, jei

$$\lim_{n \to \infty} z_n \geq r(c).$$

Apibrėžkime aibes

$$Q_c^{(-1)} = \{z_0; |z_1| \leq r(c)\} \ldots Q_c^{(-k)} = \{z_0; |z_k| \leq r(c)\}, k = 0, 1, \ldots.$$

Aišku, kad

$$K_c \subset \cup_{k=1}^{\infty} Q_c^{(-k)}.$$

Pavyzdžiui, tuo atveju, kai $c = 0$, tai

$$Q_c^{(0)} =: \{z_0; |z| \leq 2\}.$$

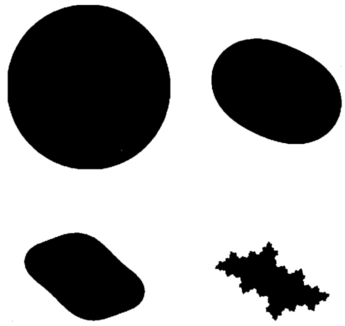
Tada

$$Q_c^{(-1)} = \{z_0; |z_0| \leq \sqrt{2}\} \ldots Q_c^{(-k)} = \{z_0; |z_0| \leq 2^{1/2^k}\}, k = 0, 1, \ldots$$

Matome, kad

$$\lim_{k \to \infty} 2^{1/2^k} = 1.$$

Tada, $K_c \subset \{z_0; |z_0| \leq 1\}$.



6.4 pav.

Pabandykime į šį darbą pajungti kompiuterį. Imkime plokštumoje kokį nors skritulį, kurio spindulys didesnis už vienetą. Tarkime, kad visi šio skritulio taškai priklauso aibei $Q_c^{(0)}$. Be to tarkime, kad pradinio skritulio taškai yra nuspalvinti juodai. Aukščiau aprašytu būdu iš apskritimo taškų sudarykime aibę $Q_c^{(-1)}$. Visus šios aibės taškus nuspalvinkime juodai. Visiems $k \in \mathcal{N}$, analogišku būdu, sudarykime aibes $Q_c^{(-k)}$. Šios aibių sekos riba yra pilnoji Julijaus aibė. Keturi šios iteracijos nariai, kai $c = -0.5+0.5i$ yra demonstruojami žemiau pateiktame 6.4 pav.. Viršuje, kairėje demonstruojama aibė $Q_c^{(0)}$, viršuje dešinėje aibė $Q_c^{(-1)}$, apačioje kairėje, aibė $Q_c^{(-2)}$, o apačioje dešinėje- $Q_c^{(-10)}$.

6.2 Teorema *Tarkime, kad $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ yra polinominė transformacija, kurios laipsnis didesnis už vienetą. Sakykime F_c yra pilnoji, transformacijos f_c, Julijaus aibė, J_c tos pačios transformacijos Julijaus aibė. Tada aibės F_c ir J_c yra netuščios, kompaktiškos kompleksinės plokštumos aibės, t.y. $J_c, F_c \in H(\mathcal{C})$. Be to, teisingas sąryšis:*

$$f(J_c) = J_c = f_c^{-1}(J_c) \text{ ir } f(F_c) = F_c = f^{-1}(F_c).$$

Aibė $V_\infty := \overline{\mathcal{C}} \setminus F_f$ yra trajektorijomis jungi.

$\ominus$

Paprastumo vardan, įrodymą pateiksime antros eilės polinomui

$$f_c(z) = z^2 + c, \ z, c \in \mathcal{C}.$$

Tarkime, kad J_c yra (2) transformacijos Julijaus aibė, o F_c pilnoji Julijaus aibė. Sakykime, kad kompleksinėje plokštumoje apibrėžta euklidinė metrika ρ_2 ir be to tarkime, kad $r > 0.5 + \sqrt{0.25 + |c|}$. Tuomet nesunku įrodyti (atlikite tai), kad visiems $z \in \mathcal{C}$, tokiems, kad $\rho(O, z) > r$ teisinga nelygybė:

$$\rho_2(O, f(z)) > \rho_2(O, z).$$

Apibrėžkime

$$V = \{z \in \mathcal{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

Tada išplaukia, kad $f(V) \subset V$. Remdamiesi 6.1 Teorema galime tvirtinti, kad visiems $z \in V$, seka $\{f^n(z)\}$ yra neaprėžta. Tuomet

$$F_c = \{z \in \overline{\mathcal{C}}; f^n(z) \notin V, \forall n \in \mathcal{N}\}.$$

Taigi, aibę F_c sudaro tie kompleksinės plokštumos taškai, kurių iteracinių sekų orbitos nekerta aibės V. Panagrinėkime tokią aibių seką:

$$V_n = f^{-n}(V), \ n \in \mathcal{N}.$$

Pastebėsime, kad V yra atvira, o transformacija $f-$ tolydi, todėl, bet kokiam natūraliąjam skaičiui n, V_n yra atvira. Be to, V_n yra jungi, kadangi trajektorijos, jungiančios bet kokį plokštumos tašką su begaliniu tašku, priklauso šiai aibei. Kadangi $f(V) \subset V$, tai išplaukia, kad $V \subset f^{-1}(V)$. Vadinasi teisingi tokie sąryšiai:

(3) $$V = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots.$$

Turime, kad bet kokiam natūraliajam skaičiui n

$$V_n := \{z \in \mathcal{C}; \{z, f^1(z), \dots f^n(z)\} \cap V \neq \emptyset\}.$$

Matome, kad aibių seką V_n sudaro tie kompleksinės plokštumos taškai, kurių $n-$ os iteracijos orbitos kertasi su aibe V. Pažymėkime

$$L_n = \overline{\mathcal{C}} \setminus V_n,\ n = 0, 1, \dots.$$

Tada aibei L_n priklauso tie kompleksinės plokštumos taškai, kurių orbitos, iki $n-$ osios iteracijos imtinai, nepasiekia aibės V, t.y.

$$L_n := \{z \in \mathcal{C}; \{z, f^1(z), \dots f^n(z)\} \cap V = \emptyset\}.$$

Be to turime, kad $L_n \neq \emptyset$ visiems $n \in \mathcal{N}$, yra kompaktiška metrinės erdvės $\overline{\mathcal{C}}$ aibė. Išspręskime lygtį

$$f(z_f) = z_f^2 + c = z_f.$$

Šios lygties sprendiniai z_f yra transformacijos f nejudami taškai. Vadinasi, šio taško orbita konverguoja į tašką z_f. Todėl bet kokiam natūraliąjam skaičiui n šis taškas nepriklauso aibei V_n, bet tada jis priklauso aibei K_f. Taigi, aibės L_n, visiems $n \in \mathcal{N}$ yra netuščios. Iš (3) sąryšių išplaukia, kad

$$L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_n \supset \dots.$$

Turime, kad seka $\{L_n\}$ yra Koši seka aibėje $H(\overline{\mathcal{C}})$. Todėl galime daryti išvadą, kad seka $\{L_n\}$ konverguoja į aibės $H(\overline{\mathcal{C}})$ elementą. Šios sekos ribinių taškų aibę sudaro taškai, kurie nesikerta su aibe V. Pažymėkime

$$F_c = \lim_{n\to\infty} L_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_n.$$

Vadinasi, $F_c \in H(\overline{\mathcal{C}})$. Iš lygybės

$$L_{n+1} = f^{-1}(L_n), n = 0, 1, \dots$$

išplaukia, kad $F_c = f^{-1}(F_c)$. Taigi, transformacija f_c yra siurfektyvi. Tad $f(F_c) = F_c$.

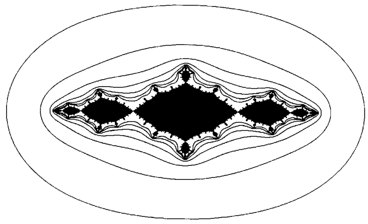
Panagrinėkime aibės F_c sieną, t.y. transformacijos f_c Julijaus aibę. Tarkime, kad z priklauso aibės F_c vidui. Kadangi transformacija f_c yra tolydi, tai išplaukia, kad taškas $f^{-1}(z)$ taip pat priklauso aibės F_c vidui. Remdamiesi tuo, kas buvo auksčiau pasakyta, gauname:

$$F_c \supset f^{-1}(\partial F_c) \supset \partial F_c.$$

Tarkime, kad $z \in f^{-1}(\partial F_c)$. Tegu $U_\delta(z)$, kuri nors taško z aplinka. Kadangi transformacija f_c yra analizinė, tai $f(U_\delta)$ yra atvira aibė ir be to $f(z) \in \partial F_c$. Taigi, aibėje $f(U_\delta)$ egzistuoja taškas, kurio orbita neaprėžta. Todėl $f^{-1}(\partial F_c) \subset \partial F_c$. Darome išvadą, kad $f^{-1}(\partial F_c) = \partial F_c$ arba kitaip tariant,

$$f(\partial F_c) = \partial F_c.$$

$\oplus$



6.5 pav.

Mes naudosime teoremoje pateiktus apibrėžimus. Turėjome, kad

$$V_\infty = \lim_{n\to\infty} V_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n.$$

Paskutinioji aibė yra vadinama polinominės transformacijos f_c, begalo nutolusių taškų, *traukos sritimi.* Ši sritis yra jungi, kadangi aibės V_n yra jungios, be to, ji atvira ir netuščia. Pastebėkime, kad $\overline{\mathcal{C}} = F_c \cup V_\infty$. Beje, aibė F_c yra kompaktiška ir netuščia.

Panagrinėkime dinaminę sistemą $(\overline{\mathcal{C}}, f_{-1.1})$. Turime, kad

$$f_{-1.1}(z) = z^2 - 1.1.$$

6.5 pav. pateiktas šios iteracinės sekos vaizdas. Tamsioji 6.5 pav. dalis vaizduoja pilnąją Julijaus aibę. Apvalūs tamsūs kontūrai atstovauja sričių V_{n+1}, V_n persidengimo sienas, o tarp šių kontūrų yra sritys $V_{n+1} \setminus V_n$. Kitaip tariant, tie patys kontūrai žymi sričių K_n sienas. Pastebėsime, kad sričiai $V_{n+1} \setminus V_n$ priklauso tų aibės V taškų orbitos, kurios gaunamos $n+1-$ oje iteracijoje.

Julijaus aibės arba pilnosios Julijaus aibės vaizdas priklauso nuo konstantos c parinkimo, tiksliau nuo jos dydžio. Jei $c \in [0,2]$, tai, kuo konstanta yra didesnė, tuo pilnoji Julijaus aibė darosi vis "skurdesnė" (kodėl?)(žr. 6.6 - 6.9 pav.), tačiau šiuo atveju visos aibės yra jungios. Padėtis tampa visai kitokia, kai $c > 2$. Šiuo atveju pilnoji Julijaus aibė yra nejungi (žr. 6.10 pav.)

Tarkime, kad duota transformacija $f(z) = z^3 - c$. Kaip turėtų sietis pradinio skritulio spindulys R, ir c, kad iteracinė funkcijų sistema galėtų generuoti Julijaus aibę, arba, kitaip tariant, kada KLA, pritaikytas IAS, "veiks"?

Tarkime, kad $z = x + iy$ ir $c = c_1 + c_2$. Nesunkiai gauname, kad

$$z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

Tada $f(z) = x_1 + iy_1$ realiosios ir menamosios reikšmės yra tokios:

$$x_1 = x^3 - 3xy^2 - c_1,\ y_1 = 3yx^2 - y^3 - c_2.$$

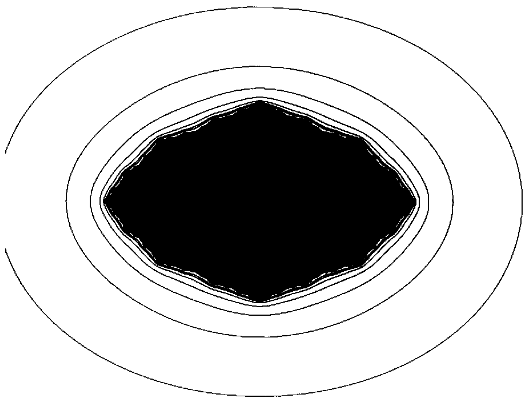
Raskime mums tinkamą spindulį R. Pažymėkime: $z = re^{i\theta}$. Tada $z^3 = r^3 e^{i3\theta}$. Be to, tegu $c = \rho e^{i\psi}$. IAS "veiks" jeigu

$$r^3 - |c| \geq r - |c| \geq r.$$

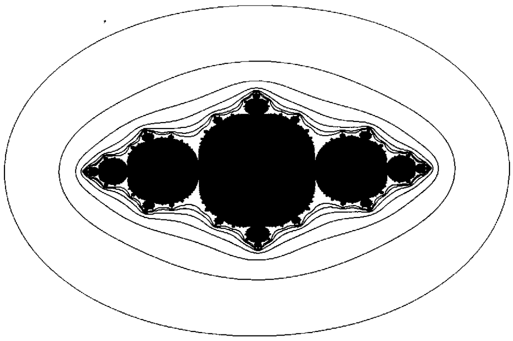
Perrašę turėsime, tokią nelygybę:

$$r^3 - r - |c| \geq 0.$$

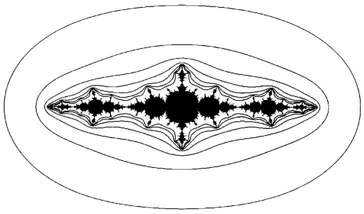
Jei parinksime $r = 1 + |c|$, tai nesunku patikrinti, kad nelygybė bus teisinga. Taigi, visiems $R > r = 1 + |c|$ IAS generuos Julijaus aibę.



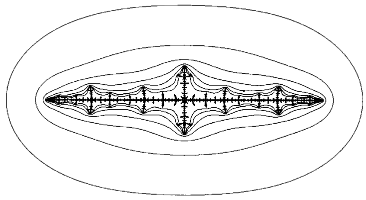
6.6 pav.



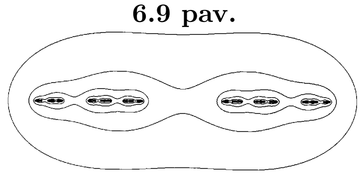
6.7 pav.



6.8 pav.



6.9 pav.



6.10 pav.

6.2 IAS, kurių atraktoriai yra Julijaus aibės

Polinominės transformacijos, bendrai paėmus, nėra spaudžiančios. Šiame skyrelyje nagrinėsime spaudžiančias IAS, kurių atraktorius- Julijaus aibė.

Praeitame skyriuje nagrinėjome tokią situaciją: aibės D taškas, kuris yra netoli Julijaus aibės, yra IAS transformuojamas į begalybę, jei jo modulis didesnis už artimiausio Julijaus aibės taško modulį. Tarkime, kad duota transformacija

$$z^2 + c = f(z).$$

Elgsimės kiek kitaip negu pirmajame skyrelyje. Raskime šios transformacijos atvirkštinį atvaizdį. Norint atlikti tai, mums teks išspręsti lygtį

$$z^2 - \omega + c = 0, \tag{4}$$

kintamojo z atžvilgiu. Kitaip tariant, rasime taško ω pirmvaizdžius, pradinės transformacijos atžvilgiu. Nesunkiai gauname, kad minėtasiais pirmvaizdžiais gali būti laikomi taškai

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{\omega - c}.$$

Manome, kad skaitytojas atkreipė dėmesį į tai, kad atvirkštinis atvaizdis $z = \omega^{-1}$ nėra funkcija, kadangi šis atvaizdis vienam kompleksiniam skaičiui ω priskiria du skaičius z_1 ir z_2. Tolimesnei iteracijai mums reikia parinkti iteruojamą tašką. Bet z reikšmės yra dvi, tad kurią pasirinkti? Aišku, kad šis parinkimas nėra griežtai determinuotas, jis tam tikra prasme atsitiktinis.

Grįžkime prie (4) lygties. Visų pirma atkreipsime dėmesį į tai, kad renkant sekančius iteracijos taškus labai svarbu nustatyti Julijaus aibės atstumiančius taškus. Šių taškų aplinkoje esantys kompleksinės plokštumos taškai, kurių modulis didesnis už Julijaus aibės taško modulį, su didele tikimybe, priklausys divergavimo aibei D_f. Ieškodami Julijaus aibės atstumiančių taškų mes turime spręsti lygtį

$$z^2 - z + c = 0.$$

Priminsime, kad atstumiantys (pritraukiantys) taškai, visų pirma tai nejudami taškai. Nesunku suprasti, kad ši lygtis sutampa su (4) lygtimi, jeigu pastarojoje vietoje w įrašome z. Kitaip tariant ieškome transformacijos

f nejudamų taškų (prisiminkime, kad IAS atraktorių sudaro šios transformacijos nejudami taškai). Tarkime, kad radome nejudamą tašką. Tada iš (4) lygties sprendinių parenkame tą, kuris yra atstumiantis arba, kuris yra arčiau atstumiančio taško. Šitokiu būdu sukonstruota seka konverguos prie Julijaus aibės (kodėl?). Beje, IAS yra spaudžianti, vadinasi Julijaus aibė yra šios IAS atraktorius. Taigi, Juliaus aibė yra invariantiška transformacijos $w \to \sqrt{w-c}$ atžvilgiu.

Konkretizuokime aukščiau išdėstytus samprotavimus. Tarkime, kad c koks nors fiksuotas kompleksinės plokštumos elementas. Kyla klausimas, kaip rasti IAS $\{\overline{\mathcal{C}}, f_c = z^2 - c\}$ divergavimo aibę? Norėdami tai nustatyti skaičiuojame šios transformacijos atvirkštinį atvaizdį ir randame

$$f_c^{-1}(z) = \{\sqrt{z+c}, -\sqrt{z+c}\}.$$

Tarkime, kad $z = x_1 + ix_2$. Tada $\sqrt{z} = \sqrt{x_1 + ix_2} = (a(x_1, x_2); b(x_1, x_2)))$, čia $x_1 = x + c_1,\ x_2 = y + c_2$.

Pastebėkime, kad

$$a^2(x_1, x_2) = r\cos(\xi/2) = \frac{r}{2}\big(1 + \cos\xi\big) = \frac{r}{2}\big(1 + \frac{x_1}{r}\big)$$

ir

$$b^2(x_1, x_2) = r\sin(\xi/2) = \frac{r}{2}\big(1 - \cos\xi\big) = \frac{r}{2}\big(1 - \frac{x_1}{r}\big)$$

čia $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ir $\xi = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$. Tada gauname, kad

$$a(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1}{2}}, \text{ jei } \ x_1 \geq 0,$$

$$a(x_1, x_2) = -\sqrt{\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1}{2}}, \text{ jei } \ x_1 < 0,$$

$$b(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}{2}}, \text{ jei } \ x_2 \geq 0, \quad b(x_1, x_2) = -\sqrt{\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}{2}}, \text{ jei } \ x_2 < 0.$$

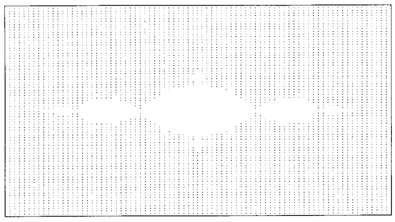
Panagrinėkime IAS

$$\{\overline{\mathcal{C}}, \omega_1(z) = \sqrt{z+c}, \omega_2(z) = -\sqrt{z+c}\}. \tag{5}$$

Kaip jau anksčiau esame pastebėję, šios IAS atraktorius yra transformacijos $f_c(z)$ Julijaus aibė. Tarkime, kad ekrane apibrėžta koordinačių sistema

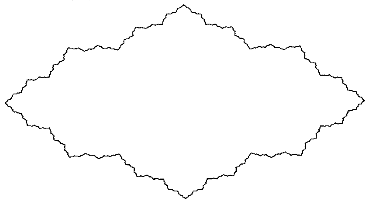
$$\{z = (x, y); x \in [-2, 2], y \in [-2, 2]\}.$$

6.11 pav. iliustruojama, kurie taškai priklauso transformacijos $f_c(z)$ divergavimo, o kurie konvergavimo aibei. Balta sritis yra šios transformacijos pilnoji Julijaus aibė, o baltosios srities siena, yra (5) IAS Julijaus aibė.

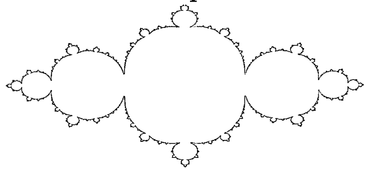


6.11 pav.

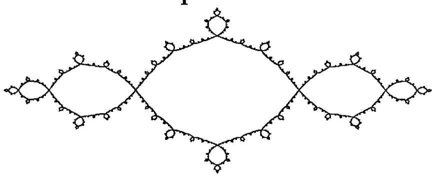
6.12-6.14 pav. iliustruoja, kaip atrodo (5) IAS atraktorius, skirtingoms $c \in [0, 1]$ reikšmėms.



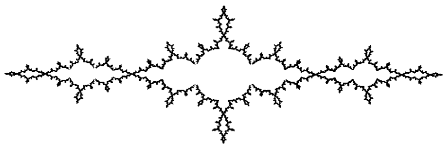
6.12 pav.



6.13 pav.



6.14 pav.



6.15 pav.

Žemiau pateiktoje teoremoje apibendrinsime ankstesnius svarstymus.

6.3 Teorema *Tegu $c \in \mathcal{C}$. Tarkime, kad dinaminė sistema $\{\overline{\mathcal{C}}, f(z) = z^2 - c\}$ turi kokį nors pritraukiantį ciklą $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset \mathcal{C}$. Tegu $\epsilon > 0$ bet koks laisvai pasirinktas skaičius. Pažymėkime raide X Rymano sferos taškų aibę, kurią sudaro $(p+1)$ atvirų rutulių, kurių spinduliai lygūs ϵ, sąjungai. Pareikalaukime, kad aukščiau minėto ciklo taškai būtų kurių nors rutulių centrai, o vieno iš šių rutulių centras yra šiaurės poliaus taškas. Apibrėžkime IAS tokiu būdu:*

$$\{X; \omega_1(z) = \sqrt{z+c}, \omega_2(z) = -\sqrt{z+c}\}.$$

Sukonstruokime transformaciją W fraktalų erdvėje H(X) tokiu būdu:

$$W(B) = \omega_1(B) \cup \omega_2(B),\ B \in H(B).$$

Tada ši transformacija yra tolydi, hausdorfo metrikoje. Be to atvaizdis $W : H(X) \to H(X)$ turi vienintelį nejudamą elementą J_f, kuris yra transformacijos f Julijaus aibė. Be to, galioja

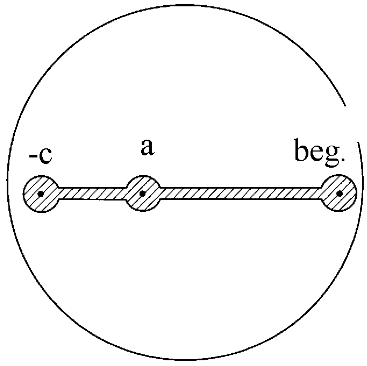
$$\lim_{n\to\infty} W^n(B) = J_f,\ B \in H(X).$$

Paskutinysis ribinis sąryšis teisingas ir tuo atveju, kai iteracijų sekos $\{f^n(O)\}$ orbita konverguoja į begalo nutolusį tašką, o aibė X yra tokia $X = \overline{\mathcal{C}} \setminus B(\infty, \epsilon)$. Paskutiniosios teoremos neįrodinėsime.

Priminsime, kad kompleksinė plokštuma ir Rymano sfera yra homeomorfinės metrinės erdvės.

Pastebėsime, kad paskutinioji teorema teisinga bet kokiai polinominei transformacijai, kurios laipsnis didesnis už vienetą.

Kiek plačiau panagrinėsime spaudžiančias IAS, kurių atraktoriai yra Julijaus aibės. Tarkime, kad $c \in (-0.25, 0.75)$ ir $a = 0.5 - \sqrt{0.25 + c}$ yra atstumiantis transformacijos $f_c(z) = z^2 - c$ taškas.



6.16 pav.

Bet kokiam fiksuotam, mažam $\epsilon > 0$, pažymėkime:

$$X^0 = \overline{\mathcal{C}} \setminus \{B^0(a, \epsilon) \cup B^0(\infty, \epsilon), \cup(0, \infty)\}.$$

Aibė X^0 nėra kompaktiška. Prie šios aibės prijunkime taškus 0 ir ∞ aplenkiančią kreivę (kaip pavaizduota 6.16 pav.). Gautąją aibę pažymėkime X. Pasirodo, kad IAS

$$\{X; \omega_1(z) = +\sqrt{z + c}, \omega_2(z) = -\sqrt{z + c}\} \tag{6}$$

yra spaudžianti, jei $c \in (-0.25, 0.75)$. Šios transformacijos atraktorius - Julijaus aibė, kuri gaunama iteruojant taško a aplinkos, kaip parodyta 6.16 pav., taškus. Kodėl spaudžianti IAS yra įdomi šiuo atveju? Aptarsime ši fenomeną kiek plačiau. Visų pirma atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad (6) atvaizdis yra dinaminės sistemos

$$\{X; f_c(z)\}$$

atvirkštinis atvaizdis ir be to taškas a yra šios dinaminės sistemos pritraukiantis taškas. Pažymėkime:

$$X_n = \omega_{i_1} \circ \omega_{i_2} \circ \ldots \circ \omega_{i_n}(X),$$

čia $i_j \in \{1, 2\}, j = 1, \ldots, n$.

Pažymėkime $e = (i_1, i_2, \ldots i_n, \ldots) \in \Sigma$, čia $i_j \in \{1, 2\}$. Yra žinoma, kad $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \psi(e)$ ir

$$\bigcup_{e \in \Sigma} \psi(e) = J_c.$$

T.y. jei IAS spaudžianti, tai tada J_c taškams gali būti priskirti adresų aibės elementai.

Sutarkime, kad jei $i_j = 1$, tai šio simbolio vietoje rašysime $+$, jeigu $i_j = 2$, tai jo vietoje rašysime $-$. Tada (6) IAS Julijaus aibės J_c tašką galime užrašyti taip:

$$\psi(e) = i_1\sqrt{ci_2\sqrt{ci_3\sqrt{ci_4 \ldots i_n\sqrt{c \ldots}}}}.$$

Vadinasi, jei IAS spaudžianti ir turi aukščiau išvardintas savybes, tai J_c taškai gali būti randami žemiau pateikta formule:

$$\pm\sqrt{c\pm\sqrt{c\pm\sqrt{c\pm\ldots\pm\sqrt{c\ldots}}}}.$$

Kitaip tariant, bet kokia $+$ ir $-$ kombinacija apibrėžia aibės J_c tašką. Iš paskutiniosios lygybės matome, kad nesunkiai galime rasti IAS periodinius taškus. Pavyzdžiui taškas

$$+\sqrt{c-\sqrt{c+\sqrt{c-\ldots+\sqrt{c-\ldots}}}}$$

yra antros eilės ciklo periodinis taškas. Praeitame skyriuje esame kalbėję, kad spaudžiančios IAS atraktoriuje periodiniai taškai sudaro visur tirštą poaibį. Vadinasi, norint nubraižyti šios transformacijos Julijaus aibę, pakanka brėžinyje žymėti periodinius taškus.

6.3 Julijaus aibės ir Niutono metodas

Tarkime, kad duotas polinomas $F(z) = z^4 - 1,\ z \in \mathcal{C}$. Žinoma, kad šis polinomas kompleksinių skaičių aibėje turi keturis nulius, t.y. egzistuoja taškai $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{C}$ tokie, kad $F(a_i) = 0,\ i = 1, 2, 3, 4$. Beje, nesunkiai galime nustatyti, kad šie polinomo nuliai yra tokie skaičiai: $1, -1, i, -i$. Jei polinomo išraiška bendresnė, tuomet rasti nulius nėra taip paprasta. Niutono metodu galime rasti apytikslius polinomo nulius. Sakykime, kad duota dinaminė sistema

$$\Big\{\overline{\mathcal{C}}; f(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)}\Big\}.$$

Transformacija $f(z)$ vadinama funkcijos $F(z)$ *Niutono transformacija.* Niutono metodo esmė- tinkamai parinkę pradinį tašką $z_0 \in \mathcal{C}$ pasiekti, kad seka $\{f^n(z_0)\}$ konverguotų į funkcijos $F(z)$ nulį. Funkcijos $F(z) = z^4 - 1$ Niutono transformacija yra

$$f(z) = \frac{3z^4 + 1}{4z^3}. \tag{7}$$

Taigi, mes tikimės, kad paėmę kokį nors tašką z_0, kuris yra arti tikėtino nulio a_i, gausime, kad

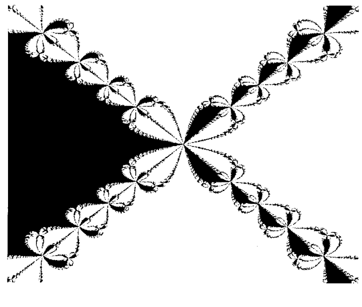
$$\lim_{n\to\infty} f^n(z_0) = a_i. \tag{8}$$

Tačiau kas atsitinka, jeigu taškas z_0 yra pakankamai toli nuo visų nulių? O gal (8) seka konverguoja į artimiausią nulį? O gal apskritai niekur?

Bandydami atsakyti į šį klausimą, pasinaudosime KLA- mu. Tarkime, kad z_0 yra bet koks išplėstinės kompleksinės plokštumos taškas. Naudodami KLA, pabandykime rekonstruoti taško z_0 orbitą, kuri konverguoja į tašką -1. Apibrėžkime $W = \{(x, y) \in \mathcal{C}; x, y \in [-2, 2]\}$ ir $V = \{z \in \mathcal{C}; |z + 1| \leq 0.0001\}$. Turime, kad

$$f(x + iy) = x_1 + iy_1,$$

čia realioji ir menamoji dalys randamos sutvarkius (7) lygybę. Naudodami KLA (parinkę parametrus M, N) ir kt. gausime tokį vaizdą (žr. 6.17 pav.).



6.17 pav.

Šios srities siena yra (7) transformacijos Julijaus aibė. Juodai žymimi tie $z \in W$, kurių orbitos aibę V pasiekia atlikus ne daugiau negu $N = 1000$ iteracijų.

Pastebėsime šiuo atveju, kad transformacijos D_f nėra kreivėmis susijusi.

Racionaliosios funkcijos $f : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$, kurios laipsnis didesnis už vienetą, Julijaus aibę sudaro dinaminės sistemos $\{\overline{\mathcal{C}}, f\}$ atstumiančiųjų, periodinių taškų uždarinys.

(7) transformacijos pilnąją Julijaus aibę sudaro visi plokštumos taškai, kuriems (8) ribinis sąryšis negalioja. 6.17 paveiksle J_f yra siena, skirianti skirtingų spalvų sritis. Pastebėsime, kad J_f papildinį sudaro keturios atviros sritys, kurios yra keturių nulių $(1, -1, i, -i\ )$ traukos sritys.

Mes nurodėme kompleksinės plokštumos sritį, kurios taškai priklauso aibei J_f. Tačiau įsivaizduoti šią aibę labai sunku. Kiek aukščiau esame aptarę galimybę, kaip galima rasti transformacijos Julijaus aibes. Tarkime, kad duota (7) lygtis. Žinome, kad atraktoriaus taškas yra invariantiškas transformacijos atžvilgiu. Todėl raskime visus taškus, kuriems teisinga lygybė $z = (3z^4 + 1)/4z^3$. Arba $3w^4 - 4zw^3 + 1 = 0$. Išsprendę šią lygtį mes gauname keturis nulius. Taigi

$$f^{-1}(z) = \{\omega_1(z), \omega_2(z), \omega_3(z), \omega_4(z)\}.$$

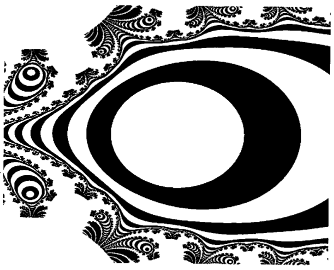
Tada, Julijaus aibė yra IAS

$$\{\overline{\mathcal{C}}; \omega_i,\ i = 1, 2, 3, 4\}$$

atraktorius, beje, jis vienintelis IAS nejudamas taškas. Šio tvirtinimo neįrodysime. Jis įrodomas analogiškai kaip ir 6.3 Teorema.

Tarkime, kad duota funkcija $F(z) = e^z - 1$. Raskime dinaminės sistemos $(\overline{\mathcal{C}}, f)$ pritraukiančius taškus, bei taikydami KLA, pateikime šios dinaminės sistemos grafinį vaizdą.

Visų pirma rasime šios funkcijos Niutono transformaciją. Nesunkiai gauname, kad $f(z) = (z-1) + e^{-z}$. Raskime šios transformacijos nejudamus taškus. Turime, kad $z = (z-1) + e^{-z}\ \Rightarrow e^{-z} = 1\ \Rightarrow z = 0$. Be to $\lim\limits_{z\to\infty} (z-1) + e^{-z} = \infty$. Taigi, ši transformacija turi du nejudamus taškus: 0 ir ∞. Niutono transformacijos išvestinė yra lygi $f'(z) = 1 - e^{-z}$. Priminsime, kad taškas yra pritraukiantysis arba atstumiantysis, priklausomai nuo išvestinės absoliutinės reikšmės dydžio šiame taške. Kadangi išvestinės reikšmė taške $z = 0$ yra lygi nuliui, tai šis taškas yra pritraukiantysis. Išvestinės reikšmė taške ∞ lygi 1, vadinasi šis taškas yra neutralus fiksuotas taškas. 6.18 pav. pateikiamas transformacijos $f(z) = e^z - 1$ grafinis vaizdas, gautas pritaikius KLA. Beje, $W = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2; x, y \in [-2, 5,\ 2, 5]\}$.



6.18 pav.

6.4 Invariantinės aibės- galimi fraktalų šaltiniai

Tarkime, kad f kokia nors metrinės erdvės X transformacija. Aibę $A \subset X$ vadiname invariantine, transformacijos f atžvilgiu, jeigu $f^{-1}(A) = A$. Mes domėsimės fraktalų erdvės invariantinėmis, kokios nors transformacijos f atžvilgiu, aibėmis. Teisinga tokia

6.4 Teorema *Tarkime, kad (Y, d) kokia nors metrinė erdvė. Tegu $X \subset Y$ kompaktiška ir netuščia aibė. Be to, tarkime, kad $f : X \to Y$ yra tolydus atvaizdis, turintis savybę $f(X) \supset X$. Apibrėžkime*

$$W(A) = f^{-1}(A), \; A \in H(X).$$

Tada W yra fraktalų erdvės $H(X)$ transformacija, t.y. $W : H(X) \to H(X)$.

Transformacijos W nejudamas taškas $A \in H(X)$, apibrėžiamas tokiu būdu:

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X) = \lim_{n\to\infty} W^n(X).$$

Papildomai pareikalaukime, kad $f(O)$ yra metrinės erdvės $(f(X), d)$ atvira aibė, jei $O \subset X$ yra atvira metrinės erdvės (X, d) aibė. Tada W yra tolydi metrinės erdvės $(H(X), h(d))$ transformacija į save pačią.

$\ominus$

Visų pirma parodysime, kad W yra fraktalų erdvės $H(X)$ atvaizdis į save pačią. Tarkime, kad $B \in H(X)$. Kadangi $f(X) \supset X$, tai $f^{-1}(B) \subset X$, be to, $f^{-1}(B)$ yra netuščia. B yra kompaktiška, taigi ir uždara metrinės erdvės (X, d) aibė. Kadangi atvaizdis f yra tolydus, tai ir $f^{-1}(B)$ taip pat uždara. Remdamiesi prielaidomis turime, kad $f^{-1}(B) \subset X$. Kadangi $f^{-1}(B)$ yra metrinės erdvės (X, d) uždara aibė, o X kompaktiška, tai aibė $f^{-1}(B)$ taip pat kompaktiška. Taigi parodėme, kad apibrėžtoji transformacija atvaizduoja fraktalų erdvę į save pačią.

Parodysime, kad šios transformacijos nejudamas taškas apibrėžiamas teoremoje nurodytu būdu. Pastebėsime, kad iš sąryšio $f(X) \supset X$ išplaukia $f(X) \supset f^{-1}(X)$. Nesunku suprasti, kad

$$X \supset f^{-1}(X) \supset f^{-2}(X) \supset \ldots \supset f^{-n}(X) \supset \ldots.$$

Taigi, $\{f^{-n}(X)\}$ yra Koši seka erdvėje $H(X)$. Kadangi fraktalų erdvė pilna, tai šios sekos ribinis taškas $A \in H(X)$. Taigi,

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X) = \lim_{n\to\infty} W^n(X).$$

Mums teliko parodyti, kad A yra transformacijos W nejudamas taškas. Kitaip tariant įsitikinsime lygybės teisingumu

$$f^{-1}(\bigcap_n A_n) = \bigcap_n A_n,$$

čia $A_n = f^{-n}(X), \; n = 1, \ldots.$

Remdamiesi atvaizdžio f tolydumu gauname, kad

$$f^{-1}(\bigcap_n A_n) = \bigcap_n f^{-1}(A_n) = \bigcap_n A_{n+1} = \bigcap_n A_n.$$

$\oplus$

Remiantis paskutiniąja teorema, invariantinę aibę galime apibrėžti tokiu būdu:

$$A = \{x \in X : f^n(x) \in X, \, n = 1, 2, \ldots\}.$$

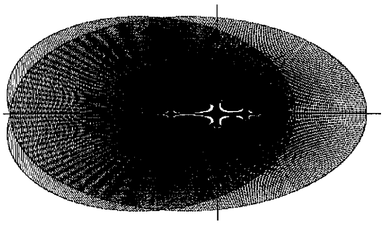
Vadinasi, aibę A sudaro visi tie metrinės erdvės X taškai, kurių orbitos nepalieka erdvės X. Tokias aibes galime grafiškai nustatyti naudodami KLA.

Paskutinioji teorema mums suteikia galimybę transformaciją W, apibrėžtą fraktalų erdvėje, pavaizduoti grafiškai. Jei transformacija W nėra tolydi, bet seka $\{W^n(A_0)\}$ konverguoja į tašką $A_0 \in H(X)$, tai negalime padaryti išvados, kad $W(A_0) = A_0$. Ir tuo pačiu, jei transformacija nėra tolydi, tai KLA neduoda patikimo rezultato. Taigi norėdami modeliuoti kokias nors, biologines, fizikines, chemines ir t.t. sistemas ir tikėdamiesi gauti patikimus rezultatus, turime naudoti tolydžius atvaizdžius.

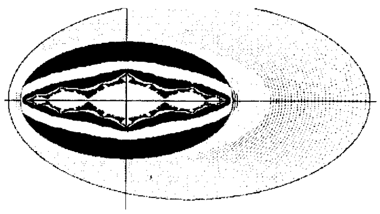
Tarkime, kad transformacija $f(z)$ apibrėžta tokiu būdu:

$$f(z) = \begin{cases} z^2 - 1, \ x > 0 \\ z^2 - 1 + \lambda x, \ x \leq 0, \end{cases}$$

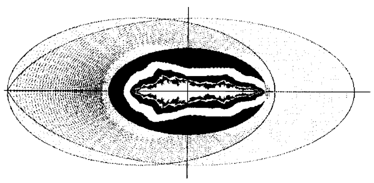
čia $z = x + iy$. 6.19 , 6.20, 6.21 pav. iliustruoja KLA taikymo atvejus, kai $\lambda = 1, 0, -1$, atitinkamai. Beje, visais atvejais, invariantinės aibės yra centre.



6.19 pav.



6.20 pav.



6.21 pav.

Uždaviniai

1. Tarkime, kad duota transformacija $f(x) = x^2 + c$. Raskite šios transformacijos ir tiesės $y = x$ susikirtimo taškus. Nurodykite invariantinį intervalą.

2. Intervalas $[0, 1]$ yra transformacijos $f(x) = ax(1 - x)$, $\quad 1 \leq a \leq 4$ konvergavimo aibė. Raskite šio intervalo vaizdą, kai $a = 1, 2, 3, 4$.

3. Tarkime, kad duota transformacija $f(z) = z^2 + c$. Tarkime $c = 0.55 + 0.15i$. Raskite taško $(-1, 1)$ iteracijos penkis žingsnius.

4. Nustatykite, ar taškas 0 priklauso transformacijų $f(z) = z^2 + i$, $\quad f(z) = z^2 + (-1 - i)$ konvergavimo ar divergavimo aibėms. Pateikite gauto rezultato komentarą.

5. Naudodami kompiuterinę grafikąm raskite transformacijos $f(z) = z^2 + \lambda$, kai $\lambda = 1, 4; 1, 6; 1, 8$ Julijaus aibes.

6. Raskite transformacijos $f(z) = z^2 - 1$ nejudamus taškus. Naudodami skaičiuotuvą nustatykite kurie iš žemiau pateiktų taškų priklauso šios transformacijos konvergavimo, o kurie divergavimo aibėms:

$$(0,0), \quad (-1,0), \quad (0,0.7), \quad (0,0.8).$$

7. Raskite transformacijos $f(z) = x^2 + 3,5$ invariantinį intervalą.

8. Raskite transformacijos $f(x) = 2(0.5 - |x - 0.5|)$ konvergavimo bei divergavimo intervalus metrinėje erdvėje $([0,1], \rho(x,y) = |x - y|)$.

9. Raskite transformacijų

$$F(z) = z^3 - 4, \; F(z) = \sin^2 z, \; F(z) = z^5 + z$$

Niutono transformacijas, bei pastarųjų nejudamus taškus.