III. TRANSFORMACIJOS

3.1 Transformacijos realiųjų skaičių aibėje.

Apibrėžimas *Tarkime, kad* (X,ρ) *metrinė erdvė. Tuomet funkciją* $f : X \longrightarrow X$ *vadinsime erdvės transformacija į save pačią.*

Erdvės transformaciją $f : X \longrightarrow X$ vadinsime *tapačiąja*, jeigu visiems $x \in X$, $f(x) = x$. Ateityje tapačiąją transformaciją žymėsime $f^{\circ}(x) = x$.

Tarkime, kad $f : X \longrightarrow X$. Tada transformacijų seką

$$f^{(\circ)}(x) = x, f^{(1)}(x) = f(x), f^{(2)}(x) = f(f(x)), \ldots, f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x)), \ldots$$

vadinsime *iteracine transformacijų seka*. $n-$ ąją iteraciją vadinsime $n-$ uoju iteracijos (sekos) nariu. Jeigu transformacija apverčiama (kokios sąlygos turi būti išpildytos!), tai tada *atvirkštinę transfor- macijų seką* apibrėžiame tokiu būdu:

$$f^{(-1)}(x) = f^{-1}(x), \ldots f^{(-m)}(x) = (f^{(m)})^{-1}(x),\ m = 1, 2, \ldots.$$

Siūlome skaitytojui įrodyti tokį teiginį:

Sakykime, kad transformacija $f : X \longrightarrow X$ *apverčiama. Tada* $f^m \circ f^n = f^{(m+n)}$.

Pateiksime kelis transformacijų pavyzdžius.

Sakykime, kad transformacija $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ apibrėžta lygybe $f(x) = ax, a > 0, x \in \mathcal{R}$. Suraskime $f^{(n)}(x), n \in \mathcal{N}$. Nesunku matyti, kad ši transformacija apverčiama. Be to $f^{(n)}(x) = a(a \ldots (ax)) = a^n x$.

Prisiminkime Kantoro aibę C. Ši aibė yra intervalo $[0,1]$ poaibis. Tikimės, skaitytojas prisimena, kad minima aibė yra, žemiau pateiktų aibių, sekos riba:

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots,$$

čia

$$I_0 = [0,1], I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \ldots.$$

Taigi, aibė $C = \cap_{n=0}^{\infty} I_n$. Akivaizdu, kad ši aibė netuščia. Apibrėžkime šioje aibėje transformaciją $f : C \longrightarrow C$ tokiu būdu: $f(x) = x/3$. Matome, kad ši transformacija- injekcija. Parodysime, kad ši transformacija nėra siurjekcija. Iš pastarojo teiginio išplauks, kad ji neapverčiama. Iš pradžių įsitikinsime, kad jei $x \in C$, tai $f(x) \in C$. Pastebėkime, kad jeigu $x \in C$, tai x yra arba intervalo

$$\left[\frac{2^m 3^m}{3^k}, \frac{2^m 3^m + 1}{3^k}\right],$$

arba intervalo

$$\left[\frac{3^n - 1}{3^k}, \frac{3^n}{3^k}\right]; n, m, k \in \mathcal{N}$$

sieninis taškas. Bet tuomet transformacijos $f(x) = x/3$ reikšmės priklauso šių intervalų sieninių taškų aibei. Taigi $f \in C$. Ši transformacija yra injekcija, nes skirtingus taškus vaizduoja į skirtingus, tačiau ji nėra siurjekcija, nes $f(x) = 1 \in C$, kai $x = 3 \notin C$. Taigi, yra taškų aibėje C, kurie nėra kitų šios aibės taškų vaizdai.

Transformaciją $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, apibrėžtą lygybe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

čia $a_i, i = 1, \ldots, n,\ a_n \neq 0$, vadinsime $n-$ ojo laipsnio polinomu, arba $n-$ *ojo laipsnio polinomine transformacija*. Pastebėsime, kad jeigu $A \subset \mathcal{R}$ koks nors intervalas, tai polinomine transformacija šį intervalą galime "tampyti" arba "lankstyti". Prisiminkime, kad bet koks $n-$ ojo laipsnio polinomas gali turėti ne daugiau kaip n realių šaknų. Tarkime, kad polinomas turi realią šaknį. Tada geometriškai interpretuojant, polinominės transformacijos grafikas kerta $x-$ų ašį šioje šaknyje. Todėl norėdami duotąjį intervalą "sulankstyti" į $n-$ dalių (bangų) turime apibrėžti transformaciją, turinčią $n+1$ šaknį šiame intervale. Pavyzdžiui transformacija

$$f(x) = x(x-0.3)(x-0.6)(x-0.9)(x-1),$$

intervalą $[0,1]$ "sulanksto" į keturias dalis. Jeigu $f, g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ dvi polinominės transformacijos, kurių laipsniai m, ir n atitinkamai, tai jų kompozicija $f \circ g$ irgi polinominė transformacija, kurios laipsnis $m+n$. (Įrodykite !) Atkreipsime dėmesį į tai, kad jei polinominės transformacijos laipsnis $n > 1$, tai bendruoju atveju ji nėra apverčiama. Norint tai įrodyti pakanka nagrinėti atvejį $n = 2k,\ k \in \mathcal{N}$.

Transformaciją $f : \overline{\mathcal{R}} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}$, apibrėžtą lygybe

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ a, b, c, d, \in \mathcal{R},\ ad \neq bc,$$

vadinsime *trupmenine arba Miobuso transformacija.* Jeigu $c \neq 0$ tai $f(-d/c) = \infty$ and $f(\infty) = a/c$. Jei $c = 0$, tai $f(\infty) = \infty$. Ši transformacija yra atskiras daug bendresnės transformacijos, kurią nagrinėsime kiek vėliau, atvejis.

3.2 Transformacijos erdvėje $\overline{\mathcal{C}}$.

Panašiai kaip ir realiųjų skaičių aibė, kompleksinių skaičių aibė taip pat nėra uždara. Papildžius ją vienu tašku, kurį žymėsime ∞ ir kurio prasmė, tikimės, skaitytojui žinoma, mes gausime uždarą aibę, kurią ir vadinsime išplėstine kompleksine plokštuma. Šią aibę žymėsime simboliu $\overline{\mathcal{C}}$.

Tarkime trimatėje erdvėje, kurioje apibrėžta ortogonali Dekarto koordinačių sistema, koordinatines ašis žymime raidėmis ξ, η, ζ eilės tvarka. Bet kokį erdvės tašką žymėsime simboliu (ξ, η, ζ). Tarkime, kad koordinatinę plokštumą ξ, η sutapatinome su kompleksine plokštuma ir be to pareikalaukime, kad η sutaptų su menamąja ašimi. Tarp kompleksinių skaičių ir plokštumos taškų egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis. Dėl šios priežasties kompleksiniai skaičiai ir plokštumos taškai gali būti tapatinami. Apibrėžkime sferą lygtimi:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

Šią erdvės taškų aibę vadinsime Rymano sfera. Nesunku įsitikinti, kad Rymano sferos centro koordinatės $(0, 0, \frac{1}{2})$, o spindulys lygus $\frac{1}{2}$. Pabandykime išsiaiškinti taško ∞ prasmę, tiksliau sakant vietą, kompleksinių skaičių aibėje. Rymano sferos tašką $S(0,0,0)$ pavadinkime pietų poliumi, o tašką $N(0,0,1)$ šiaurės poliumi. Tarp erdvės $\mathcal{C}$ elementų (tuo pačiu ir tarp plokštumos ξ, η taškų) ir Rymano sferos taškų apibrėžkime bijekciją, tokiu būdu: bet kokį plokštumos tašką Z sujunkime tiese su sferos tašku N. Šios tiesės ir sferos susikirtimo tašką P_z vadinsime taško $Z(x, y)$ stereografiniu vaizdu. Užrašykime tiesės, kuriai priklauso taškai N, Z lygtį:

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}.$$

Iš pastarosios lygties gauname, kad

$$\begin{cases} \xi = xk, \\ \eta = yk, \\ \zeta = 1 - k, \end{cases}$$

čia $k \in \mathcal{R}$. Įrašę šias reikšmes į sferos lygtį, nesunkiai suskaičiuojame, $k_1 = 0$, ir $k_2 = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Aišku, kad $k_1 = 0$ tai gauname šiaurės polių atitinkančio taško koordinates, o antroji parametro k_2 reikšmė atitinka susikirtimo taško P_z koordinates. Naudodamiesi k_2 reikšme, iš paskutiniosios sistemos gauname, kad

$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{x^2+y^2+1}, \\ \eta = \frac{y}{x^2+y^2+1}, \\ \zeta = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}, \end{cases}$$

o iš pastarųjų išplaukia, kad

$$\begin{cases} x = \frac{\xi}{1-\eta}, \\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}. \end{cases}$$

Šie sąryšiai ir nusako abipus vienareikšmę atitiktį, tarp plokštumos ir sferos taškų. Tačiau kaip jau pastebėjome, taškui N nėra priskiriama jokio plokštumos $\mathcal{C}$ taško. Priskirkime šiam taškui abstraktų simbolį ∞, kurį vadinsime begaliniu tašku. Papildykime kompleksinę plokštumą šiuo tašku: $\overline{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \cup \{\infty\}$. Tokiu būdu papildytą kompleksinę plokštumą ir vadinsime išplėstine plokštuma. Naudodami jau žinomą homeomorfizmo savoką galime teigti, kad išplėstinė kompleksinė plokštuma homeomorfinė Rymano sferai. Paminėsime vieną stereografinių vaizdų savybę. Kompleksinės plokštumos apskritimų bei tiesių stereografiniai vaizdai yra apskritimai. Beje, tiesių stereografiniai vaizdai yra apskritimai, kuriems priklauso taškas N.

Tarkime, kad $f : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$. Išplėstinės plokštumos kintamąjį žymėsime raide z, o funkcijos reikšmes $f(z)$ arba w. Pažymėkime $\Delta z = z - z_0$. Pastarąjį skirtumą vadinsime argumento pokyčiu taške z_0. Tada *funkcijos pokyčiu* taške z_0 vadinsime skirtumą:

$$\Delta w := f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Apibrėžimas *Baigtinę santykio*

$$f'(z_0) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

ribą, jeigu ji egzistuoja, vadinsime funkcijos $f(z)$ išvestine taške z_0.

Jeigu aibės $D \subset \overline{\mathcal{C}}$ visuose taškuose funkcija f turi išvestinę, tai tuomet šią funkciją vadinsime *analizine aibėje* D.

Tarkime, kad funkcija turi išvestinę taške z_0. Tuomet santykis $\Delta w / \Delta z$ parodo, kiek taško z_0 aplinką "iškreipia" funkcija, ją transponuodama. Jeigu išvestinės modulis didesnis už vienetą, tai taško z_0 aplinką funkcija f ištempia, jeigu modulis tarp vieneto ir nulio, tai aplinka suspaudžiama.

Kampu tarp kreivių, jų susikirtimo taške, yra vadinamas kampas tarp šių kreivių liestinių tame taške. Funkciją f vadinsime *pirmojo tipo konforminiu* (arba tiesiog konforminiu) vaizdavimu aibėje D, jeigu bet kokiame šios aibės taške kampai tarp kreivių išlieka tokie patys ir funkciją vadinsime antrojo tipo konforminiu vaizdavimu, jeigu kampai tarp kreivių vaizdų absoliučia verte yra tie patys, bet kampo orientacija yra priešinga pradiniam kampui. Tarkime, kad nagrinėjamos kreivės, bet kokiame taške, turi liestines.

Transformaciją $T : \overline{\mathcal{R}} \longrightarrow \overline{\mathcal{R}}$, apibrėžtą tokiu būdu:

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \neq \frac{-d}{c}, \\ \infty, & z = \frac{-d}{c}, \\ \frac{d}{c}, & z = \infty, \end{cases}$$

vadinsime *tiesine trupmenine arba Miobuso transformacija*. Jos atvirkštinė transformacija nusakoma lygybe:

$$z = T^{-1}(w) = \begin{cases} -\frac{dw+b}{cw-a}, & w \neq \frac{a}{c}, \\ \frac{-d}{c}, & w = \infty, \\ \infty, & w = \frac{a}{c}, \end{cases}$$

kuri taip pat tiesinė trupmeninė transformacija. Pastebėsime, kad jeigu

$$ad - bc = 0,$$

tai $T(z)$ transformacija visą išplėstinę plokštumą atvaizduoja į tašką. Nesunku matyti, kad ši transformacija tolydi visoje išplėstinėje plokštumoje, išskyrus tašką $-d/c$. Be to

$$\lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}, \ c \neq 0.$$

Tuo atveju kai $c = 0$ gauname $T_0(z) = az + b$. Ši funkcija vadinama *tiesine transformacija.* Tada, kai $d = a = 0$ transformaciją

$$T_1 = \frac{b}{z},$$

vadinsime *trupmenine*. Beje, nesunku matyti, kad tiesinė trupmeninė transformacija yra tiesinės ir trupmeninės transformacijų kompozicija. Tiesinė trupmeninė turi išvestinę bet kokiame išplėstinės plokštumos taške, kuri baigtinė ir nelygi nuliui, išskyrus tašką $-d/c$. Ši išvestinė lygi

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Yra žinoma, (žr. bet kokį kompleksinio kintamojo vadovėlį) kad analizinė funkcija yra konforminis vaizdavimas srityje D, jeigu visuose šios srities taškuose šios funkcijos išvestinė nelygi nuliui. Taigi, tiesinė trupmeninė transformacija yra komforminis vaizdavimas, beje, ji konforminis vaizdavimas netgi taškuose ∞ ir $-d/c$.

Pateiksime dar kai kurias šios transformacijos savybes.

1) Transformacija T, bet kokią išplėstinės plokštumos tiesę arba apskritimą atvaizduoja į tiesę arba apskritimą atitinkamai.

2) Tarkime, kad $T(z_1) = w_1,\ T(z_2) = w_2,\ T(z_3) = w_3$. Tada teisingas sąryšis

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Pastaroji savybė dažnai naudojama, kai norime rasti transformacijos analizinę formą, žinodami trijų taškų vaizdus.

3) Tarkime, kad taškai z ir z^* yra simetriški tiesės arba apskritimo atžvilgiu. Tada taškai $T(z)$ ir $T(z^*)$ simetriški tiesės arba apskritimo, kur pastarieji yra tiesės ir apskritimo vaizdai, atitinkamai.

Kiek plačiau panagrinėkime atskirą tiesinės transformacijos atvejį, būtent

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}, \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

Ši transformacija tolydi visur išskyrus tašką 0 ir turi atvirkštinę, kuri apibrėžiama taip:

$$h^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{1}{w}, & w \in \mathcal{C} \setminus \{0\}, \\ \infty, & w = 0 \\ 0, & w = \infty. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad $|w| = 1/|z|$, arg$w$ = -arg$z, z \neq 0$. Ši transformacija vienetinį apskritimą atvaizduoja į vienetinį, o tašką $z = e^{i\alpha}$ į tašką $w = e^{-i\alpha}$. Vienetinio skritulio vidaus taškus atžvaizduoja į vaizdo skritulio išorę. Tarkime duotas apskritimas $z = re^{i\alpha} + r_0e^{i\psi_0}$. Tada nagrinėjamoji transformacija šį apskritimą, kurio spindulys r, o centras taške (r_0, ψ_0) atvaizduoja į tokį apskritimą:

$$w = \frac{r}{r^2 - r_0^2}e^{i\alpha} + \frac{r_0}{r_0^2 - r^2}e^{-i\psi_0}, \alpha \in [0, 2\pi].$$

Beje, trupmeninė funkcija apskritimą,

$$z = re^{i\alpha} + r_0e^{i\psi_0}, \alpha \in [0, 2\pi],$$

kuriam priklauso koordinačių pradžios taškas, atvaizduoja į tiesę $w = te^{-i(\psi_0 + \frac{\pi}{2})} + (1/2r)e^{-i\psi_0},\ t \in \mathcal{R}$.

Taigi, Miobuso transformacija tiesę, kuriai nepriklauso koordinačių pradžios taškas, atvaizduoja į apskritimą, kuriam priklauso minėtasis taškas. Tuo tarpu jei tiesei priklauso koordinačių pradžios taškas, tai jos vaizdas irgi tiesė, kuriai priklauso koordinačių pradžios taškas.

Nagrinėtoji transformacija yra abipus vienareikšmiška taigi, bet kokie du skirtingi taškai turi skirtingus vaizdus. Kompleksinė analizinė funkcija, turinti savybę $z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$, vadinama *vienalape*.

Funkciją vadinsime *daugialape* nagrinėjamoje aibėje, jeigu bet kokiam taškui z_1 galime surasti bent vieną tašką $z_2 \neq z_1$ tokį, kad $f(z_1) = f(z_2)$. Tašką z_0 vadinsime daugialapės funkcijos *šakojimosi tašku*, jeigu negalime nurodyti taško $z_0 \neq z_1$ tokio, kad būtų teisinga lygybė: $f(z_0) = f(z_1)$. Daugialapę funkciją vadinsime $n-$ lape jeigu, bet kokiam aibės taškui z_1, išskyrus šakojimosi taškus, galime nurodyti $n-1$ šios aibės taškus z_i (visus skirtingus) tokius, kad

$$f(z_1) = f(z_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Kitaip tariant, jeigu funkcija f yra $n-$lapė aibėje C, tai galime nurodyti tokį šios aibės padalijimą į poaibius $C = \bigcup_{k=1}^{n} C_k,\ C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$, kad šiuose poaibiuose teisingas sąryšis: jei $z_1 \neq z_2 \in C_i$, tai $f(z_1) \neq f(z_2)$. Panagrinėkime funkciją $w = f(z) = z^2$. Pastarąją funkciją perrašykime taip:

$$f(z) = |z|^2 e^{2i\arg z}.$$

Tuomet kompleksinę plokštumą galime išskaidyti tokiu būdu:

$$\mathcal{C} \setminus \{0\} = \{\mathrm{Im} z > 0\} \cup \{\mathrm{Im} z < 0\} = C_1 \cup C_2.$$

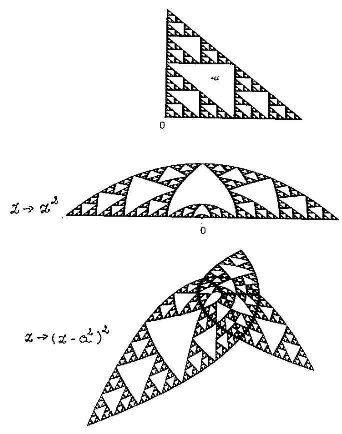
Matome, kad ši funkcija taškus $0, \infty$ atvaizduoja į taškus $0, \infty$, atitinkamai. Be to, $w_1 = f(C_1) = \mathcal{C} \setminus \{0\}, w_2 = f(C_2) = \mathcal{C} \setminus \{0\}$ ir šie abu atvaizdžiai yra bijekcijos, kitaip tariant, bet kurioje šioje srityje funkcija $f(z)$ yra vienalapė. Išsprendę lygtį $z^2 = w$, kintamojo z atžvilgiu gauname, kad:

$$z = \sqrt{w_k} = \sqrt{|w_k|} \exp\left\{ i \left(\frac{arg w + 2\pi k}{2} \right) \right\},\ k = 0, 1.$$

Vienareikšmes funkcijas, aprašytas paskutiniosiomis formulėmis, vadiname *dvireikšmės funkcijos vienareikšmėmis šakomis*. Šios šakos yra analizinės kompleksinėje plokštumoje, išskyrus tašką $w = 0$. Pradinės funkcijos šakojimosi taškai 0 ir ∞. Tarkime, kad duota funkcija $w = z^n, n \in \mathcal{N}$. Tada ši funkcija turi n atvirkštinių funkcijų, kurios atskirai paėmus, savo apibrėžimo sritį abipus vienareikšmiškai atvaizduoja į kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką 0. Taigi, $n-$ reikšmės funkcijos vienareikšmės šakos yra tokios:

$$z = |w_k|^{\frac{1}{n}} \exp\left\{ i \left(\frac{arg w + 2\pi k}{n} \right) \right\},\ k = 0, 1 \ldots, n-1.$$

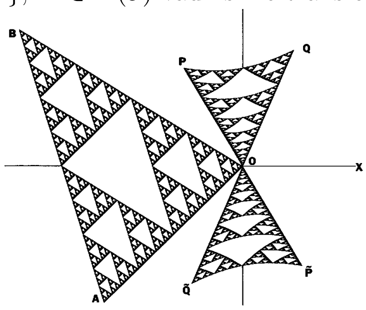
Transformacija $f(z) = 3z + 1,\ z \in \mathcal{C}$, yra panašumo transformacija. Ji apskritimą, kurio centras taške z_0, atvaizduoja į apskritimą, kurio centras taške $3z_0 + 1$, o spindulys tris kart didesnis.



3.1 pav.

Trasformacija $f(z) = (3 + 3i)z + (1 - 2i)$, apskritimą pasuka 45^0 kampu, be to padidina (kiek?) ir apverčia. 3.1 pav. demonstruojama, kaip trasformacijos $f(z) = z^2$ ir $f(z) = (z - a^2)^2$ transformuoja Sierpinskio trikampį.

Tarkime, kad $f : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$ yra analizinė, transformacija, $f(\overline{\mathcal{C}}) = \overline{\mathcal{C}}$. Tada sąryšį
$f^{-1}(A) = \{\omega \in \overline{\mathcal{C}} : f(\omega) \in A\},\ A \in H(\overline{\mathcal{C}})$ vadinsime transformacijos f atvirkštiniu atvaizdžiu.



3.2 pav.

Taigi, atvirkštinis atvaizdis, fraktalų erdvę atvaizduoja į save pačią. Pavyzdžiui, žemiau pateiktame paveiksle matome, kaip transformacijos $f = z^2$ atvirkštinis atvaizdis f^{-1}, Sierpinskio trikampį AOB atvaizduoja į trikampius POQ ir $\widetilde{P}O\widetilde{Q}$.

3.3 Tiesinės algebros bei analizinės geometrijos sąvokos

Apibrėžimas *Stačiakampę realiųjų skaičių lentelę, kurioje m eilučių bei n stulpelių vadinsime $m \times n$ eilės matrica ir žymėsime,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matricą vadinsime *kvadratine*, jeigu jos eilučių ir stulpelių skaičius sutampa.

Sakysime, kad dvi matricos lygios, jeigu yra tos pat eilės ir atitinkami jų elementai lygūs. Matricas žymėsime arba didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, arba simboliais $(a_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Beje, kai žinome kokios eilės matricas nagrinėjame, arba kai eilė nesvarbi, tai indeksų i, j kitimo aibės nenurodysime.

Tos pat eilės matricų aibėje apibrėšime daugybos iš skaičiaus, bei sudėties operacijas. Tarkime, kad $r \in \mathcal{R}$. Tada skaičiaus ir matricos sandauga yra tokia matrica :

$$r(a_{ij}) = (ra_{ij}).$$

Matricų (a_{ij}) ir (b_{ij}) suma vadinsime matricą

$$(a_{ij} + b_{ij}).$$

Matricą O vadinsime *nuline*, jeigu visi jos elementai lygūs nuliui.

Sakykime, kad duota matrica $A = (a_{ij})$. Tada šios matricos *transponuotąja matrica* A^T vadinsime matricą (a_{ji}). Kitaip tariant, atliekant transponavimo operaciją matricos eilutes keičiame vietomis su stulpeliais. Taigi, transponavimas $m \times n$ eilės matricą paverčia $n \times m$ eilės matrica. Aišku, kvadratinių matricų aibė uždara transponavimo operacijos atžvilgiu. Daugybos operacija apibrėžiama ir tarp skirtingos eilės matricų tokiu būdu: sakykime, kad (a_{ij}) yra $m \times n$ eilės matrica, o (b_{jl}) $n \times s$ eilės matrica. Tada šių matricų sandauga vadinama $m \times s$ eilės matrica (c_{il}), kurios elementai skaičiuojami tokiu būdu:

$$c_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl};\ i = 1, \dots, m, l = 1, \dots, n.$$

Nesunku suprasti, kad kvadratinių matricų aibė ypatinga tuo, kad ši aibė uždara ir daugybos operacijos atžvilgiu, t.y. daugindami dvi kvadratines matricas gauname tos pat eilės kvadratinę matricą. Kiek plačiau panagrinėkime šią matricų aibę. Kvadratinę matricą

$$E := (\delta_{ij}),\ \ \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i, \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

vadiname *vienetine*. Paminėsime keletą svarbių matricų veiksmų savybių.

$$1)A(B+C)=AB+AC.\ 2)A+(B+C)=(A+B)+C.\ 3)(AB)^T=B^TA^T.$$

Tarkime, kad A, B dvi kvadratinės matricos. Tada bendru atveju $AB \neq BA$.

Matricą M^{-1} vadinsime atvirkštine matricai M, jeigu $M^{-1}M = MM^{-1} = E$.

Tarkime, kad $A-$ antros eilės kvadratinė matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Tada šios matricos determinantu det A vadinsime tokį skaičių: det $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Trečios eilės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantu vadinsime skaičių :

$$\mathrm{det}A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Pasirodo, kad būtina ir pakankama atvirkštinės matricos (pradinei) egzistavimo sąlyga yra tokia: pradinės matricos determinantas nelygus nuliui.

Tarkime, kad duota kvadratinė matrica A. Simboliu D_{ij} pažymėkime matricą, kuri gaunama iš pradinės pašalinus $i-$ąją eilutę ir $j-$ąjį stulpelį. Tada skaičių

$$A_{ij} = (\mathrm{det}D_{ij})(-1)^{i+j}$$

vadinsime matricos A $i-$osios eilutės ir $j-$ojo stulpelio *adjunktu*. Mūsų poreikiams pakaks ne aukštesnės negu trečios eilės matricų, todėl ir kalbėdami apie matricas ar determinantus tai turėsime omenyje.

Jeigu, pvz., trečios eilės matricos A determinantas nelygus nuliui tai, kaip jau minėjome, ši matrica turi atvirkštinę, kuri skaičiuojama tokiu būdu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{det}A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Matricos *pėdsaku* vadinsime skaičių $trA := \sum_i a_{ii}$.

Matricą, kurios eilė $n \times 1$, vadinsime $n-$mačiu vektoriumi, o matricą $1 \times n$, $n-$mačiu vektoriumi stulpeliu. Nesunku suprasti, kad transponavus $n-$matį vektorių gauname $n-$matį vektorių stulpelį. Paprastai priimta, $n-$ mačio vektoriaus elementus skirti kableliais, o pačius elementus vadinti vektoriaus koordinatėmis. Vektorius žymėsime mažosiomis graikiškos abėcėlės raidėmis. Dabar aptarsime keletą veiksmų tarp vektorių turinčių tą pačią eilę (vektorius- tai matrica).

Skaičių $\alpha \circ \beta = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, vadinsime vektorių *skaliarine sandauga*.

Vektoriaus ilgiu vadiname skaičių $|\alpha| = \sqrt{\alpha \circ \alpha}$. Kampo x tarp vektorių α ir β kosinusu vadinsime skaičių

$$\cos x = \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{|\alpha| \circ |\beta|}.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia svarbi išvada: jei abu vektoriai nenuliniai, tada jie statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

$n-$mačių vektorių aibę, kurioje apibrėžtos vektorių lygybės, sudėties, ir daugybos iš skaičiaus operacijos, vadiname erdve $\mathcal{R}^n$. Jeigu šioje erdvėje apibrėšime metriką, tai šią erdvę vadinsime metrine vektorine erdve. Jeigu erdvėje apibrėžta skaliarinė sandauga, tai metriką galime nusakyti taip:

$$\rho(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|.$$

Tarkime, kad erdvėje $\mathcal{R}^n$ duotas vektorių rinkinys $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Tada šio rinkinio tiesiniu dariniu vadinsime vektorių:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i. \tag{1}$$

Sakysime, kad vektorių rinkinys $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tiesiškai nepriklausomas*, jeigu tiesinis darinys (1) lygus nuliniam vektoriui tada ir tik tada, kai $c_i = 0$. Priešingu atveju sakysime, kad darinys tiesiškai priklausomas. Bet kokioje vektorinėje erdvėje maksimalus tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius yra baigtinis ir jis vadinamas vektorinės erdvės *dimensija*. Dar daugiau, bet kokį erdvės vektorių galime išreikšti $n-$ tiesiškai nepriklausomų vektorių tiesiniu dariniu. Šis $n-$nepriklausomų vektorių rinkinys vadinamas erdvės baze. Dažnai naudojamas bazės pavyzdys yra toks:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1).$$

Tarkime, kad $\alpha = (2, 3, 5, 4)$. Tada matome, kad

$$\alpha = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 + 4e_4,$$

čia visi paskutinieji vektoriai erdvės $\mathcal{R}^4$ elementai. Nesunku suprasti, kad koks bebūtų vektorius α, jis gali būti užrašytas šių vektorių tiesiniu dariniu.

Žinoma, kitoje bazėje tas pat vektorius bus užrašomas tiesiniu dariniu su kitais koeficientais (koordinatėmis), tačiau toje pat bazėje vektoriaus koordinatės nusakomos vieninteliu būdu. Jau esame minėję, kad toliau mes domėsimės erdvėmis, kurių dimensijos ne didesnės už 3. Vektorių vadinsime vienetiniu, jeigu jo ilgis lygus vienam. Vienetinius vektorius mes vadinsime ortais. Minėtose erdvėse, tarpusavyje statmenus ortus, prisilaikydami bendrų žymėjimų, žymėsime taip: $\overrightarrow{\mathbf{i}} = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{\mathbf{j}} = \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{\mathbf{k}} = \overrightarrow{e_3}$.

Geometriniu vektoriumi vadinsime tiesės atkarpą, su nurodytąja kryptimi. Taigi, vektorius erdvėje apibrėžia kryptį ir "daugybė" atkarpų, turinčių tą pačią kryptį ir ilgį reiškia tą patį vektorių, t.y., du vektoriai lygūs, jei jų kryptys sutampa ir ilgiai vienodi. Taip apibrėžto vektoriaus atkarpos pradžios tašką vadinsime vektoriaus pradžios tašku, o tašką, kuriame nurodoma kryptis - pabaigos tašku. Kitaip tariant du vektoriai lygūs, kai vektorius nusakančių atkarpų ilgiai vienodi ir kryptys sutampa. Vektorius vadinsime kolineriniais, jeigu juos nusakančios atkarpos lygiagrečios. Sakysime, kad vektoriai komplanariniai, jei jie nėra kolineriniai ir yra vienoje plokštumoje. Sutarkime geometrinį vektorių žymėti graikiškosios abėcėlės mažosiomis raidėmis, su rodykle viršuje .

Vektoriaus ir skaičiaus sandauga $c\overrightarrow{\alpha}$ vadinsime vektorių $\overrightarrow{\gamma}$, kurio ilgis skiriasi nuo pradinio vektoriaus ilgio c vienetų (t.y. c kartų ilgesnis, jei $|c| > 1$ ir c kartų trumpesnis , jei $|0 < c < 1|$ be to $\overrightarrow{\gamma}$ kryptis ta pati kaip ir pradinio vektoriaus jei $c > 0$ ir priešinga, jei $c < 0$. Laikome $c \neq 0$.

Šių vektorių aibėje sudėties operaciją nusakome tokiu būdu: norėdami sudėti du vektorius, mes abu dėmemis perkeliame į vieną tašką, atlikdami lygiagretų postūmį erdvėje. Šių dviejų vektorių pagrindu nubrėžiame lygiagretainį (jei vektoriai nekolinerūs). Tada šių vektorių suma vadinsime vektorių, kurio pradžios taškas sutampa su dėmenų pradžios tašku, o pabaigos taškas yra priešingoje lygiagretainio viršūnėje. Jei vektoriai kolinerūs ir tos pat krypties, tai jų suma yra vektorius, kurio ilgis lygus dėmenų ilgių sumai, o kryptis tokia pat kaip ir dėmenų. Jeigu vektorių kryptis priešinga, tuomet jų suma vadinsime vektorių, kurio ilgis lygus vektorių ilgių skirtumui, o šio vektoriaus kryptis sutampa su vektoriaus, kurio ilgis didesnis, kryptimi.

Vektorių $\overrightarrow{\alpha}$ ir $\overrightarrow{\beta}$ skirtumu vadinsime vektorių $\overrightarrow{\alpha}$ ir $-\overrightarrow{\beta}$ sumą. Manome, kad skaitytojas nesunkiai galėtų įrodyti tokias vektorių veiksmų savybes: $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\alpha} + (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}) = (\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) + \overrightarrow{\gamma}$. Be to, jeigu $m, n \in \mathcal{R}$, tai $(m+n)\overrightarrow{\alpha} = m\overrightarrow{\alpha} + n\overrightarrow{\alpha}, m(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}) = m\overrightarrow{\alpha} + m\overrightarrow{\beta}$, bei $m(n\overrightarrow{\alpha}) = (mn)\overrightarrow{\alpha}$.

Geometrinį vektorių $\overrightarrow{\alpha}_0$ vadinsime vektoriaus $\overrightarrow{\alpha}$ ortu, jeigu jo kryptis tokia pat kaip ir vektoriaus $\overrightarrow{\alpha}$, o šio vektoriaus ilgis lygus vienetui. Geometrinio vektoriaus ilgį žymėsime tokiu pat būdu, kaip ir bet kokio vektoriaus t.y. $|\overrightarrow{\alpha}|$. Akivaizdu, kad bet kokį vektorių galime užrašyti tokiu būdu: $\overrightarrow{\alpha} = |\overrightarrow{\alpha}|\overrightarrow{\alpha}_0$. Vektorių $\overrightarrow{\alpha}$ ir $\overrightarrow{\beta}$ skaliarine sandauga, kurią žymėsimė $\overrightarrow{\alpha} \circ \overrightarrow{\beta}$, vadinsime skaičių, kuris lygus vektorių ilgio ir kampo tarp jų kosinuso reikšmės sandaugai.

Tarkime duoti du vektoriai, $\overrightarrow{\alpha}$ ir $\overrightarrow{\beta}$. Tada skaičių $\overrightarrow{\alpha} \circ \overrightarrow{\beta}_0$ vadinsime vektoriaus $\overrightarrow{\alpha}$ projekcija vektoriaus $\overrightarrow{\beta}$ kryptimi. Priminsime, kad $\overrightarrow{\beta}_0$ yra vektoriaus $\overrightarrow{\beta}$ ortas.

Tarkime, kad vektoriai $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ yra komplanariniai plokštumos vektoriai. Tada bet kokį vektorių $\overrightarrow{\gamma}$ galime užrašyti tokiu būdu: $\overrightarrow{\gamma} = m\overrightarrow{\alpha} + n\overrightarrow{\beta}$, kur m, n yra vektoriaus $\overrightarrow{\gamma}$ projekcijos vektorių $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ kryptimi, atitinkamai. Jeigu $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ - nesantys vienoje plokštumoje erdvės vektoriai, tai bet kokiam erdvės vektoriui $\overrightarrow{\delta}$ teisinga lygybė:

$$\overrightarrow{\delta} = k\overrightarrow{\alpha} + l\overrightarrow{\beta} + m\overrightarrow{\gamma}, \tag{2}$$

kur k, l, m yra vektoriaus $\overrightarrow{\delta}$ projekcijos vektorių $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ kryptimis atitinkamai.

Tris nekomplanarius erdvės vektorius, kurie prasideda tame pat taške vadinsime reperiu. Paskutiniosios lygybės dėka, nemažindami bendrumo galime laikyti, kad reperį sudarantys vektoriai yra ortai. Pažymėkime šiuos ortus raidėmis $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Iš lygybės (2) išplaukia, kad bet kokį erdvės vektorių galime užrašyti naudojant vektorius $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Be to, jeigu $\overrightarrow{\delta_1} = k_1\overrightarrow{e_1} + l_1\overrightarrow{e_2} + m_1\overrightarrow{e_3}$, o $\overrightarrow{\delta_2} = k_2\overrightarrow{e_1} + l_2\overrightarrow{e_2} + m_2\overrightarrow{e_3}$, tai

$$\overrightarrow{\delta_1} + \overrightarrow{\delta_2} = (k_1 + k_2)\overrightarrow{e_1} + (l_1 + l_2)\overrightarrow{e_2} + (m_1 + m_2)\overrightarrow{e_3}$$

ir

$$k\overrightarrow{\delta_1} = kk_1\overrightarrow{e_1} + kl_1\overrightarrow{e_2} + km_1\overrightarrow{e_3}.$$

Nesunku suprasti, kad analogiškas savybes turi ir plokštumos vektoriai. Priskirkime geometriniam vektoriui $\overrightarrow{\delta}_1$ jo projekcijas į vektorius $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ tokiu būdu: $\overrightarrow{\delta}_1 = (k_1, l_1, m_1)$. Nesunku suprasti, kad teisingas ir atvirkščias veiksmas - bet kokiam realių skaičių rinkiniui (k, l, m) mes galime priskirti vienintelį geometrinį vektorių tokiu būdu: $\overrightarrow{\delta}_1 := k\overrightarrow{e_1} + l\overrightarrow{e_2} + m\overrightarrow{e_3}$. Vadinasi tarp erdvės ir nagrinėtosios vektorinės erdvės $\mathcal{R}^3$ elementų egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis. Todėl ateityje mes nebeskirsime vektorių nuo geometrinių vektorių, nors vartodami sąvoką vektorius, omenyje turėsime geometrinį vektorių.

Natūralu reperį vadinti erdvės baze, kadangi bet kokį vektorių galime užrasyti (2) tiesiniu dariniu, o vektoriaus projekcijos reperio vektorių kryptimi, bus jo koordinatėmis bazėje.

Pateiksime nelabai vykusį matematiniu požiūriu, bet skaitytojui lengviau suvokiamą dešininės orentacijos sąvoką. Sakysime, kad reperis $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}$ turi dešininę orientaciją, jeigu vektoriaus $\overrightarrow{\gamma}$ kryptis yra tokia, kad stovint reperio vektorių bendrame taške, vektoriaus $\overrightarrow{\gamma}$ kryptimi, vektorius $\overrightarrow{\alpha}$ yra dešinėje, o $\overrightarrow{\beta}$ kairėje pusėje. Kitu atveju sakysime, kad sistema kairinė.

Vektorių $\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}$ vektorine sandauga vadinsime vektorių $\overrightarrow{\gamma}$, kurio ilgis lygus vektorių $\overrightarrow{\alpha}$ ir $\overrightarrow{\beta}$ sudaryto lygiagretainio plotui, be to jis statmenas šio lygiagretainio plokštumai ir orientuotas taip, kad reperis $\overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ turi dešininę orientaciją. Žymėsime šią sandaugą taip: $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}$.

Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad $|\overrightarrow{\gamma}| = |\overrightarrow{\alpha}||\overrightarrow{\beta}|\sin\xi$, čia ξ kampas tarp vektorių $\overrightarrow{\alpha}$ ir $\overrightarrow{\beta}$.

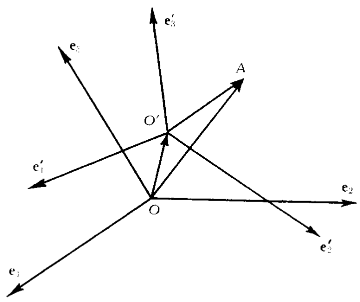
Tarkime, kad $\overrightarrow{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$ duotos vektorių koordinatės reperyje $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. Tada

$$\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

3.4 Afininės transformacijos.

Šiame skyrelyje nurodysime bendras formules, kurios sieja taško arba vektoriaus koordinates skirtinguose reperiuose (koordinačių sistemose).

Tarkime duoti du reperiai $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ ir $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$. Sakykime, kad pirmojo reperio pradžios taškas O, antrojo - O'. Be to taško O' (tuo pačiu ir vektoriaus $\overrightarrow{OO'}$) bei vektorių $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \overrightarrow{e_3'}$ koordinatės pirmąjame reperyje nusakomos tokių lygčių pagalba:



3.3 pav.

$$(3) \qquad \begin{cases} \overrightarrow{OO'} = x_0\overrightarrow{e}_1 + y_0\overrightarrow{e}_2 + z_0\overrightarrow{e}_3, \\ \overrightarrow{e}'_1 = a_1\overrightarrow{e}_1 + b_1\overrightarrow{e}_2 + c_1\overrightarrow{e}_3, \\ \overrightarrow{e}'_2 = a_2\overrightarrow{e}_1 + b_2\overrightarrow{e}_2 + c_2\overrightarrow{e}_3, \\ \overrightarrow{e}'_3 = a_3\overrightarrow{e}_1 + b_3\overrightarrow{e}_2 + c_3\overrightarrow{e}_3. \end{cases}$$

Rasime taškų koordinačių keitimo formules. Tarkime, kad bet kokio taško A koordinatės pirmąjame (toliau sakysime senąjame) reperyje yra x, y, z ir to paties taško koordinatės antrąjame (toliau naująjame) yra x', y', z'. Vadinasi

$$(4) \qquad \overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{e}_1 + y\overrightarrow{e}_2 + z\overrightarrow{e}_3, \;\; \overrightarrow{O'A} = x'\overrightarrow{e}_1 + y'\overrightarrow{e}_2 + z'\overrightarrow{e}_3.$$

Turime, kad

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}.$$

Įstatę į šią lygybę dydžių iš (3) ir (4) reikšmes ir sulyginę koordinates prie senojo reperio vektorių gauname lygybes tarp koordinačių senąjame ir naująjame reperiuose. Šias koordinates sieja tokios lygybės:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z' + x_0, \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z' + y_0, \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z' + z_0. \end{cases}$$

Šios lygtys ir vadinamos koordinačių keitimo (transformacijos) formulėmis.

Kadangi reperio vektoriai nekomplonarūs, tai paskutinioji lygčių sistema turi vienintelį sprendinį ir tuo pačiu, mes galime vienas koordinates išreikšti kitomis. Perfrazavus kitaip, (5) lygčių turi vienintelį sprendinį, jei sistemos determinantas nelygus nuliui.

Panagrinėkime kai kuriuos atskirus atvejus. Jeigu naujasis reperis $\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3$ yra gaunamas iš senojo lygiagrečiu postūmiu, tarkime į tašką (x_0, y_0, z_0) tai tada bet kokio taško koordinatės naujoje ir senoje sistemose siejamos tokiu būdu:

$$(6) \qquad x = x' + x_0, \;\; y = y' + y_0, \;\; z = z' + z_0.$$

Tuo atveju, kai reperių pradžios taškai sutampa, tai postūmio vektorius lygus nuliui. Vadinasi (5) sistema tampa tokia

$$(7) \qquad \begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z'. \end{cases}$$

Pažymėkime:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{e'}} = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}.$$

Tada (3) sistemą trumpai galime perrašyti taip:

$$\overrightarrow{\mathbf{e'}} = \mathbf{A}\overrightarrow{e}.$$

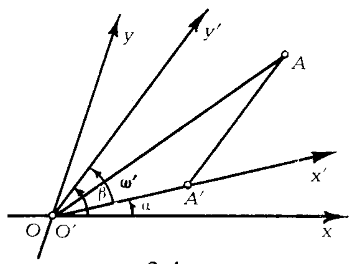
Be tom (7) ir (5) koordinačių keitimo sistemos, atitinkamai, bus tokios:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Plokštumos atvejis visiškai analogiškas, tik šiuo atveju visos trečiosios koordinatės lygios nuliui.

Panagrinėkime vieną gana įdomų atvejį, t.y. kai vienas nestatmenų vektorių koordinatinis reperis keičiamas į bet kokį kitą reperį. Būtų pravartu prisiminti, kad laužtės projekcija lygi jos atskirų dalių projekcijų sumai. Tarkime, kampas tarp reperio vektorių lygus ω. Be to vektorius $\overrightarrow{OX}$ su koordinatine Ox-ašimi sudaro kampą α. Tuomet naudodamiesi sinusų teorema galime užrašyti tokius sąryšius:

$$\begin{cases} OX_{prx} = OX\frac{\sin(\omega-\alpha)}{sin\omega}, \\ OX_{pry} = OX\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} \end{cases}.$$



3.4 pav.

Tarkime, kad senojo ir naujojo koordinatinių reperių pradžios taškai sutampa. Tegu kampas tarp senojo koordinatinio reperio vektorių lygus ω, naujojo - ω'. Be to α kampas tarp vektorių e_1, e'_1, o β kampas tarp e_1, e'_2 vektorių.

Tuomet, remdamiesi minėtąja projektavimo savybe, bei lygybe (10), gauname tokią koordinates siejančią sistemą:

$$\begin{cases} x = x'\frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega} + y'\frac{\sin\omega-\beta}{\sin\omega} \\ y = x'\frac{\sin(\alpha)}{\sin\omega} + y'\frac{\sin\beta}{\sin\omega}. \end{cases}$$

Tarkime, kad erdvėje Dekarto koordinačių sistemos pagrindas yra reperis, kurio vektoriai vienetiniai bei tarpusavyje statmeni (ortonormuotas reperis). Be to sakykime, kad naujosios koordinačių sistemos reperis taip pat ortonormuotas. Atlikime koordinačių sistemos posūkį. Tuomet koordinačių keitimo (6) ir (7) formulėse koeficientai $a_i, b_i, c_i,\ i = 1, 2, 3$ lygūs kampų, kuriuos sudaro naujos bazės vektoriai $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{\mathbf{j'}}, \overrightarrow{\mathbf{k'}}$ su koordinatinėmis ašimis Ox, Oy, Oz atitinkamai, kosinusai. Jeigu vektorius $\overrightarrow{i}$ su koordinatinėmis ašimis

Ox, Oy, Oz sudaro kampus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ atitinkamai, tai naudodamiesi skaliarinės sandaugos apibrėžimu gauname, kad

$$1 = \overrightarrow{\mathbf{i}}^2 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3.$$

Vadinasi posūkio transformacijos atveju, formulėje (7) esantys koeficientai turi savybę:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0. \end{cases}$$

Dvi koordinačių sistemas vadinsime simetrinėmis, jeigu šių sistemų reperiai turi skirtingą orientaciją. Jeigu sistemų orientacija sutampa, tai sakysime, kad koordinačių sistemos yra kongruentinės.

Grįžkime prie koordinačių (7) keitimo formulių, užrašytų matriciniu būdu

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}',$$

čia $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}'}$ koordinačių vektoriai stulpeliai, o $\mathbf{A}$ - minėtų koeficientų matrica. Tikimės, kad skaitytojas, suskaičiavęs šios matricos determinantą įsitikins, jog jo absoliutinė reikšmė lygi 1. Dar daugiau, ji lygi 1, jei sistemos kongruentinės ir lygi -1, jei sistemos simetrinės. Panašiai kaip ir Dekarto koordinačių keitimo atveju plokštumoje, koordinačių keitimo sistema, erdvėje, turi analogišką išraišką:

$$\begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + x_0, \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + y_0, \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + z_0. \end{cases}$$

Trumpai užrašę turėsime, kad $\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{x_0}$. Tada koordinates naujoje sistemoje randame tokiu būdu: $\overrightarrow{x'} = A^{-1}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0})$.

3.5 Ortogonaliųjų Dekarto koordinačių transformacijos

Koordinačių keitimo formulės (7) buvo gautos nepriklausomai nuo reperių. Tiksliau sakant, koordinačių skaitinės reikšmės priklauso nuo reperių, tačiau koordinačių keitimo formulių tiesiškumas visada išlieka.

Tarkime $O-$ fiksuotas erdvės taškas. Sakykime, kad nagrinėjamo reperio pradžios taškas sutampa su tašku O, o reperio vektoriai vienetiniai ir turi dešininę orientaciją. Nubrėžkime per kiekvieną iš šių vektorių po tiesę. Pavadinkime šias tieses koordinatinėmis tiesėmis, o tašką O koordinačių pradžios tašku. Tiesę, kuriai priklauso vektorius $\overrightarrow{e_1}$ vadinsime $x-$ ašimi ir žymėsime simboliu Ox, tiesę kuriai priklauso vektorius $\overrightarrow{e_2}$ vadinsime $y-$ ašimi ir žymėsime simboliu Oy, likusią tiesę $z-$ ašimi ir žymėsime - Oz. Bendram šių tiesių taškui O priskiriame skaičių 0. Tada, bet kokiam $x-$ ašies taškui C priskirsime tokį realų skaičių c, kad $\overrightarrow{OA} = c\overrightarrow{e_1}$. Tą tiesės dalį, kurios taškams priskiriami teigiami skaičiai, vadinsime teigiamąja tiesės x dalimi, likusią dalį neigiamąja. Analogišku būdu priskiriami skaičiai ir likusių tiesių taškams. Tokią koordinatinių tiesių sistemą, su nurodytu būdu taškams priskirtais skaičiais vadinsime *Dekarto koordinačių sistema.*

Iš pradžių tarkime, kad reperis, kurio pagrindu sudaryta koordinačių sistema, yra sudarytas iš ortogonalių vektorių. Panagrinėkime tokios koordinačių sistemos transformacijas plokštumoje.

Aptarsime du specialius atvejus: 1) lygiagretų koordinačių sistemos postūmį, kuomet reperio kryptys nepakinta, bei 2) koordinatinių ašių (tuo pačiu ir reperių) posūkį, kai pradžios taškas lieka vietoje. Šios abi transformacijos yra erdvės homeomorfizmai. Dar daugiau, šie homeomorfizmai yra izometrijos, kadangi atstumas tarp taškų, atlikus trasformaciją, nepakinta. Šių abiejų transformacijų kompoziciją pavadinsime judesiu. Taigi, judesys yra postūmis, posūkis arba postūmis su posūkiu kartu paėmus.

Lygiagretaus postūmio atveju, nepriklausomai nuo to ar reperis sudarytas iš ortogonalių vektorių ar ne, koordinačių keitimo formulės vienodos

(8) $$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases}$$

Panagrinėkime ortogonalių reperių posūkį plokštumoje. Tarkime $\overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}}$ yra senosios sistemos vektoriai, o $\overrightarrow{\mathbf{i}}', \overrightarrow{\mathbf{j}}'$ naujosios sistemos vektoriai (taip pat statmeni). Tarkime, kad koordinačių sistemą pasukame apie tašką O kampu α. Tada bet kokio taško A koordinatės naujoje (x', y') ir senoje (x, y) koordinačių sistemose siejamos tokiomis lygybėmis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y'. \end{pmatrix}$$

Postūmio (8) ir posūkio, aprašyto paskutiniosiomis formulėmis, kompoziciją nusako tokios formulės:

(9) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Išsprendę (9) sistemą naujųjų koordinačių atžvilgiu gauname:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - x_0)\cos\alpha & (y - y_0)\sin\alpha \\ -(x - x_0)\sin\alpha & (y - y_0)\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Esame minėję, kad nepriklausomai nuo to ar reperį sudarantys vektoriai ortogonalūs ar ne, postūmio koordinatės keičiamos naudojant (8) formules.

Aukščiau aptartą koordinačių keitimo metodą perrašykime matriciniu būdu.

Praeitame skyrelyje aptarėme bendras koordinačių keitimo formules. Be to matėme, kad norint atlikti keitimo operaciją reikia žinoti koeficientų keitimo matricą. Pati paprasčiausia transformacija - postūmis. Jį atliekame nusakydami postūmio vektorių

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime posūkio apie tašką O kampu α plokštumoje, transformacijos matricą taip:

$$M_{\alpha,O} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Tarkime duotas taškas $P(x, y)$. Tad matrica

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nusako taško P veidrodinį atspindį koordinatinės tiesės Ox atžvilgiu. Tuo tarpu matrica

$$A_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

atlieka veidrodinį taško atspindį tiesės Oy atžvilgiu. Beje, jeigu norime atlikti taško transformaciją kordinatinės ašies, pavyzdžiui Oz ašies atžvilgiu erdvėje, tai nesunku suprasti, kad teks naudotis matrica

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ O & O & -1 \end{pmatrix}.$$

Visai analogiškai bus sudaroma matrica ir transformuojant taškus kitų koordinatinių ašių atžvilgiu.

Toliau panagrinėkime taškų transformacijas plokštumoje. Jeigu vektorių $\overrightarrow{OP}$ sutapatinsime su taško P koordinatiniu vektoriumi stulpeliu, tai šio vektoriaus veidrodinius atspindžius, koordinatinių tiesių Ox, Oy atžvilgiu, atitinkamai, užrašome taip:

$$\overrightarrow{OP}' = A_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OP}'' = A_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nesunku matyti, kad transformacijų A_x, A_y kompozicija duoda taško P simetrišką vaizdą taško O atžvilgiu.

Raskime transformacijos formules, kuriomis remdamiesi galėtume skaičiuoti taškų veidrodinių atspindžių, bet kokios tiesės atžvilgiu, koordinates.

Sakykime duota tiesė plokštumoje. Be to tarkime, kad tiesei priklauso plokštumos taškas X_0, o pastaroji lygiagreti žinomam vektoriui $\overrightarrow{r}$. Tuomet tiesės lygtis įgyja tokią formą:

$$X(t) = X_0 + t\overrightarrow{r}, \ t \in \mathcal{R}.$$

Paėmę bet kokią t reikšmę gauname taško, priklausančio tiesei, koordinates. Kadangi vektorius $\overrightarrow{r}$ žinomas, tai tuo pačiu ir kampas kurį sudaro tiesė ir koordinatinė tiesė Ox. Tarkime to kampo skaitinė reikšmė lygi α. Atlikime gana paprastą procedūrą. Visų pirma pasukime tiesę (tuo pačiu ir nagrinėjamą tašką) kampu α taip, kad ji sutaptų su koordinatine ašimi Ox. Toliau, raskime nagrinėjamo taško veidrodinį atspindi tiesės Ox atžvilgiu. Na ir pagaliau, sukdami tiesę tuo pat kampu tik priešinga kryptimi, grąžinkime ją į pradinę padėtį, tuo pačiu grįš ir nagrinėtojo taško veidrodinis atspindys. Naudojant aukščiau pateiktus žymėjimus, visą šį procesą formaliai galime aprašyti taip:

$$X'(t) = M_{\alpha,O} \begin{pmatrix} tr_x \\ tr_y \end{pmatrix}$$

šia transformacija visus plokštumos taškus pasukome kampu α apie tašką O. Taigi tiesė sutampa su koordinatine ašimi Ox, o taškas P buvo perkeltas į P' vietą. Pažymėkime šio taško veidrodinį atspindį raide P'_v. Tada

$$P'_v = A_x P'.$$

Na, o dabar pasukę kampu $-\alpha$, grąžinkime plokštumą į pradinę padėtį. Pažymėję raide P_v taško P veidrodinį atspindį tiesės $X(t)$ atžvilgiu, gauname:

$$P_v = M^{-1}_{\alpha,O} P'_v = M^{-1}_{\alpha,O} A_x M_{\alpha,O} \begin{pmatrix} x_0 + tr_x \\ y_0 + tr_y \end{pmatrix}.$$

Taip atrodo taško veidrodinio atspindžio, tiesės atžvilgiu, transformacijos formulės, kai tiesei priklauso koordinačių pradžios taškas. Tuo atveju, kai tiesei nepriklauso koordinačių pradžios taškas, tai pirmame žingsnyje reikia atlikti koordinačių postūmį į kokį nors tašką X_0, kuris priklauso tiesei, po to atlikti tą pačią procedūrą kaip ir aukščiau, o pabaigoje vėlgi atlikti postūmį vektoriumi, kuris priešingos krypties negu pradiniame žingsnyje. Apibendrinus gauname transformaciją

$$P_v = M^{-1}_{\alpha,O} A_x M_{\alpha,O} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad transformacija nusakyta (7) koordinačių keitimo matrica. Sakysime, kad ši transformacija neišsigimusi, jeigu jos matricos determinantas nelygus nuliui. Ateityje nagrinėsime tik neišsigimusias transformacijas.

Paminėsime kelias afininių transformacijų savybes. Visų pirma tai, kad bet kokia afininė transformacija lygiagrečias tieses atvaizduoja į lygiagrečias tieses. Kitaip tariant lygiagretainį atvaizduoja į lygiagretainį, nors bendru atveju ir kitokį. Tačiau afininė transformacija išlaiko atkarpų santykį. Taigi, bet koks trijų taškų santykis nepriklauso nuo afininės transformacijos. Ši savybė labai svarbi, kadangi ji iš esmės naudojama transformacijai apibrėžti. Transformacija nusakyta, jeigu trys vektoriai nesantys vienoje tiesėje atvaizduojami vėl į tris vektorius nesančius vienoje tiesėje. Tarkime, kad norime rasti transformaciją, kuri taškus A, B, C, nesančius vienoje tiesėje, atvaizduoja į taškus A', B', C'. (7) lygtyse vietoje kintamųjų įrašę taškų koordinates, gauname šešias lygtis su šešiais nežinomaisiais - $a_1, a_2, b_1, b_2, x_0, y_0$. Išsprendę šią lygčių sistemą ir rasime transformacijos plokštumoje, kuri atvaizduoja taškus A, B, C į taškus A', B', C', matricą. Iš pastarosios savybės galime padaryti išvadą, kad $n-$kampis taip pat atvaizduojamas į $n-$kampį. Jau esame minėję, kad lygiagretainis atvaizduojamas į lygiagretainį, bet to paties pasakyti apie stačiakampį bendru atveju negalime. Jau praeitame skyrelyje pastebėjome, kad afininių transformacijų kompozicija - afininė transformacija. Ši savybė būdinga ir bendroms afininėns transformacijoms, žinoma neišsigimusioms. Be to afininei transformacijai atvirkštinė taip pat afininė.

Apibendrindami padarysime tokią išvadą: figūros afininė transformacija yra arba jos judesys arba suspaudimas bei ištęsimas arba šių transformacijų kompozicija. Kiekvieną afininę transformaciją galime suskirstyti į dvi transformacijas 1) kai ortogonalinį reperį transformuojame į kitą ortogonalinį reperį nekeisdami reperio vektorių ilgių - šiuo atveju gauname judesį ir 2) kai transformuoto vektoriaus krypčių nekeičiame, o pakeičiame tik jų ilgius, gauname suspaudimą arba ištęsimą. Apie transformacijos spaudžiamąjį arba tempiamąjį pobūdį galima spręsti iš jos determinanto reikšmės. Jeigu determinanto absoliutinė skaitinė reikšmė didesnė už vienetą, tai vaizdo plotas didesnis už pirmvaizdžio plotą, jeigu determinanto absoliutinė reikšmė mažesnė už vienetą tai vaizdo plotas mažesnis. Vaizduojama figūra apverčiama, jei determinanto reikšmė neigiama.

Erdvės afininės transformacijos turi analogiškas savybes kaip ir plokštumos, todėl atskirai jų nenagrinėsime, palikdami tai skaitytojui, tik paminėsime, kad afininė transformacija nustatyta erdvėje, jeigu duotieji keturi taškai nesantys vienoje plokštumoje atvaizduojami į keturius taškus nesančius taip pat vienoje plokštumoje. T.y. šiuo atveju transformacijos matricos determinantas bus nelygus nuliui ir (7) lygčių sistema turės vienintelį sprendinį, kuris ir nusakys transformacijos matricą.

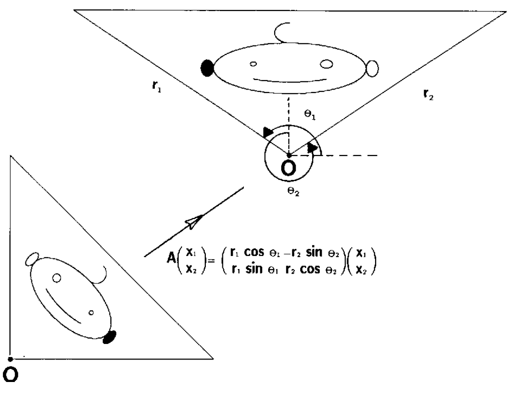
Aptarkime dar vieną afininės transformacijos atvejį - homotetiją. *Homotetija* vadinama tokia plokštumos arba erdvės transformacija, kai vienas taškas (sakykime O) lieka vietoje, o bet kuris kitas taškas A atvaizduojamas į tašką A' esantį tiesėje OA tokiu būdu, kad $\overrightarrow{OA}' = k\overrightarrow{OA}$; čia k pastovus skaičius. Taškas O vadinamas homotetijos centru, k homotetijos koeficientu. Jeigu $k > 0$ tai taškas A' yra iš tos pat pusės nuo taško O, tokia homotetija vadinama tiesiogine, kai $k < 0$ - tai priešingose pusės, ji vadinama atvirkščiąja.

Atkreipsime dėmesį, kad homotetija, tiesė atvaizduojama į jai lygiagrečią tiesę. Homotetinės figūros paprastai vadinamos *panašiomis*.

Pati bendriausia afininių transformacijų formulė erdvėje pateikta (7) lygybe. Kadangi kompiuterinei grafikai ypatingai svarbus yra plokštumos atvejis tai pateiksime šios transformacijos matricinę formą. Afininės transformacijos, plokštumoje, matricą visuomet galima užrašyti taip:

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} r_1 \cos\xi_1 & r_2 \sin\xi_2 \\ r_1 \sin\xi_1 & r_2 \cos\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix}, \tag{10}$$

kur (r_1, ξ_1) taško (a_1, a_2) polinės koordinatės, o $(r_2, \xi_2 + \frac{\pi}{2})$ taško (b_1, b_2) polinės koordinatės. Skaičiai r_1, r_2 vadinami sąspūdžio koeficientais, ξ_1, ξ_2 posūkio kampais. Žemiau pateiktame paveikslėlyje demonstruojamos (10) afininės transformacijos galimybės:



3.5 pav.

Siūlome skaitytojui panagrinėti paskutiniąjį reiškinį ir nustatyti, kokias sąlygas turi tenkinti dydžiai r_1, r_2, ξ_1, ξ_2, kad transformacija būtų judesys, homotetija, arba suspaudžiančioji (ištempiančioji).

Pavyzdys. Norėtume atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad jei transformacija, tris taškus nesančius vienoje tiesėje, atvaizduoja į taškus, kurie yra vienoje tiesėje, tai ši transformacija yra išsigimusi, t.y. jos determinantas lygus nuliui.

Raskime transformacijos, kuri trikampį $(0,0),(0,1),(1,0)$ atvaizduotų į atkarpą $(1,1),(2,2)$, sąspūdžio koeficientą, bei posūkio kampą, jei papildomai pareikalausime, kad taškai $(0,1),(1,0)$ būtų atvaizduojami į tašką $(1,1)$.

Turime, kad transformacija taškus $(0,1),(1,0)$ atvaizduoja į tašką $(1,1)$. Vadinasi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iš paskutiniųjų lygybių gauname, kad $a = b = c = \delta = 1$. Imkime kitą transformaciją, kuri tašką $(1,1)$ palieka vietoje, o tašką $(0,0)$ atvaizduoja į tašką $(2,2)$. Taigi

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Iš pastarųjų lygybių gauname, kad $b = c = 0,\ a = -1, d = -1$. Tuomet ieškomoji transformacija T yra šių transformacijų kompozicija, kitaip tariant T matrica lygi šių matricų sandaugai. Sudauginę gauname, kad

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matome kad matricos T determinantas lygus nuliui. Nesunku matyti, kad posūkio kampai pagal abi koordinatines ašis vienodi, ir lygūs $5\pi/4$.

3.1 Teorema *Tarkime kad afininė transformacija W atvaizduoja plokštumos sritį S, kurios plotas P_s į sritį S', kurios plotas $P_{s'}$. Tada teisinga lygybė:*

$$P_{s'} = |detW|P_s.$$

Įrodymą paliekame skaitytojui. Pradžioje siūlome šią teoremą įrodyti trikampiui.

Pavyzdys Nurodykime sąspūdžio koeficientą r_1, posūkio kampą ξ bei postūmio vektorių t tokius, kad transformacija

$$W(X) = RM_{\xi,0}x + t,$$

bet kokį Sierpinskio trikampį su taškais $(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},1)$ atvaizduotų į savo tikrinį poaibį. Reikalaujame, kad viršūnė $(0,0)$ liktų vietoje, o kiti taškai vaizduojami taip:

$$W\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$W\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}. \end{pmatrix}$$

Iš pirmosios transformacijos išraiškos išplaukia, kad postūmio vektorius lygus nuliui. Suskaičiuokime kitų dviejų transformacijų matricas.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iš paskutiniojo sąryšio išplaukia, kad $a = 0,5,\ c = 0$. Toliau skaičiuodami gauname

$$\begin{pmatrix} 0,5 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25+b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

iš čia $b = 0, d = 0,5$. Vadinasi ieškomoji transformacija yra tokia:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3.6 Bendrosios koordinačių transformavimo formulės

Kuomet nagrinėjame laisvai pasirinktą metrinę erdvė, tai apie taškų padėtį erdvėje nelabai ką tegalime pasakyti. Tiesa, metrika sudaro galimybes nustatyti taškų tarpusavio padėtį, tačiau jei atstumas tarp kurių nors taškų vienodas, faktiškai šie skaičiai nieko nepasako apie taškų tarpusavio padėtį. Šis trūkumas pašalinamas apibrėžus koordinačių sistemą erdvėje.

Koordinačių sistema erdvėje vadinsime bijektyvią erdvės X transformaciją θ į kokią nors erdvę $X_k \subset \mathcal{R}^k, (\theta : X \longrightarrow X_k)$. Kitaip tariant, bet kokiam metrinės erdvės elementui priskiriame $k-$matį vektorių. Metrinės erdvės elemento koordinatėmis vadiname jo vaizdo koordinates. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad metrinė erdvė X ir jos vaizdas X_k yra homeomorfinės, todėl šias erdves homeomorfizmo atžvilgiu galime sutapatinti.

Pavyzdžiui erdvėje $X = [0,1]$ bet kokio taško koordinates galime nusakyti taip: $\theta(x) = x$. Tuo tarpu kompleksinių skaičių erdvėje galime naudoti jau mums žinomą Dekarto koordinačių sistemą. Auksčiau esame nagrinėje erdvę $\overline{\mathcal{C}}$. Šioje erdvėje galime naudoti sferos taškų koordinates kurios, savo ruožtu, nusakomos tokiu būdu:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta\cos\alpha \\ y = r\sin\beta\cos\alpha \\ z = r\cos\alpha. \end{cases}$$

Kadangi Rymano sfera ir išplėstinė plokštuma homeomorfinės, tai suprantama, Rymano sferos taško koordinatę galime laikyti jį atitinkančio išplėstinės plokštumos taško koordinate auksčiau užrašytoje sistemoje paėmę $r = 1$. Taigi, šiuo atveju taško $\infty \in \overline{\mathcal{C}}$ koordinatės yra lygios $(0,0,1)$.

Manome, kad skaitytojas supranta, kad toje pat erdvėje galima apibrėžti ne vieną koordinačių sistemą. O kiek gi koordinačių sistemų galime apibrėžti fiksuotoje erdvėje? Ar galime suformuluoti koordinačių keitimo problemą bendru atveju? Panagrinėkime šį klausimą.

Tarkime, kad $g : X_k \longrightarrow X_k$ kuri nors erdvės, kurioje apibrėžta koordinačių sistema, bijektyvi transformacija. Vadinasi, $X_k = g(X_k)$. Jeigu transformacija g netapačioji, tai $\exists x' \in g(X_k)$ kad $x' \neq x$. Tad šis atvejis netrivialus. Tarkime X_0- fiksuotas erdvės taškas. Sakykime, kad x jo koordinatė pradinėje koordinačių sistemoje, o x' jo koordinatė naujoje koordinačių sistemoje, kitaip tariant $x' = g(x)$. Sakykime, kad $f : X \longrightarrow X-$ kita bijektyvi erdvės transformacija į save. Tuomet ši transformacija naujoje bazėje bus žymima $f'(x')$. Pastebėsime, kad $g(f(x)) = f'(x')$. Taigi

$$f' : g(X) \longrightarrow g(X)$$

arba, $g \circ f(x) = f'(x')$. Bet $x' = g(x)$, todėl $x = g^{-1}(x')$. Tada tašką x transformacija f veikia tokiu būdu:

$$f(x) = f \circ g^{-1}(x'), \Longrightarrow g \circ f(x) = f'(x') = g \circ f \circ g^{-1}(x).$$

Iš pastarųjų lygybių išplaukia tokios lygybės:

$$f(x) = (g^{-1} \circ f' \circ g)(x),\ f'(x') = (g \circ f \circ g^{-1})(x').$$

Priminsime, kad $g-$ koordinačių sistemos transformacija.

Tarkime, kad $f : X \longrightarrow X$ yra metrinės erdvės X transformacija. Tašką x_f vadinsime transformacijos f *nejudamu tašku*, jeigu $f(x_f) = x_f$.

Pavyzdys Tarkime duota transformacija

$$f(x) = ax + b, a \neq 0, a \neq 1, a, b \in \mathcal{R}.$$

Nesunku matyti, kad šios transformacijos nejudamas taškas

$$x_f = \frac{b}{1-a}.$$

Tarkime, kad koordinačių keitimo transformacija g apibrėžta tokia lygybe: $x' = g(x) = x - x_f$. Kitaip tariant, koordinačių pradžios tašką pastumia į nejudamą transformacijos f tašką. Tad kokia gi transformacijos f formulė naujoje koordinačių sistemoje? Naudodami aukščiau pateiktas formules skaičiuojame:

$$f'(x') = (g \circ f \circ g^{-1})(x') = g \circ f(x' + x_f) = a(x' + x_f) + b - x_f.$$

Gauname $f'(x') = ax'$.

Užduotys

1. Tarkime, kad transformacijos $f : [0,1] \to [0,1]$ apibrėžtos tokiomis formulėmis: a) $f(x) = 0.5x$, b) $f(x) = 4x(1-x)$. Ar šios transformacijos injektyvios, siurjektyvios, turi atvirkštines?

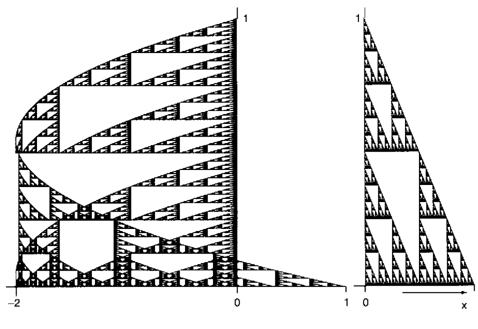
2. Tarkime, kad duota transformacija $f(x,y) = (2x, y^2 + x)$, $(x,y) \in \mathcal{R}^2$. Ar ši transformacija turi atvirkštinę? Raskite $f^{(2)}(x,y)$.

3. Nurodykite antros eilės polinominę transformaciją, kuri intervalą $[0,2]$ atvaizduoja į jį patį taip, kad būtų patenkintas reikalavimas: tarkime, kad $y \in f([0,2])$, tada egzistuoja du taškai $x, y \in [0,2]$ tokie, kad $f(x) = f(y) = y$.

4. Įrodykite, kad Miobuso transformacija turi atvirkštinę.

5. Raskite Miobuso transformaciją $f : \overline{\mathcal{R}} \to \overline{\mathcal{R}}$, kuri turėtų savybes: $f(1) = 2, f(2) = 0, f(0) = \infty$. Kam lygi $f(\infty)$?

6. 3.6 pav. yra pateiktas Sierpinskio trikampio (S) vaizdas, kuris gaunamas aibę (S) atvaizdavus polinomine transformacija $f(x) = ax(x-b)$. Raskite šios transformacijos koeficientus a, b.



3.6 pav.

7. Nurodykite transformaciją, apibrėžtą erdvėje $\mathcal{R}^2$, atvaizduojančią trikampį, kurio viršūnės apibrėžtos taškais $(0,0), (0,1), (1,0)$, į trikampį, kurio viršūnės yra taškuose $(4,5), (-1,2), (3,0)$. Kaip duota transformacija atvaizduoja į pirmąjį trikampį įbrėžtą apskritimą?

8. Tarkime, kad duota Miobuso transformacija $f(z) = az + b$, $a \neq 0, b \in \mathcal{C}$. Įrodykite, kad bet kokia dvimatė panašumo transformacija, kuri nėra veidrodinis atspindys, gali būti apibrėžta tokiu būdu:

$$f(z) = \begin{pmatrix} r\cos\xi_1 & -r\sin\xi \\ r\sin\xi & r\cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Nurodykite spindulio r ir kampo priklausomybę nuo parametrų a, b.

9. Įrodykite, kad Miobuso transformacija

$$f(z) = a + \frac{b}{z+c}, \ a, b \neq 0, c \in \mathcal{C}$$

nėra panašumo transformacija.

10. Įrodykite, kad Miobuso transformacija $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ yra apverčiama.

11. Raskite transformaciją, kuri taškus $z_1 = -i, \ z_2 \ 1, \ z_3 = i$ atvaizduotų į taškus $w_1 = -i, \ w_2 = 0, \ w_3 = i$.

12. Raskite Miobuso transformacijos

$$f(z) = \frac{z+2}{4-z}, \ z \in \mathcal{C}$$

nejudamus taškus.

13. Raskite Miobuso transformacijos keturis, iteracinės sekos narius.

14. Raskite sekos $g^n(z)$ bendrąjį narį, kai

$$g(z) = \frac{1}{1+z}.$$

15. Tarkime, kad transformacijos f ir g yra apibrėžtos 12. ir 14. lygybėmis. Raskite transformacijų kompoziciją: $f \circ g(z)$.

16. Nurodykite afinininių transformacijų seką, kuri realizuotų apskritimo

$$x^2 + (y-2)^2 = 1,$$

riedėjimą tiese $x + 6y = 6$.

17. Nurodykite transformacijų seką, kuri Sierpinskio trikampį $(0,0), (1,0), \ (1,1)$ ridentų tiese $y = x$ ir kiekviename sekančiame žingsnyje šį trikampį simetriškai atvaizduotų šios tiesės atžvilgiu.