6 tema. FIKSUOTO PAJAMINGUMO VERTYBINIAI POPIERIAI

Temos tikslai:

• Nustatyti vertybinių popierių kainą nurodytu laiko momentu.

• Modeliuoti matematines bei realaus turinio situacijas, kuriose tenka skaičiuoti vertybinių popierių vertes.

• Vertinti vertybinių popierių pelningumą.

Tikrinami studijų rezultatai:

• Žinos vertybinių popierių rūšis.

• Skaičiuos vertybinių popierių kainas.

• Vertins vertybinių popierių pelningumą.

• Modeliuos matematinio bei realaus turinio situacijas, kuriose bus nagrinėjami vertybinių popierių kainų bei pelningumo skaičiavimo metodai.

Studentų pasiekimų vertinimo kriterijai:

• Tikslus sąvokų naudojimas.

• Tinkamas formulių naudojimas.

• Tikslūs tarpiniai ir galutiniai atsakymai.

• Tikslūs atsakymai į klausimus.

6.1 Vekseliai. Paprastųjų palūkanų atvejis

Pasikartokite sąvokas:

Paprastosios palūkanos. Paprastųjų palūkanų ir diskonto normos. Diskonto daugiklis paprastųjų palūkanų atveju. Būsimosios ir dabartinės vertės skaičiavimas paprastųjų palūkanų atveju. Sudėtinės palūkanos. Nominalioji ir faktinė palūkanų normos. Diskonto norma ir diskonto daugiklis sudėtinių palūkanų atveju. Palūkanų perskaičiavimo periodas. Būsimosios ir dabartinės vertės skaičiavimas sudėtinių palūkanų atveju. Būsimosios ir dabartinės vertės skaičiavimas taikant tikslųjį metodą bei tolydžiai perskaičiuojant palūkanas.

Dalyvaujantys ūkinėje veikloje neišvengiamai susiduria su įvairiais finansiniais sandėriais. Bene svarbiausias finansinių santykių atributas yra veiklos kreditavimas. Kitaip tariant, norint plėsti veiklą, valdyti pakankamas apyvartines lėšas, neišvengiamai tenka skolintis. Yra įvairių skolinimosi bei skolinimo instrumentų. Leidinyje gana plačiai aptarsime įvairius skolinimosi instrumentus. Šiame skyrelyje nagrinėsime specialius skolos popierius, kurie vadinami vekseliais.

Apibrėžimas *Vekseliu* yra vadinamas rašytinis įsipareigojimas, kuris sudaromas įstatymo numatytu būdu, kuriame asmuo be sąlygų įsipareigoja sumokėti nurodytą pinigų sumą su palūkanomis arba be palūkanų nurodytu laiko momentu, nurodytam subjektui. Pinigų suma, nurodyta vekselyje, yra vadinama vekselio *nominalu.*

Pateiksime keletą savokų, kurios naudojamos sudarant vekselius.

Vekselio *davėjas* arba *sudarytojas* yra asmuo, kuris skolinasi pinigus.

Vekselio *valdytojas* (investuotojas) yra asmuo, kuris skolina pinigus.

Vekselio palūkanų norma yra metinių paprastųjų palūkanų norma, taikoma vekselio nominaliąjai vertei.

Išleidimo data (pasirašymo terminas)- laiko momentas, kuomet vekselis buvo sudarytas ir pasirodė apyvartoje (buvo pasirašytas).

Vekselio (mokėjimo) terminas- tai laiko momentas, kuriame vekselis apmokamas (išperkamas).

Palūkanų periodas yra laikotarpis, tarp vekselio sudarymo (išleidimo) ir mokėjimo termino.

Galutinė vertė (maturity) yra nominalioji vertė kartu su palūkanomis.

Diskonto periodas- tai laiko intervalas tarp vekselio įsigyjimo(pardavimo) momento ir išpirkimo termino.

Vekseliai gali būti "įsakomieji" arba "paprastieji". Vekselis vadinamas įsakomuoju, kai šiame dokumente vekselio sudarytojas nurodo kitam subjektui sumokėti vekselio sumą investuotojui (davėjui).


ĮSAKOMASIS VEKSELIS
Pagal šį įsakomąjį vekselį
privalote sumokėti
Akceptuotas
Mokėtojas
Adresas
Mokėjimo vieta
BILL OF EXCHANGE for
Pay against this
Bill of exchange at/on
to the order of
Accepted
Drawee
Address
Payable in
at

2.2 pav. Įsakomasis vekselis


PAPRASTASIS VEKSELIS
Pagal šį paprastąjį vekselį
Mokėjimo vieta
PROMISSORY NOTE for
to the order of
Payable in
at

2.3 pav. Paprastasis vekselis

1. Vekselio viršuje turi būti nurodoma ar vekselis paprastas ar įsakomasis. Tolimesnis tekstas privalo sutapti su kalba, kuria užrašytas vekselio pavadinimas;

2. Turi būti nurodomas besąlyginis įsakymas sumokėti nurodytą sumą;

3. Turinčio sumokėti asmens (mokėtojo) pavadinimas ar vardas ir pavardė;

4. Mokėjimo terminas;

5. Mokėjimo vieta;

6. Pavadinimas ar asmens vardas ir pavardė, kuriam ar kurio įsakymu turi būti sumokėta;

7. Pasirašymo vieta ir data;

8. Išrašančiojo vekselį asmens parašas.

Tuo atveju, kai vekselis paprastas nėra nurodomas 3. punktas. Paprastas vekselis- tai vekselis, kai sumokėti privaloma be įsipareigojimų nurodytą sumą. Šią sumą sumoka vekselio sudarytojas.

Vekselis laikomas negaliojančiu, jei nėra bent vieno iš nurodytų punktų.

Įvairiose šalyse vekselio mokėjimo terminas turi "tolerancijos" ribas, kurios sudaro prielaidas vekselį apmokėti ne būtinai tuo laiko momentu, kuris nurodomas vekselyje. Kitaip tariant mokėjimo terminas gali būti nukeliamas kelioms dienoms (dažnai skiriamos dvi arba trys dienas).

Pavyzdžiui, jei pasakyta, kad vekselis yra 60 dienų, tai skaičiuojant jo vertę, palūkanų dienų skaičius bus 62, jei skiriamos dvi tolerancijos dienos.

Pastaba Mes paprastai netaikysime toleracijos laikotarpio ir vekselio palūkanas skaičiuosime nurodytam terminui.

Veksliai yra skirtomi į dviejų rūšių vekselius- 1) vekselius su palūkanomis; 2) vekseliai be palūkanų. Jeigu vekselis yra su palūkanomis, tai palūkanų laikotarpis apima dienas nuo vekselio sudarymo iki išpirkimo termino dienos, su papildoma sąlyga: pirmoji diena sekanti diena po vekselio sudarymo, paskutinė diena, Vekselio palūkanų periodas T paprastai skaičiuojamas tiksliu dienų skaičiumi, tenkančiu vekselio palūkanų periodui, šį dienų skaičių vėliau verčiant metų dalimis. Vekselio palūkanų periodas gali būti nurodomas savaitėmis, mėnesiais, metų dalimis. Šiuo atveju vekselio termino ir sudarymo dienos turi sutapti.

Pavyzdys Tarkime pusės metų vekselis sudarytas 2013 Vasario 8d. Vadinasi šis vekselis bus išperkamas rugpjūčio 8d, šiuo atveju $T = 181/385$. Arba 7 savaičių vekselis pasirašytas 2013 Vasario 8d. Kadangi vasario 8d. yra penktadienis, tai šis vekselis turi būti išperkamas taip pat penktadienį t.y. Kovo 29 dieną. Šiuo atveju $T = 49/385$.

Tarkime, kad vekselio su palūkanomis nominalas yra A, palūkanų norma yra r, vekselio palūkanų periodas T, išperkamoji vertė S. Tada vekselio išperkamoji vertė yra

$$S = (1 + rT)P.$$

Jei vekselis be palūkanų, tai jo išperkamoji vertė sutampa su nominaliąja verte, t.y. $S = A$.

Pavyzdys Šešerių mėnesių vekselis pasirašytas Kovo mėn. 30, 2005 su 12.5% palūkanų norma, kurio galutinė vertė 2000. Raskite nominaliąją vertę.

Taigi, vekselis išperkamas 2005 rugsėjo 30d. Turime, kad $S = 2000; \quad r = 0.125; t = \frac{184}{365}$. Tada

$$P = \frac{20000}{1 + 0.125 \cdot \frac{184}{365}} = \frac{2000}{1.063013} \approx 1881.44.$$

6.2 Vekselių diskontavimas

Vekselius valdantis asmuo (įmonė) gali šiuos vertybinius popierius parduoti kitam pirkėjui. Pirkimo (pardavimo) procesas paprastai vadinamas vekselių *diskontavimu.* Aptarkime šį metodą detaliau.

Pirkėjas įsigydamas vekselį investuoja pinigus tikėdamasis iš šio sandėrio ateityje gauti pajamas. Vadinasi įsigydamas vekselį subjektas turi mokėti mažiau negu vekselio išperkamoji vertė. Mes nagrinėsime šios vertės nustatymo metodą.

Žemiau pateiktos savokos yra svarbios nustatant vekselio diskontuotą vertę.

1) Vekselio *diskonto palūkanų norma* vadinama palūkanų norma, naudojama diskontuojant vekselį.

2) Vekselio *diskonto norma* vadinama metinė diskonto norma, naudojama diskontuojant vekselį.

3) *Diskonto terminas* yra laiko momentas, kuriame skaičiuojama diskontuota vekselio vertė.

4) *Diskonto periodas*- laiko intervalas tarp diskonto termino ir galutinio termino, t.y. laiko momento, kuomet vekselis turi būti apmokėtas.

5) *Vekselio pajamomis* vadinama pirkėjo sumokėta suma vekselio valdytojui. Šią sumą žymėsime raide B.

6) *Vekselio diskontu* D vadinsime skirtumą tarp vekselio išpirkimo kainos ir jo pajamų:

$$D = S - B.$$

Pastaba Jei vekselis turi tolerancijos laiko intervalą, tai skaičiuojant būsimąją vertę prie nurodyto vekselio palūkanų periodo pridedame tolerancijos intervalą ir analogiškai diskontuodami turime atsižvelgti, kad skaičiuojant diskontavimo laikotarpį, pabaigoje turime jį pailginti tolerancijos intervalu. Pavyzdžiui vieno mėnesio vekselis, pasirašytas balandžio 1 d., su trijų dienų tolerancijos laikotarpiu buvo diskontuotas balandžio 16 dieną. Turime kad vekselio periodas $30 + 3 = 33$ dienos, o diskonto periodas yra $14 + 3 = 19$ dienų. Jau esame minėję, kad skaičiavimuose nenaudosime toleracijos sąvokos.

Sudarykime vekselio pajamų skaičiavimo formulę. Visų pirma tarkime, kad vekselio nominalas A, o palūkanų norma r. Tegu T yra vekselio palūkanų periodas. Tarkime, kad vekselis yra parduodamas (įsigyjamas) tuo metu, kai iki išpirkimo liko t laiko, o šiuo metu pinigų vertė yra i_t. Tada vekselio įsigyjimo kaina nustatoma tokiu būdu:

$$B = \frac{A(1 + rT)}{1 + ti_t} = \frac{S}{1 + ti_t}.$$

Vekselio diskontas dažnai vadinamas skolinimosi kaštais. Diskontą galime užrašyti tokiu būdu

$$D = A(1 + rT) - \frac{A(1 + rT)}{1 + ti_t} = A(1 + rT)\frac{i_t t}{1 + ti_t} = Std,$$

čia d yra diskonto norma. Matome, kad skolinimosi kaštai (diskontas) tenkina nelygybę:

$$0 \le D \le A(1 + rT).$$

Pastaba Jei rinkos palūkanų norma $i = 0$ tai matome, kad skolinimosi kaštai taip pat yra lygūs nuliui. Taigi, vekselio pardavimo kaina sutampa su vekselio galutine kaina. Skolinimosi kaštai auga ir artėja prie vekselio būsimosios vertės tada, kai rinkos palūkanų norma didėja. Tad kuo didesnė rinkos palūkanų norma, tuo vekselio pajamos mažesnės, o vekselio skolinimosi kaštai artimesni išperkamąjai (galutinei vertei). Šiuo atveju vekselio įsigyjimo kaina B artėja prie nulio.

Pavyzdys 150 dienų, 10%, 120000 nominalo vekselis sudarytas 2001 Spalio 28, parduotas 2002 Sausio 31 d., su 13% grąža. Nustatykite vekselio pajamas bei diskonto dydį.

Nustatome vekselio galutinę vertę.

$A = 120000;\quad r = 0,1;\quad T = \frac{150}{365}$. Tada

$$S = 120000(1 + 0,1 \cdot \frac{150}{365}) = 115263,16.$$

$S = 115263,16;\quad i = 0,13;\quad t = \frac{58}{365}$.

Tada
$$B = \frac{115263,16}{1 + 0,13 \cdot \frac{55}{365}} = 113048,65,$$
čia B yra vekselio vertė diskonto terminu.

Vekselio diskontas $115263,16 - 113048,65 = 2214,51$.

Apibrėžimas Vekselis vadinamas *vekseliu be palūkanų* arba vekseliu *su įskaičiuotomis palūkanomis*, jei galutinė vekselio vertė sutampa su nominaliąja verte.

Kitaip tariant, jei vekselis be palūkanų, tai išperkant yra mokamas vekselio nominalas. Jei vekselis yra įsigyjamas (parduodamas) ne galutinio termino metu, tai nustatant vekselio įsigyjimo kainą nominalioji vekselio vertė yra diskontuojama, diskonto daugiklis apibrėžiamas su palūkanų norma, kuri tuo metu vyrauja rinkoje. Kartais sakoma, kad vekselis diskuontuojamas pagal esamą pinigų vertę. Nesunku suprasti, kad vekselio be palūkanų nominalioje vertėje yra įskaičiuotos sukauptos laikotarpio palūkanos, kurios skirtingais laiko momentais diskontuojamos su skirtinga palūkanų norma.

Taigi šiuo atveju nustatant vekselio įsigyjimo kainą $B(t)$, bet kokiu laiko momentu, kai palūkanų norma (pinigų vertė) šiuo momentu yra i_t (metinė palūkanų norma), o iki vekselio išpirkimo yra t ilgio laiko intervalas, taikome tokią formulę:
$$B(t) = \frac{A}{1 + ti_t}.$$

Pavyzdys Raskite vekselio be palūkanų vertę laiko momentu, kai vekselis buvo sudarytas, jei vekselio nominalioji vertė yra 95000, vekselis trijų mėnesių trukmės, pasirašytas Rugsėjo 30 d., vekselio sudarymo metu pinigų vertė 13.5%.

Turime, kad

$A = 95000$; $r = 0.135$; $t = \frac{92}{365}$. Tada
$$B = \frac{95000}{1 + 0.135 \cdot \frac{92}{365}} = 9187.35.$$

Pavyzdys Raskite 120 dienų vekselio be palūkanų, kurio nominalioji vertė 40000, sudaryto Spalio 2 dieną, įsigyto Spalio 21 dieną, kai pinigų vertė tuo metu 13%, pajamas.

Turime, kad vekselis turi būti išperkamas Sausio 2 dieną, kai iki išpirkimo dienos liko 72 dienos, o įsigyjimo metu pinigų vertė 13%.

Pastaba Jei šiuo atveju vekselis turėtų dvi tolerancijos dienas, tai formulėse naudotume ne 72 dienų skaičių, o 74 dienų skaičių.

Turime

$A = 40000$; $r = 0.13$; $t = \frac{72}{365}$. Tada
$$B = \frac{40000}{1 + 0.13 \cdot \frac{72}{365}} \approx 39000,$$
čia B yra dabartinio kapitalo vertė, pagrindinio termino laiku.

Pastaba Dabartinė vekselio be palūkanų vertė yra vekselio kaina, bet kokiu laiko momentu, kuris yra anksčiau negu pagrindinis terminas, esant nurodytai pinigų vertei.

Vekselio su palūkanomis atveju, nustatant dabartinę vekselio vertę, reikia žinoti vekselio galutinę vertę. Skaičiuojant vekselio galutinę ir dabartinę vertes tenka naudoti dvi palūkanų normas:

1) apibrėžiant galutinę vekselio vertę yra naudojama palūkanų norma nurodyta vekselyje;

2) pinigų vertės norma naudojama skaičiuojant dabartinę kapitalo vertę pagrindinio termino momentu t.y. kuomet vekselis parduodas arba įsigyjamas.

Pavyzdys Dviejų mėnesių vekselis be palūkanų pasirašytas Birželio 30 d. 7000 sumai. Raskite vekselio pajamas ir diskonto dydį, jei vekselis yra diskontuotas Liepos 31 dieną, su 16%. Tarkime, kad vekselis išperkamas su trijų dienų tolerancijos terminu. Turime, kad vekselio galutinė vertė 7000, vekselio apmokėjimo terminas Rugpjūčio 30, tolerancijos terminas Rugsėjo 2, diskonto terminas Liepos 31, diskonto periodas (Liepos 31 iki Rugsėjo 2) yra 1+31+1 =33 (Rugsėjo 2 dienos neįtraukiame). Turime

$A = 7000; \quad r = 0,16; \quad t = \frac{33}{365}.$

Tada vekselio pajamos yra

$$B = \frac{7000}{1 + 0,16 \cdot \frac{33}{365}} = 6900.$$

Diskonto dydis $7000 - 6900 = 100$.

Aptarkime diskontavimo problemą naudodami kitus terminus, t.y. diskonto normą. Tiksliau kalbant, atliekant diskontavimo procedūrą yra naudojama diskonto norma d vietoj palūkanų normos i. Priminsime, kad diskonto norma yra procentas nuo galutinės vertės.

Taigi, jei skolinimosi laiko intervalas yra t, tai skolinimosi kaštai (diskontas) yra $D = Sdt$, arba

$$d = \frac{S - P}{S}.$$

Tada vekselio pajamos gali būti išreikštos tokiu būdu:

$$B = S - D = (1 - dt)S.$$

6.3 Vekseliai iki pareikalavimo

Nagrinėsime dar vieną finansinių įsipareigojimų metodą- paskolas iki pareikalavimo, kurie dar vadinami vekseliais iki pareikalavimo. Pastebėsime, kad nagrinėjant šį skolos grąžinimo metodą tenka aptarti atvejus, kai vekselio laikotarpiu palūkanų norma gali būti įvairi. Panagrinėkime šio metodo esmę.

Apibrėžimas *V*ekseliu iki pareikalavimo vadinamas skolinis įsipareigojimas, kuomet investuotojas, iš vekselio sudarytojo gali pareikalauti apmokėti bet kokią šio vekselio dalį bet kokiu metu. Kartais iš veiksmas vadinamas *vekselio užprotestavimu.* Ir atvirkščiai, vekselio sudarytojas taip pat gali išpirkti vekselį arba apmokėti jo dalį, bet kokiu laiko momentu.

Nagrinėjant tokio pobūdžio vekselius palūkanų normos nėra fiksuojamos ir dar daugiau, palūkanų normai pasikeitus, keičiasi ir vekselio palūkanų skaičiavimas. Palūkanos skaičiuojamos pagal tuometinę pinigų vertę, nuo vekselio balansinės vertės (likusios skolos dalies) ir paprastai, jei nenurodyta papildomai, yra apmokamos kas mėnesį.

Metodą vadinsime *įprastiniu*, kai palūkanos išmokamos kiekvieną mėnesį ir skaičiuojant palūkanas atsižvelgiama į tai, kiek mėnesio laikotarpyje buvo mokėjimų ir kiek kartų kito palūkanos. Paskutinę vekselio termino dieną yra išmokama nepadengta vekselio vertė su neapmokėtomis palūkanomis.

Metodą vadinsime *mažėjančio balanso metodu*, jei mokėjimais yra dengiamos vekselio palūkanos. Palūkanos gali būti dengiamos iš dalies, pilnai arba su pertekliumi, tuo pačiu padengiant ir dalį vekselio nominalo, nuo kurio skaičiuojamos palūkanos.

Iš esmės abu metodai vienodi, tik *paprasto metodo* atveju palūkanos išmokamos kas mėnesį, o mažėjančio balanso metodo atveju, mokėjimais dengiamos palūkanos, o kartu yra apmokama ir dalis vekselio nominalo. Šie metodai iš esmės, juos formalizavus, nesiskiria.

Pastaba Aptartasis metodas gali būti taikymuose ir praplėstas, paskolos balansine verte laikant ne tik nominaliąją paskolos dalį, bet ir prie jos prijungtą nepadengtų palūkanų dalį, t.y. bet kokiu laiko momentu palūkanos skaičiuojamos ir nuo neapmokėtų palūkanų. Mes nagrinėsime tveje, kai palūkanos skaičuojamos nuo balansinės nominalo vertės.

Tarkime, kad vekselio terminas M dienų, nominalas A. Tegu iki pirmo palūkanų apmokėjimo P_1, buvo $t_{11}, \dots t_{1k}$ laikotarpių, kuriuose kito palūkanų norma, o laikotarpių palūkanų normos - $r_{11}, \dots, r_{1k}$ atitinkamai. Per šių laikotarpių sumą susidarė tokios palūkanos:

$$I_1 = (r_{11}t_{11} + \cdot + r_{1k}t_{1k})A,$$

ir $t_{11} + \cdots + t_{1k} \leq M$.

Jei $I_1 > P_1$, tai skirtumo $S_1^0 = P_1 - I_1$ absoliuti reikšmė yra nepadengtų palūkanų dydis, kuris nepridedamas prie pagrindinio kapitalo, tačiau apmokant vekselį, šis dydis bus atimtas iš nominalo (iš tiesų bus pridėtas, kadangi šis dydis neigiamas) ir toliau palūkanos skaičiuojamos nuo A. Kitu atveju, t.y. jei $I_1 < P_1$, tai dydis $S_1^1 = P_1 - I_1$ yra atimamas iš pagrindinio kapitalo ir toliau palūkanos skaičiuojamos jau nuo $A_1 = A - S_1^1$ vertės (kapitalo balansinė vertė sumažėja). Aptarkime dar vieną žingsnį:

Tegu iki antrojo palūkanų apmokėjimo P_2, buvo $t_{21}, t_{22}, \dots t_{2k}$ laikotarpių, o šias laikotarpiais palūkanos buvo $r_{21}, r_{22}, \dots r_{2k}$ atitinkamai. Per šių laikotarpių sumą susidarė tokios palūkanos:

$$I_2 = (r_{21}m_{21} + \cdot + r_{2k}m_{2k})B,$$

čia $B = A$, jei $I_1 > P_1$ ir $B = A_1$ jei $P_1 > I_1$, ir aišku, kad $m_{11}+\cdots+m_{1k}+m_{21}+\cdots+m_{2k} \leq M$.

Jei šiuo metu $I_2 - S_1^0 > P_2$, tai skirtumo $S_2^0 = P_2 - I_2 + S_1^0$ absoliuti reikšmė yra nepadengtų palūkanų dydis, atlikus du apmokėjimus, kuris nepridedamas prie pagrindinio kapitalo, tačiau apmokant vekselį, šis dydis bus atimtas iš nominalo (iš tiesų bus pridėtas, kadangi šis dydis neigiamas) ir toliau palūkanos skaičiuojamos nuo pagrindinio kapitalo vertės buvusios po paskutinio palūkanų apmokėjimo. Jei $I_2 - S_0^1 < P_2$, tai dydis $S_2^1 = P_2 - I_2 + S_2^0$ yra atimamas iš pagrindinio kapitalo ir toliau palūkanos skaičiuojamos jau nuo $A_2 = A - S_2^1$ vertės. Procesą kartojame priklausomai nuo to, kiek yra vekselio palūkanų dengimo kartų.

Pastaba Atkreipsime dėmesį, kad vekselio iki pareikalavimo dengimo metodika gali būti įvairi ir dėl vekselio apmokėjimo principų yra tariamasi. Aukščiau aprašytas metodas remiasi prielaida, kad jei kuriuo nors momentu dengiant palūkanas yra sumokama daugiau negu susikaupė palūkanų, tai sekančiuose žingsniuose laikoma, kad pagrindinė kapitalo vertė yra naujoji ir palūkanos toliau skaičiuojamos nuo naujosios kapitalo vertės.

Pavyzdys Kredito įmonė Balandžio 16 dieną, skolina 2000000 su 12% palūkanų norma, baldų gamybos įmonei apyvartinėms lėšoms palaikyti. Paskola buvo sudaryta pasirašantį vekselį iki pareikalavimo su kintamomis palūkanomis. Rugpjūčio 16 dieną palūkanų norma pakilo iki 14% , Lapkričio 16 d. iki 16% . Įmonė planuoja kredito įmonei grąžinti 100000 Birželio 25 dieną, Spalio 5 dieną dar 50000 ir Lapkričio 30 dieną dar 120000. Nustatykite, kokią sumą turės grąžinti įmonė Sausio 15 dieną.

Turime, kad $A = 2000000$. Nuo Balanžio 16 iki Birželio 25, kai buvo atliktas pirmasis mokėjimas, palūkanų norma nesikeitė, o dienų intervalas yra 70. Tad per šį laikotarpį palūkanos $I_1 = A \cdot 0,12 \cdot \frac{70}{365} \approx 46027$. Sumokėjus $P_1 = 100000$ amortizacinę įmoką, buvo padengtos palūkanos ir be to dalis skolos t.y. $S_1^0 = P_1 - I_1 = 100000 - 46027 = 53973$. Tada likusi skola $A_1 = A - 53973 = 1946027$.

Sekantis mokėjimas $P_2 = 50000$ buvo atliktas Spalio 5 dieną. Tačiau šiame intervale kartą keitėsi palūkanų norma, t.y. Rugpjūčio 16 padidėjo iki 16 %. Nuo paskutinio mokėjimo iki šios dienos praėjo 52 dienos. Tad per laikotarpį susidarė palūkanos $\frac{52 \cdot 0,12}{365} A_1 = 33269$, o per likusį laiko intervalą iki Spalio 5 dienos laiko tarpas yra 50 dienų, tad susidariusios palūkanos yra $\frac{50 \cdot 0,14}{365} A_1 = 37321$. Tad bendrai šiame laikotarpyje susikaupė tokios palūkanos

$$I_2 = 70590.$$

Kadangi šiuo momentu buvo sumokėta $P_2 = 50000$ įmoka, tad bendrai neapmokėtų palūkanų dalis yra $S_2^0 = 50000 - 70590 = -20590$.

Pastebėsime, kad nuo Spalio 5 d. iki Lapkričio 16 d., kuomet pasikeitė palūkanų norma praėjo 42 dienos, tad per šį laikotarpį susidarė palūkanos $\frac{42 \cdot 0,14}{365} A_1 = 31350$ ir nuo Lapkričio 16 kuomet keitėsi norma iki Lapkričio 30 dienos laiko intervalas 14 dienų, o susidariusių palūkanų norma $\frac{14 \cdot 0,16}{365} A_1 = 11943$. Šiuo metu buvo atliktas trečiasis mokėjimas $P_3 = 120000$. Šiuo metu bendra neapmokėtų palūkanų dalis buvo $I_3 = 20590 + 31350 + 11943 = 63883$. Tada

$$S_3^1 = 120000 - 63883 = 56117.$$

Šiuo mokėjimu ne tik padengiame susikaupusias palūkanas bet ir dalį sumos. Likusi skola yra

$$A_3 = A_1 - 56117 = 1889910.$$

Tada termino pabaigoje, Sausio 15 dieną (nuo paskutinio mokėjimo praėjus 46 dienoms) susidariusių palūkanų dydis

$$I_4 = \frac{46 \cdot 0,16}{365} A_3 = 38109.$$

Tad suma, kurią turės grąžinti paskutinę diena bus tokia

$$A_5 = 1889910 + 36109 = 9126019.$$

6.4 Forfeitingo metodas

Apibrėžimas Forfeitingu yra vadinamas kreditinių operacijų metodas, kuomet pirkėjas įsigydamas produktą išrašo vekselių komplektą sumai, kuri lygi įsigyjamo produkto vertei plius palūkanos už kreditą. Vekselio terminai (palūkanų ir dalies paskolos mokėjimo terminai) paskirstomi vienodai laiko atžvilgiu, paprastai pusmečiais.

Kredito apmokėjimas (vekselių portfelio išpirkimas)- tai skolos amortizavimo uždavinys, taikant metodą P3. Tarkime, kad paskolos portfelis yra P ir jis apmokamas per n vienodų laiko tarpų, kai kiekvienas mokėjimas S_t susideda iš vekselio nominalo mokėjimo $\frac{P}{n}$ ir palūkanų $I_t = P(1 - \frac{t-1}{n})i, \quad t = 1, \dots n$, $i-$ faktinė (laikotarpio kuriam praėjus atliekamas mokėjimas), palūkanų norma. Tada

$$S_t = \frac{P}{n} + I_t = \frac{P}{n}(1 + i(n - t + 1)).$$

Atkreipsime dėmesį, kad palūkanų seka yra aritmetinė progresija, kurios vardiklis $v = 1$. Tada visa palūkanų suma

$$I = \sum_{t=1}^{n} I_t = \frac{Pi}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} (n + 1 - t) = (n + 1)\frac{iP}{2}.$$

Gauname, kad vekselių portfelio (paskola su palūkanomis) vertė yra

$$S = \sum_{t=1}^{n} P_t + I_t = P(1 + (n + 1)\frac{i}{2}).$$

Paprastai vekselių portfelio valdytojas, esant reikalui, gali parduoti turimą portfelį, bet kokiu laiko momentu, kuris yra prieš portfelio išpirkimo terminą. Siekiant nustatyti vekselių portfelio pardavimo kainą, tenka daryti tam tikras prielaidas. Minimas prielaidas vadinsime paskolos grąžinimo strategijomis.

Panagrinėsime keletą paskolos grąžinimo strategijų.

1 Strategija

Darome prielaidą, kad kiekvienas mokėjimas į vekselių portfelį patenka su "svoriu," kuris charakterizuojamas šio mokėjimo grąžinimo terminu. Kitaip tariant, kuo vėliau mokėjimas sumokamas, tuo jo svoris didesnis. T.y. $k-$asis mokėjimas charakterizuojamas dydžiu $R_k = \frac{P}{n} \cdot (1 + ki)$. Tad kuo k didesnis, tuo didesnis R_k. Beje, visų R_k suma yra lygi galutinei vekselių portfelio vertei. Laikantis šios strategijos panagrinėkime vekselių portfelio įsigyjimo kainos nustatymo metodiką. Įdomu tai, kad nustatant vekselio kainą šiuo atveju tenka atkreipti dėmesį ne tik į rinkos palūkanų normą, bet ir į tai, kaip traktuojami ateities mokėjimai. Tarkime, kad $s \geq 1$ yra neneigiamas sveikasis skaičius, kurį naudosime mokėjimo laikotarpio numeriui žymėti. (Mokėjimai atliekami laikotarpio pabaigoje).

Nustatydami vekselio kainą bet kokiu momentu s, raide A_s žymėsime vekselių portfelio vertę s laikotarpio pradžioje. Nagrinėjamos strategijos atveju, nustatant vekselio kainą palūkanų mokėjimo laikotarpiu susiduriame su dviem problemomis - tai pirkėjo ir pardavėjo požiūriu į parduodamą portfelį. Nustatydami parduodamo vekselių portfelio kainą diskontuojame mokėjimus R_k. Pastebėsime, kad parduodant vekselių portfelį kiekvieno mokėjimo svoriai"perskaičiuojami" laikant, kad atskaitos terminas yra pardavimo momentas. Nesunku suprasti, kad diskontavimas atliekamas su tuometine rinkos norma.

Tarkime, kad nustatome portfelio kainą laiko momentu s, $1 \leq s \leq n$. Čia n yra bendras mokėjimo intervalų skaičius, s yra $s-$ ojo mokėjimo intervalo pradžia, portfelio faktinė palūkanų norma i, o faktinis diskontas d, kuris apibrėžiamas to meto faktine rinkos norma j. Priminsime, kad paprastųjų palūkanų atveju

$$d = \frac{j}{1 + tj}, \quad j = \frac{d}{1 - td},$$

t diskontuojamų mokėjimo laikotarpių skaičius.

Portfelio vertė, jo sudarymo momentu, kai rinkos palūkanų norma (pinigų vertė rinkoje) yra j, bus tokia:

$$A_1 = \sum_{t=1}^{n} S_t(1 - td_t),$$

d_t yra mokėjimo laikotarpio diskonto norma t-uoju mokėjimu.

Pateiktą lygybę užrašysime forma, kurioje bus nurodyta tiek vekselio tiek ir rinkos palūkanų normos. Padarykime prielaidą, kad vekselių portfelis yra parduodamas (įsigyjamas) sumokėjus $s-1$ mokėjimą su palūkanomis (primename, kad iš viso yra n mokėjimo laikotarpių.) Vadinasi, $s-$ ojo laikotarpio pradžioje dar liko $n-s+1$ mokėjimai, kuriuos kartu su palūkanomis gaus vekselių portfelio valdytojas. Tada vekselių portfelio įsigyjimo kainą, $s-$ojo mokėjimo intervalo pradžioje, galima užrašyti tokiu būdu:

$$A_s = \frac{P}{n}\sum_{t=1}^{n-s+1}(1+it)(1-\frac{tj}{1+jt}).$$

Pertvarkę šį reiškinį gauname, kad

$$A_s = P\Big(1-\frac{s-1}{n}+\frac{i-j}{n}\sum_{t=1}^{n-s+1}\frac{t}{1+jt}\Big).$$

2 Strategija

Aptarsime vekselių portfelio kainos nustatymo metodiką tuo atveju, kai yra diskontuojamos visų mokėjimų būsimosios vertės. Šiuo atveju gauname tokią formulę kainai nustatyti:

$$A_s = \frac{P}{n}\sum_{t=1}^{n-s+1}(1+i(n-s-t+1))(1-\frac{jt}{1+jt}).$$

Pertvarkę šį reiškinį gauname, kad

$$A_s = \frac{P}{n}\Big(n+\sum_{t=1}^{n-s+1}\frac{i(n-s+1)-t(i+j)}{1+jt}\Big).$$

Nesunku suprasti, kad vekselių portfelio kaina priklauso ir nuo rinkos palūkanų normos j. Pavadinkime porfelio pardavimo kainą *nominalia*, bet kokiu laiko momentu, kuris sutampa su mokėjimo terminu, jei pardavimo metu rinkos palūkanų norma ir vekselių palūkanų norma sutampa t.y. $i=j$.

Panagrinėkime atvejį, kai vekselių portfelis parduodamas (įsigyjamas), bet kokiu laiko momentu t, kuris nebūtinai sutampa su mokėjimo periodu. Tarkime, kad mokėjimo periodo ilgis yra T (šis laikotarpis gali būti reiškiamas dienomis, savaitėmis, mėnesiais ir t.t.) Tada visas vekselių portfelio laikotarpis yra nT. Tarkime, kad portfelis perkamas laiko momentu, kuris patenka į $s-$ ąjį mokėjimo intervalą. Be to tarkime, kad po $s-1-$ ojo mokėjimo praėjo t, $t \leq T$ ilgio laiko intervalas.

Tada vekselio kaina laiko momentu $(s-1)T+t$ yra skirstoma į dvi kainas: portfelio *įsigyjimo kainą* ir vekselio *rinkos kainą*. Kuo jos skiriasi? Asmuo, valdydamas vekselio porfelį, gali nustatyti vekselio kainą, bet kuriuo laiko momentu. Ši kaina, nustatyta su rinkos palūkanų norma bus vadinama *vekselio įsigyjimo kaina*. Kaip ją skaičiuoti? Pažymėkime šią kainą simboliu AP. Šią kainą skaičiuosime tokiu būdu:

1) Nustatome vekselių portfelio kainą A laiko momentu $T(s-1)$, t.y. paskutiniuoju sveikojo T kartotinio iki momento $(s-1)T+t$, kai buvo atliktas periodinis mokėjimas. Šios kainos radimo formulė pateikiama aukščiau;

2) Nustatome, kiek palūkanų susikaups per laiko intervalą t taikant kaupimą su rinkos palūkanų norma.

Tad palūkanų vertė laiko intervale t, kai rinkos palūkanų norma j bus tokia:

$$I^*(t) = \frac{At}{T} j.$$

Tada vekselio įsigyjimo kaina bus tokia

$$AP = A + I(t).$$

Kodėl yra pridedamos šios palūkanos? Priežastis yra ta, kad laiko intervalo t palūkanos dar priklauso portfelio valdytojui, tad įsigyjantys susimoka už jam nepriklausančias palūkanas.

Vekselio palūkanas suskaičiuotas su vekselio palūkanų norma vadinsime *vekselio faktinėmis susikaupusiomis palūkanomis*, t.y.

$$I^*(t) = \frac{At}{T} i.$$

Tada portfelio kainą sudarytą tokiu būdu:

$$AQ = AP - I^*(t)$$

vadinsime vekselių portfelio *rinkos kaina* momentu $(s-1)T + t$.

6.5 Vekselių diskontavimas sudėtinių palūkanų atveju

Vekseliai, sudaryti ilgesniam negu metai laikotarpiui, paprastai sudaromi remiantis sudėtinėmis palūkanomis. Šie vekseliai gali būti perkami arba parduodami prieš vekselio galutinį terminą. Kaip ir papratųjų palūkanų atveju, vekseliai gali būti su palūkanomis arba be palūkanų.

Tarkime, kad S yra vekselio galutinė verti kuri gali būti lygi nominalui (vekselis be palūkanų (BP)) arba su susikaupusiomis vekselio palūkanomis (vekselis su palūkanomis). Tegu P yra vekselio nominalioji vertė.

Sudarysime formulę vekselio kainai, bet kokiu laiko momentu iki išpirkimo, nustatyti. Tarkime, kad vekselis yra T laikotarpio, vekselio palūkanų norma yra p, palūkanos perskaičiuojamos k kartų per metus. Šis vekselis buvo diskontuotas likus t laikotarpiui iki išpirkimo, esant r palūkanų normai, kuri buvo perskaičiuojama m kartų per metus. Tada vekselio įsigyjimo kaina yra tokia:

$$B = \frac{P(1+\frac{p}{k})^{kT}}{(1+\frac{r}{m})^{mt}}.$$

Jei įsigyjimo metu vekselio ir rinkos palūkanų normos sutampa, tai

$$B = P(1+\frac{p}{k})^{kT-mt}.$$

Ši diskontuota vertė yra vadinama *vekselio pajamomis*, tiksliau kalbant, vekselio pajamomis diskontuojamu laiko momentu. Vekselio *d*iskontu, vekselio diskontavimo momentu kaip ir aukсčiau vadinsime skirtumą:

$$D = S - P = (1-\nu^n)S.$$

Pastebėsime, kad jei vekselis be palūkanų, tai diskontuojama nominali vekselio vertė, remiantis ta pačia formule t.y.

$$B = \frac{P}{(1+\frac{r}{m})^{mt}}.$$

Pavyzdys Raskime vekselio be palūkanų, kurio nominali vertė 150000 diskontuotą vertę iki galutinio termino likus dviems metams ir ketvirčiui, jei nominali palūkanų norma 15%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Turime $S = 150000, \quad i = \frac{15}{12} = 0,0125, \quad n = 27.$

Tada

$$P = \frac{150000}{(1+0,0125)^{27}} = 107257.$$

Diskontuojant vekselius su palūkanomis, diskontuota vertė skaičiuojama nuo galutinės vertės. Tad diskontuojant tokio pobūdžio vekselį visų pirma tenka nustatyti šio vekselio galutinę vertę.

Pratybų uždaviniai

1. Aštuonerių mėnesių vekselis, su $18,5\%$ palūkanomis, kurio nominalas 5050, pasirašytas Balandžio 16 dieną, buvo diskontuotas Rugsėjo 18 d. su $17,5\%$ palūkanų norma. Raskite diskonto dydį bei vekselio pajamas.

2. Raskite vekselio vertę pasirašymo metu, jei vekselis pasirašytas Kovo 20 dieną, keturiems mėn., pinigų vertė pasirašymo dieną yra $14,5\%$, nominalioji vertė 20000, ir vekselis be palūkanų.

3. Asmuo pasiskolino 60000 iš banko Balandžio 5d. su 15% palūkanomis. Garantuodamas grąžinimą, bankui pasirašė vekselį su mažėjančiu balansu bei kintamomis palūkanomis. Asmuo pirmąją 5000 įmoką grąžino Gegužės 10 dieną, antrąją 8000 įmoką atliko Rugsėjo 15 dieną ir trečiąją $1000-$ Spalio 15 d. Palūkanų norma Rugpjūčio 1d. pakilo iki 17%, o Spalio 1 dieną pakilo iki 20%. Nustatykite paskutinio mokėjimo, kuris turi būti atliktas Gruodžio 30 dieną, dydį. Kiek palūkanų sumokės bankui?

4. A.B. pasiskolino 305000 iš SEB banko Vasario 5d., palūkanos išmokamos kas mėnesį, t.y. kiekvieno mėnesio 5 dieną. Garantuodamas bankui, pasirašė vekselį iki pareikalavimo taikant įprastinį metodą. Pradžioje palūkanų norma 17%. A.B. pirmąją 60000 įmoką grąžino Liepos 25 dieną, o antrąją 160000 įmoką atliko Rugsėjo 21. Palūkanų norma Balandžio 16d pakilo iki 20%, o Spalio 1 dieną nukrito iki 16%. Nustatykite paskutinio mokėjimo, kuris turi būti atliktas Gruodžio 13 dieną, dydį? Kokią nominalią sumą sumokėjo A.B. bankui?

6. 10 vekselių, kurių kiekvieno nominalas 5000, palūkanų norma 14% portfelis yra apmokamas forfeitingo metodu. Nustatykite šio portfelio galutinę vertę, jei išpirkimo terminas po 5 metų. Nustatykite portfelio vertę likus 2,5 metų iki išpirkimo, jei šiuo metu palūkanų norma 16% (taikyti abi strategijas).

7. Penkerių metų vekselis, kurio nominalas 1650000, palūkanų norma 15%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį yra diskontuotas trys metai ir keturi mėnesiai po pasirašymo datos, su 18% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį. Raskite vekselio pajamas bei diskonto dydį.

8. Septynerių metų vekselis, kurio nominalas 100000 ir palūkanos 11%, perskaičiuojamos kas mėnesį, buvo diskontuotas dveji su puse metų prieš išpirkimą su palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį ir tame laikotarpyje duoda 140000 pajamas. Nustatykite su kokia palūkanų norma buvo diskontuotas vekselis.

9. Tarkime, kad 1000 vekselių portfelis yra apmokamas forfeitingo metodu kas pusmetį, 6 metų laikotarpyje. Paskolos (vekselio) palūkanų norma 10% vekselio nominalas 200.

1) Kokia vekselių portfelio įsigyjimo kaina jo sudarymo metu, jei skaičiuojant taikytume strategiją 1 ir strategiją 1;

a) pinigų vertė 10

b) pinigų vertė 8 procentai.

2) Nustatyti vekselių portfelio įsigyjimo kainą iki išpirkimo likus 2 metams ir 4 mėnesiams, taikant abi strategijas.

Ats: 1) $A_1^1 = 209830$; $A_1^2 = 215955$ 2) $A_s^1 = 209830$; $A_s^2 =$

6.6 Obligacijos

Apibrėžimas *Obligacija* yra vertybinis dokumentas, kuris sudaromas skolinantis pinigus iš investuotojo, nustatytam laiko intervalui.

Pasibaigus nustatytam laiko intervalui, kuris paprastai vadinamas *obligacijos periodu*, investuotojui grąžinami skolinti pinigai ir palūkanos. Obligacijos yra fiksuotų pajamų vertybiniai popieriai, kadangi investuotojas žino, kokią sumą gaus obligacijos valdymo laikotarpiu.

Obligacijų ir vekselių galutinės vertės nustatymo principai skiriasi metodo prasme nors turi ir nemažai panašumų. Panašumas yra tas, kad obligacijos, kaip ir vekselio, galutinė vertė formuojama iš dviejų dydžių- nominalo ir palūkanų. Obligacijos nuo vekselių skiriasi tuo, kad jos paprastai yra ilgalaikiai vertybiniai popieriai, vekseliai - trumpalaikiai vertybiniai popieriai ir be to skiriasi šių popierių įsigyjimo kainos nustatymo metodika bei palūkanų mokėjimo metodika. Obligacijas kaip ir vekselius galima laisvai pirkti bei parduoti.

Paprastai ūkinis subjektas norėdamas skolintis pinigus išleidžia obligacijas, pasižadėdamas nurodytu laiku jas išpirkti sumokėdamas nominaliąją vertę (kartais nominaliąją vertę su papildomomis sąlygomis) bei palūkanas.

Pateiksime dažniausiai naudojamų obligacijų rūšis:

1) *Obligacijos su fiksuotais kuponais* (fiksuota palūkanų norma). Šiuo atveju investuotojas gauna fiksuotas palūkanas, kai praeina nustatytas laiko intervalas, kuris vadinamas *atkarpa* arba *kuponų mokėjimo periodu.*

2) *Diskontuotos obligacijos.* Šiuo atveju obligacijos parduodamos už mažesnę kainą negu nominalas ir obligacijos termino palūkanas sudaro skirtumas tarp įsigyjimo ir išpirkimo kainų. Tokios obligacijos kartais vadinamos *su sukauptomis palūkanomis.*

3) *Obligacija su kintama palūkanų norma.* Šiuo atveju palūkanos nėra fiksuojamos ir jos nustatomos obligacijos išpirkimo metu remiantis tam tikslui numatyta metodika.

4) Obligacija vadinama *konvertuojama*, jei investuotojas išpirkimo meto turi galimybę rinktis- gauti nominalą su palūkanomis ar įsigyti bendrovės akcijų.

5) Obligacijas, kurių nominalas kartu su palūkanomis yra išperkami naudojant įprastinio anuiteto metodą, vadinsime *periodinėmis obligacijomis.*

6) Obligacija yra vadinama *serijine*, jei šis vertybinis popierius išperkamas dalimis įvairiais laiko momentais obligacijos periode.

Aptarsime bendrąsias sąvokos, kurios naudojamos operacijose su obligacijomis.

1) *Denominalas* tai dydis, nurodytas vertybiniame popieriuje. Nominalioji vertė gaunama šį denominalą padauginus iš 10. Mes naudosime nominalo sąvoką, t.y. laikysime, kad obligacijos vertė sutampa su nominalu.

2) *Obligacijos norma* arba kupono norma tai palūkanų, kurios skaičiuojamos nuo nominalios vertės, norma.

3) *Išperkamoji vertė (redemption value)* tai kaina, kurią sumoka subjektas išleidęs obligaciją, šio dokumento valdytojui.

4) *Obligacijos išpirkimo data (data of maturity arba redemption date)*, tai laiko momentas kuomet sumokama išperkamoji obligacijos vertė ir baigiamos mokėti palūkanos (paskutinis kuponas).

5) *Obligacijos įsigyjimo kaina* - tai kaina, kuri tuo metu mokama už įsigyjamą obligaciją.

6) *Obligacijos kuponas*- tai paprastosios palūkanos, kurios mokamos obligacijos valdytojui pasibaigus obligacijos palūkanų periodui. Kuponas visada skaičiuojamas nuo obligacijos nominaliosios vertės.

Pastaba Jei investuotojas turi mokėti mokesčius už gaunamas pajamas, tai šie mokesčiai skaičiuojami nuo gaunamų pajamų, t.y. gautų kuponų vertės.

Dauguma obligacijų yra išperkamos sumokant jų nominaliąją vertę. Tačiau yra obligacijų kurios, norint pritraukti daugiau pirkėjų yra parduodamos-perkamos ne būtinai tik pagal nominaliąją vertę. Šiuo atveju yra sakoma, kad obligacijos bus *išperkamos su premija*. Tai reiškia, kad obligacijos išperkamojo vertė bus didesnė negu nominalas. Pavyzdžiui obligacijos, kurios nominalas 1000 išperkama su premija 110, t.y. išpirkimo vertė sudaro 110% procentų nominaliosios vertės. Šiuo atveju sakysime, kad obligacija išperkame su verte 110 arba išperkama su premija. Kartais obligacijos gali būti išperkamos ir su verte, kuri mažesnė negu nominalas. Šiuo atveju sakoma, kad obligacija superkama su nuolaida. Obligacija su nuolaida 90, reiškia, kad obligacijos nominalas yra parduodamas su dešimties procentų nuolaida.

Panašiu būdu praktikoje yra įsigyjamos obligacijos prieš jų išpirkimo terminą. Kitaip tariant obligacijos gali būti perkaos (parduodamos) taip pat su premija ir nuolaida.

Investuotojas (obligacijos pirkėjas) tikisi gauti periodines įplaukas obligacijos valdymo laikotarpiu, o sulaukus išpirkimo momento- gauti sumą nurodytą obligacijos nominale arba galutinę vertę kuri yra su nuolaida arba premija. Taigi, išpirkimo metu obligacijos išpirkimo vertė gali ir nesutapti su nominalu.

6.7 Obligacijos su kuponais

Tam, kad palengvinti palūkanų mokėjimus dauguma obligacijų turi fiksuotas terminuotas palūkanas (kuponus), kurios gali būti išgrynintos bankuose suėjus palūkanų mokėjimo periodui. Kuponai R skaičiuojami kaip procentas nuo oligacijos nominalo (detaliau pateiksime žemiau.)

Pavyzdžiui, 20-ties metų 1000 nominalo obligacija, kurios palūkanų norma 10% yra apmokama kas pusmetį, turi susietus 40 kuponų, kurių kiekvieno vertė 50. Jei šie kuponai nebus išgryninti tai obligacijos laikotarpyje jų bendra vertė su palūkanomis bus lygi anuiteto $50 \cdot 40_{\rceil 0.05}$ būsimąjai vertei. Nustatant obligacijos vertę (pardavimo kainą) laiko momentais, kurie yra prieš obligacijos išpirkimo terminą, dalyvauja dvi palūkanų normos, t.y. obligacijos palūkanų norma p ir rinkoje vyraujanti sudėtinių palūkanų norma r, kartais sakoma pinigų vertė rinkoje, kuri paprastai nurodoma procentais. Nustatydami obligacijos dabartinę kainą tenka naudoti šias dvi normas. Simboliu $i = \frac{r}{m}$ žymėsime palūkanų normą tenkančią mokėjimo periodui arba kitaip tariant, tai faktinė palūkanų norma. Nustatant obligacijos vertę naudojama tuo metu esanti sudėtinių palūkanų norma todėl, kad laikoma, kad kuponai yra reinvestuojami jų išmokėjimo momentu su rinkos palūkanų norma, kuri buvo obligacijos įsigyjimo metu.

Trumpai pažymėkime:

$R-$ kupono dydis (nominali vertė);

$n-$ kuponų mokėjimo periodų, iki išpirkimo, skaičius ;

$i-$ faktinė palūkanų norma tenkanti kupono periodui. Ši palūkanų norma gali būti vadinama obligacijos diskonto palūkanų norma, kadangi ji taikoma nustatant obligacijos vertes anksčiau negu išpirkimo terminas.

$p-$ obligacijos palūkanų norma. Ši palūkanų norma taikoma nustatant obligacijos kupono dydį.

$k-$ kuponų, mokamų per metus, skaičius.

$m-$ palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius metuose.

6.8 Paprastojo anuiteto atvejis

Nagrinėsime situaciją, kai obligacijos įsigyjamos kuponų (palūkanų) mokėjimo metu ir be to viso obligacijos galiojimo metu palūkanų normos perskaičiavimo periodų skaičius sutampa kuponų mokėjimų skaičiumi metų intervale.

Tarkime, kad A vertės (nominalo) obligacija, su palūkanų norma q, palūkanos (kuponai) išmokamos k kartų per metus, T metų laikotarpyje. Rasime obligacijos įsigyjimo kainą, kai iki išpirkimo liko n laikotarpių, jeigu rinkos palūkanos yra r, palūkanos perskaičiuojamos m kartų per metus.

Apibrėžimas Obligacijos kainą įsigyjimo (pardavimo) momentu, vadinsime *obligacijos įsigyjimo kaina* (*flat bond price*) ir žymėsime FP.

Tegu $A-$ obligacijos nominalas, k yra kuponų skaičius tenkantis metų laikotarpiui, q obligacijos palūkanų norma. Tada pastovių palūkanų arba kitaip, kupono vertė, nustatoma tokiu būdu:

$$R = \frac{A \cdot q}{k}.$$

Bendras kuponų skaičius tarp įsigyjimo ir išpirkimo terminų yra $n = T \cdot k$, čia T yra laikas metais iki išpirkimo termino.

Tarkime, kad A vertės obligacija su kuponų palūkanų norma q, kuponai mokami k kartų per metus, išperkama su K verte (kuri gali būti tiek premija, tiek diskontas). Tada išperkamoji vertė $S = \frac{AK}{100}$. Rasime obligacijos įsigyjimo kainą, kuponų mokėjimo metu, jeigu palūkanų norma rinkoje r, palūkanos perskaičiuojamos m kartų per metus.

Turime, kad $S = A\frac{K}{100}$. Kupono vertė

$$R = \frac{A \cdot q}{k}.$$

Tada $n = T \cdot k$, T kaip ir aukščiau yra laikas išreikštas metais, iki išpirkimo termino ir $i = \frac{r}{m}$. Obligacijos įsigyjimo kaina *kuponų mokėjimo metu* sudaroma diskontuojant išperkamąją obligacijos vertę ir diskontuojant visus kuponus su įsigyjimo metu esama diskonto palūkanų norma. Įsigyjimo kaina *kuponų mokėjimo metu* sudaroma tokiu būdu:

$$FP := P + A_n := S(1+i)^{-n} + Ra_{n\rceil i}.$$

Tuo atveju, kai obligacija išperkama pagal nominalą (au pair), tai išperkamoji vertė lygi nominalui, $S = A$.

Pastaba Kuponų vertė visuomet skaičiuojama nuo nominalo.

Subjektas išleidžiantis obligacijas paprastai jų vertę (nominalą) garantuoja turimu turtu. Obligacijos, kurios nėra padengtos turtu yra vadinamos *skoliniu įsipareigojimu.* Buvo minėta, kad obligacijos gali būti laisvai parduodamos arba perkamos. Tada, kai investuotojas įsigyja obligaciją, jis tuo pačiu įsigyja du įsipareigojimus:

1) bus sumokėta išperkamoji vertė išpirkimo metu;

2) bus periodiškai mokami kuponai.

Kita vertus investuotojas įsigyjęs obligacijas susiduria su dviem problemomis:

1. Kokia obligacijos įsigyjimo kaina (dar vadinama ir įsigyjimo verte), kai žinoma grąžos norma (pinigų vertė)?

2. Kokia obligacijos palūkanų norma, jei perkame obligaciją esant kažkokiai pardavimo kainai?

Pavyzdys 1000 nominalo obligacija , su 10% palūkanų norma, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį, yra išperkama po ketverių metų. Kokia obligacijos įsigyjimo kaina dabar, jei pirkimo metu pinigų vertė 12%, kurie perskaičiuojami kas pusmetį?

Pirkėjas gauna du pažadus:

1. pažadą, kad po ketverių metų bus sumokėta 1000 už obligaciją;

2. pažadą, kad 50 kuponai bus apmokėti kas pusmetį.

Pagrindinis terminas, kuriame vertiname obligaciją yra 'dabar'. Be to palūkanų norma kuria remdamiesi vertinsime lygi 12%, o palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

Skaičiuosime išperkamosios 1000 vertės dabartinę vertę. Tokiu būdu:

$A = 1000, \quad n = 8, \quad i = 0,06$. Diskontuodami šią vertę gauname dabartinę vertę

$$P = 1000(1.06)^{-8} = 627,41.$$

Kas pusmetį mokamų palūkanų dabartinių verčių suma yra įprastinis anuitetas, todėl naudodami įprastus žymenis $R = 50, \quad n = 8, \quad i = 0,06$ gauname visų kuponų dabartinę vertę

$$A_n = 50 \cdot a_{8\rceil 0,06} = 50 \cdot 6,21 = 310,5.$$

Vadinasi įsigyjimo kaina yra apskaičiuotų verčių suma $FP = P + A_n = 627,41 + 310.5 = 937,91$.

Pastaba Dvi palūkanų normos naudojamos nustatant įsigyjimo kainą:

1. Obligacijų norma, kuria apibrėžiame kupono vertę;

2. Grąžos norma, kuri naudojama apibrėžiant dviejų įsipareigojimų dabartines vertes.

Pavyzdys 500000 obligacija, su 10.5% kuponais, kurie mokami kas pusmetį, yra išperkama po dešimties metų. Kokia obligacijos įsigyjimo kaina, jei parduodant, palūkanų norma 9% palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį?

Turime, kad

$A = 500000, \quad R = \frac{500000 \cdot 0,105}{2} = 26250, \quad n = 20, \quad i = 0,045.$

Tada

$$FP = 500000 \cdot (1.045)^{-20} + 262500 \cdot a_{20\rceil 0,045} = 207321 + 341458 = 548779.$$

Pavyzdys Obligacijos nominalas 10000, kuri išperkama po 25 metų, su išperkamąja 106% verte. Kupono norma 8% apmokami kas pusmetį. Kokia obligacijos įsigyjimo kaina, jei pinigų vertė 10% procentų kurie perskaičiuojami kas pusmetį?

Obligacijos išpirkimo kaina

$S = 10000 \cdot 1,06 = 10600$. Kupono vertė $R = \frac{10000 \cdot 0,08}{2} = 400, \quad n = 50, \quad i = 0,05$. Tada įsigyjimo kaina yra

$$FP = 10600 \cdot 1,05^{-50} + 400 \cdot a_{50\rceil 0,05} = 924,36 + 7302,37 = 8226,73.$$

6.9 Kompleksinio anuiteto atvejis

Mes nagrinėjome problemą, kai palūkanų mokėjimo periodas bei grąžos normos perskaičiavimo periodas sutapdavo. Spręsdami obligacijos vertės nustatymo uždavinį naudojome paprastojo anuiteto skaičiavimo formules. Tuo tarpu kai minėti periodai ne sutampa, teka naudoti kompleksinio anuiteto formules.

Kaip ir aukščiau, obligacijos įsigyjimo kainą žymėkime FP^c, o nominalą raide A. Laikysime, kad obligacijos palūkanų norma yra q kuponai mokami k kartų per metus. Tada pastovių palūkanų arba kitaip, kupono vertė nustatoma tokiu būdu:

$$R = \frac{A \cdot q}{k}.$$

Bendras palūkanų mokėjimų skaičius yra $n = T \cdot k$ čia T yra laikas metais iki išpirkimo termino. Tegu pinigų vertė arba rinkos palūkanų norma yra r ir palūkanos perskaičiuojamos m kartų per metus. Tada faktinė palūkanų norma yra $i = \frac{r}{m}$. Šiuo atveju turime, kad kuponų mokėjimo intervalo ir palūkanų perskaičiavimo intervalo ilgiai gali ir nesutapti. Vadinasi šiuo atveju turime kompleksinį anuitetą, o kuponų mokėjimo intervalo efektyvioji norma p nustatoma tokiu būdu:

$$p = (1+i)^{\frac{m}{k}} - 1.$$

Tad šiuo atveju obligacijos dabartinės vertės skaičiavimo formulė bus tokia:

1.

$$FP^c = A(1+p)^{-n} + Ra_{n\rceil p}.$$

2. Tarkime, kad obligacijos išperkamoji kaina A, o obligacija išperkama su verte K, (premija arba nuolaida), tai šiuo atveju obligacijos vertė nustatoma tokiu būdu:

$$FP^c = A\frac{K}{100}(1+p)^{-n} + Ra_{n\rceil p}, \quad q = (1+i)^c - 1,$$

priminsime, kad kuponas skaičuojamas nuo obligacijos vertės.

Pastebėsime, kad $n-$ yra kuponų skaičius.

Pavyzdys Obligacijos, kurios nominalas 100000 yra išperkama su 103% verte, palūkanų norma 11.5% procentų, palūkanos mokamos kas pusmetį, yra nupirkta aštuoneri metai iki išpirkimo, obligacijų grąža 10% perskaičiuojama kas ketvirtį. Nustatykite obligacijos įsigyjimo kainą.

Turime, kad

$S = 100000 \cdot 1,03 = 103000, \quad R = 100000 \cdot \frac{0{,}115}{2} = 5750.$

$n = 16,\ c = \frac{4}{2} = 2, \quad i = \frac{0{,}1}{4} = 0,025 \quad p = 1,025^2 - 1 = 0,0506.$

Tada dabartinė išperkamosios vertės kaina yra

$$S = 103000 \cdot (1,0506)^{-16} = 46738,37.$$

Dabartinė pusmečio kuponų sumos vertė yra

$$A_n^c = 5750a_{16\rceil 0{,}0506} = 62040,87.$$

Tada pradinė kaina yra

$$FP^c = P + A_n^c = 108779,24.$$

6.10 Obligacijos įsigyjimo ir rinkos kaina

Aukščiau nagrinėjome obligacijos įsigyjimo kainą momentu, kuris sutampo su kupono mokėjimo terminu. Paprastai prekiaujant obligacijomis nėra kreipiamas dėmesys į tai ar pirkimo metu kupono periodas yra pasibaigęs ar ne. Šiuo atveju kyla problema- kaip nustatyti obligacijos kainą laiko momentu, kuris nesutampa su obligacijos kupono periodu?

Aptarsime, kaip yra nustatoma obligacijos įsigyjimo kainą (flat price), bet kokiu laiko momentu y.

Tarkime, kad obligacijos įsigyjimo kaina nustatoma terminui $y \in [x, x+u]$, čia x ir $x+u$ yra du gretimi kuponų mokėjimo terminai, u yra dienų skaičius tenkantis kupono periodui, o s yra dienų skaičius tarp termiinų x ir y.

1. Visų pirma nustatoma obligacijos kaina PV paskutiniu palūkanų terminu x (prieš įsigyjimą)

$$PV = A(1+i)^{-l} + Ra_{l\rceil i},$$

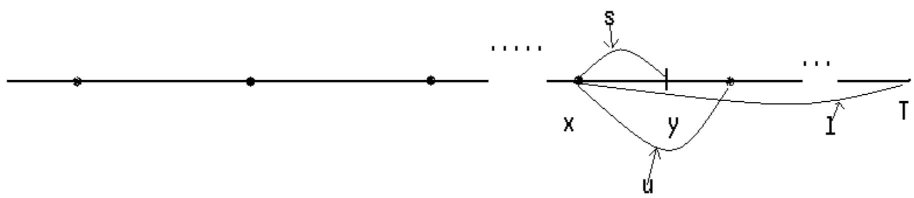
čia i yra pinigų vertė obligacijos įsigyjimo metu, l yra kuponų mokėjimo periodų skaičius nuo termino x iki išpirkimo (žr. 4.1 pav.).

2. Tada obligacijos įsigyjimo kaina momentu y yra nustatoma naudojant būsimosios vertės skaičiavimo formulę paprastų palūkanų atveju, taikant nominaliąją (tuometinę rinkos) grąžos normą, dienų skaičiui s, (žr. 4.1 pav.) tarp paskutiniojo kupono apmokėjimo termino x ir įsigyjimo datos y ir gautą vertę pridėjus prie obligacijos vertės gautos terminu x :

$$FP(i) = P(1 + i\frac{s}{u}).$$

Dydis $\frac{Pis}{u}$ vadinamas *susikaupusiomis palūkanomis*, o obligacijos įsigyjimo kaina dar vadinama "purvina kaina."

Tokią kainą obligacijos valdytojui turėtų mokėti ją įsigyjantis subjektas, kai obligacijos valdytojas nepasiima sau priklausančios kupono dalies už s dienų laikotarpį.



2.4 pav. Obligacijos kaina

Pastebėsime, kad kompleksinio anuiteto atveju, faktinę palūkanų normą i, tenkančią perskaičiavimo laikotarpiui, tektų keisti norma $p = (1+i)^c - 1$, čia $c = \frac{m}{k}$, m yra rinkos nominaliosios palūkanų normos perskaičiavimo periodų skaičius, o k yra kuponų perskaičiavimo skaičius per metus.

Apibrėžimas Obligacijos *faktinėmis susikaupusiomis palūkanomis* (the actual accrued interest) vadinsime nominalo procentinę dalį taikomą dienų skaičiui s, su obligacijos palūkanų norma. Faktinių susikaupusių palūkanų vertę žymėsime simboliu AI.

Tarkime, kad obligacijos nominalas A. Tegu obligacijos palūkanų norma p, kurios išmokamos k kartų per metus. Tada faktinės palūkanos yra tokia vertė

$$AI = \frac{A \cdot p \cdot s}{ku},$$

$u-$ dienų skaičius kupono periode. Pastebėsime, kad jei $u = s$, tai šiuo atveju faktinės palūkanos sutampa su kuponu.

Pavyzdys Obligacija, kurios nominalas 500000, palūkanomis 12% , kurios perskaičiuojamos kas pusmetį, kuponai apmokami Balandžio 1 ir Spalio 1 terminais, yra įsigyta Rugpjūčio 25 dieną su 104,75 verte. Nustatykite faktines palūkanas.

Turime, kad galutinė kaina yra

$$S = 500000 \cdot 1,0475 = 523750.$$

Laiko intervalas tarp Balandžio 1 ir Rugpjūčio 25 dienos yra 146 dienos; bendras dienų skaičius, tenkantis perskaičiavimo periodui (Balandžio 1 iki Spalio 1) yra 183 dienos. Tada

$$A = 500000 \qquad i = 0,06; \;\; t = \frac{146}{183}.$$

Faktinės palūkanos yra

$$AI = 500000 \cdot (0,06) \cdot \frac{146}{183} = 23934,43.$$

Paprastai obligacijos yra perkamos arba parduodamos siekiant įvairiausių tikslų. Tai gali būti apyvartinių lėšų poreikiui kompensuoti, plėtrai finansuoti, perkant yra investuojama, siekiant ateityje gauti pelną. Prekyboje obligacijos yra siūlomos *rinkos kaina*, kuri dar kartais vadinama *švaria kaina*. Rinkos kaina gaunama iš įsigyjimo kainos "purvinos kainos" atėmus faktines susikaupusias palūkanas (teisę į kurias įgyja ankstesnysis obligacijos valdytojas).

Apibrėžimas Obligacijos rinkos kaina vadinsime skirtumą tarp įsigyjimo kainos ir faktinių palūkanų. Šio skirtumo absoliučią vertę žymėsime simboliu QP.

Remdamiesi apibrėžimu gauname:

$$QP = FP - AI, \quad \text{arba} \quad FP = QP + AI.$$

Kitaip tariant, obligacijos rinkos kaina yra kaina paskutiniame palūkanų perskaičiavimo periodo taške, esant tuometinei pinigų vertei.

Esant stabiliai ekonominei situacijai, obligacijos yra siūlomos už rinkos kainą ir papildomai yra pridedamos faktinės palūkanos, taip suformuojant įsigyjimo kainą.

Pastaba Įsigyjimo kaina (flat price)- tai kaina, kurią gauna obligacijos valdytojas ją parduodamas. Rinkos kaina (quoted price)- tai kaina, kuria obligacijomis prekiaujama rinkoje. Jei obligacija įsigyjama palūkanų (kupono) mokėjimo laikotarpiu, tai šiuo metu $FP = QP$.

Pavyzdys Tarkime, kad obligacija, kurios nominalas 1000, palūkanos 10% mokamos kas pusmetį, išperkamos 2010 birželio 1d. Kokia obligacijų kaina 2008 vasario 18, jei palūkanų norma 9%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį?

Pusmečio kuponas yra

$$R = 1000\frac{0,1}{2} = 50.$$

Tada $n = 5$, dienų skaičius nuo Gruodžio 1d. 2007 iki Birželio 1d. 2008 m. yra $u = 183$, $s = 79$ ir $i = 0,045$. Obligacijos kaina 2007, Gruodžio 1 dienai yra

$$P = A(1,045)^{-5} + 50a_{5\rceil 0,045} = 1021.95.$$

Įsigyjimo kaina Vasario 18 dienai yra

$$FP = 1021,95(1 + 0,045\frac{79}{183}) = 1041,8.$$

Suskaičiuokime obligacijos rinkos kainą. Randame faktines susikaupusias palūkanas, kurios yra

$$AI = R\frac{s}{u} = 50 \cdot \frac{79}{183} = 21,58.$$

Tada rinkos kaina

$$QP = FP - AI = 1041,8 - 21,58 \approx 1020.$$

Apibrėžimas Obligacijos *kursu* vadinsime tokį skaičių:

$$Q = \frac{QP \cdot 100}{A}.$$

Kurso nustatymo veiksmas dažnai vadinamas *kotiravimu.*

Tarkime, kad $Q > 100$ ir Šiuo atveju sakysime, kad obligacijos kursas $Q - 100$ procentų didesnis negu nominalas ir jei $Q < 100$, tai sakysime, kad obligacijos kursas $100 - Q$ procentų mažesnis negu nominalas.

Aukščiau pateiktame pavyzdyje matome, kad obligacijos pardavimo metu kursas 2% didesnis negu nominalas. Šiuo metu parduodant nagrinėtą obligaciją būtų galima ją parduoti su dviejų procentų premija (verte 102).

Pavyzdys 5000 nominalo obligacija su 10,5% kuponais, kurie mokami kas pusmetį yra išperkama po 6-erių metų ir 10 mėnesių. Nustatykite:

1) įsigyjimo kainą;
2) faktines palūkanas;
3) rinkos kainą;
4) kursą.

Laikome, kad įsigyjimo metu pinigų vertė 11,5%, kurie perskaičiuojami kas pusmetį.

Išperkamoji vertė $A = 5000$. Kupono vertė yra $R = 5000 \cdot \frac{0,105}{2} = 262,5$.

Be to $n = 14$, $i = 0,0575$. Įsigyjimo kaina laiko momentu, kuomet palūkanų perskaičiavimo periodas sutampa su įsigyjimo momentu yra

$$PV = 5000 \cdot 1,0575^{-14} + 262,5 \cdot a_{14\rceil 0,0575} = 2161,55 + 2591,63 = 4753,18.$$

Tam, kad sukaupti būsimąją vertę po dviejų mėnesių ($u = 6$, $s = 2$)skaičiuojame:

$$PV = 4753,18, \quad i = 0,0575, \quad t = \frac{2}{6} = 0,3(3).$$

Tada įsigyjimo kaina nustatytu laiko momentu yra

$$FP = PV(1 + i \cdot t) = 4753,18(1 + 0,00575 \cdot \frac{1}{3}) = 4844,28.$$

Faktinės palūkanos $AI = 5000 \cdot 0,0525 \cdot \frac{1}{3} = 87,50$.

Rinkos kainą gauname tokiu būdu: $QP = FP - AI = 4844,28 - 87,50 = 4756,78$.

Rinkos kaina

$$Q = \frac{4756.78}{5000} \cdot 100 \approx 95,1\%.$$

Gauname, kad įsigyjimo metu obligacija kotiruojama maždaug 5% prasčiau negu nominalas. Prekiaujant rinkoje rinkoje turėtų būti siūloma obligaciją parduoti su verte 95, 1.

6.11 Obligacijų nuolaidos ir pajamos

Spręsdami obligacijų įsigyjimo kainos uždavinį susidūrėme su problema, kad obligacijos rinkos kaina gali būti tiek didesnė, tiek mažesnė negu išpirkimo kaina (tiksliau kalbant, išpirkimo kainos diskontuota vertė su obligacijos palūkanų norma). Jei rinkos kaina yra didesnė negu išpirkimo kaina, tai sakoma, kad obligacija parduodama su pajamomis ir skirtumas tarp įsigyjimo ir išpirkimo kainų vadinami *p*ajamomis. Tegu S obligacijos išpirkimo kaina. Taigi, obligacija bus parduodama su pajamomis, jei

$$PR = QP - S > 0,$$

čia QP yra rinkos kaina.

Jeigu obligacijos rinkos kaina yra mažesnė negu išpirkimo kaina, tai sakysime, kad obligacija parduodama su nuolaida. Skirtumas tarp išpirkimo kainos ir įsigyjimo kainos vadinamas nuolaida ir žymimas D. Taigi,

$$D = S - QP, \quad S > QP.$$

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad terminai "pajamos" ir "nuolaidos" taikomos obligacijos valdytojui, o ne ją įsigyjančiam subjektui.

Tegu q yra obligacijos norma ir $r-$ rinkos palūkanų norma, $i = \frac{r}{m}$ yra faktinė rinkos palūkanų norma. Obligacijos norma yra palūkanų norma, kurios obligacijos valdytojui yra mokamos kiekvieno periodo pabaigoje (kuponų forma.) Ši norma stabili ir nepriklauso nuo situacijos rinkoje. Tuo tarpu rinkos norma yra kintanti ir priklauso nuo pinigų vertės kiekvienu pasirinktu laiko momentu. Pastebėsime, kad šios dvi normos nebūtinai sutampa. Nesunku suprasti, kad jei obligacijos norma yra mažesnė negu rinkos norma, tai obligacija bus parduodama tuo metu už mažesnę kainą negu išperkamoji vertė, kitaip tariant su nuolaida. Kitu atveju priešingai, su pajamomis. Jei šios dvi normos sutampa, tai įsigyjmo kaina ir nominali sutaps (jei obligacija išperkama pagal nominalą). Visas šias tris situacijas, kai obligacija išperkama pagal nominalą, galime charakterizuoti tokiu būdu:

1) $q = r$- parduodama pagal nominalą;
2) $q < r$- parduodama su nuolaida;
3) $q > r$- parduodama su pajamomis.

Pavyzdys Tarkime, kad 10000 vertės nominalo obligacijos palūkanos yra 10%, kuponai mokami kas pusmetį. Nustatykite obligacijos įsigyjimo kainą dešimt metų prieš išpirkimo terminą, jei rinkos palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį ir:

a) r=10% ;
b)r=12% ;
c) r=8% .

Turime
$A = 10000; \quad R = 10000 \cdot 0,05 = 500; \quad n = 20; \quad i = 0,05.$
a) Šiuo atveju $q = r$ ir $i = 0,05$.
Rinkos (įsigyjimo) kaina

$$QP = 10000 \cdot 1.05^{-20} + 500 a_{20\rceil 0,05} = 3768,9 + 6231,1 = 10000.$$

Taigi, parduodama pagal nominalą.

b) Šiuo atveju turime, kad $i = 0,06$, taigi $q < r$.

Tada rinkos (įsigyjimo) kaina yra

$$QP = 10000 \cdot 1,06^{-20} + 500a_{20\rceil 0,06} = 3118,05 + 5734,96 = 8853,01$$

Šiuo atveju obligacija parduodama su nuolaida.

Nuolaidos dydis yra $D = 10000 - 8853,01 = 1146,99$.

c) Jei $i = 0,04$, tai $q > r$.

Rinkos kaina yra

$$QP = 10000 \cdot 1,04^{-20} + 500a_{20\rceil 0,04} = 4563,87 + 6795,16 = 11359,03.$$

Šiuo atveju kaina didesnė negu nominalas. Tad vertė yra su pajamomis. Pajamų dydis yra $11359,03 - 10000 = 1359,03$.

Matome, kad pajamos (nuolaidos) gaunamas nagrinėjant skirtumą tarp $\frac{q}{k}$ ir i. Pajamos bus gaunamos, jei $\frac{q}{k} > i$. Pajamos yra skaičiuojama remiantis skirtumu $\frac{q}{k} - i$. Detaliau panagrinėkime šį faktą. Tarkime, kad obligacijos nominalas A, o S išpirkimo kaina. Tegu k mokėjimo periodų skaičius per metus. Tada periodiniai obligacijos mokėjimai (kuponai) yra $A \cdot \frac{q}{k}$. Jei rinkos palūkanų norma yra r ir jos perskaičiuojamos $m = k$ (paprastojo anuiteto atvejis) kartų per metus, tai parduodant obligaciją reikia nustatyti kupono laikotarpiui tenkančią išperkamosios vertės dalį, su rinkos palūkanų norma Ši dalis yra tokia $S \cdot \frac{r}{k}$. Tegu Δ yra obligacijos palūkanų periodo pajamos. Tada šias pajamas galime išreikšti tokia lygybe:

$$\Delta = \frac{A \cdot q - S \cdot r}{k}.$$

Šios pajamos gali būti tiek teigiamos tiek neigiamos. Tarkime, kad šios pajamos teigiamos. Tada visų laikotarpių diskontuotų pajamų suma, kai iki išpirkimo yra n laikotarpių yra bendrosios pajamos arba kitaip tariant premija:

$$PR_n = \Delta a_{n\rceil i} = (A \cdot q - S \cdot r)\frac{a_{n\rceil i}}{k}.$$

Remdamiesi tuo, kas buvo pasakyta aukščiau gauname, kad nuolaida yra skaičuojama kaip ir premija, tik su priešingu ženklu:

$$D_n = -\Delta\frac{a_{n\rceil i}}{k} = -PR_n,$$

čia $k-$ palūkanų mokėjimo skaičius per metus, o n diskontavimo laikotarpių skaičius.

Aptarsime analogišką uždavinį kompleksinio anuiteto atveju, t.y. kai palūkanų perskaičiavimo periodas nesutampa su kupono periodu. Tarkime, kad kupono palūkanų norma yra q ir kuponai mokami k kartų per metus, o nominali palūkanų norma yra r, palūkanos perskaičiuojamos m kartų per metus. Visų pirma nustatome efektyviąją mokėjimo laikotarpio normą

$$p = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{k}} - 1.$$

Tada premijos ir diskonto skaičiavimo formulėse naudojamas dydis Δ skaičiuojamas tokiu būdu:

$$\Delta = A \cdot \frac{q}{k} - S \cdot p.$$

Pavyzdys 25000 nominalo obligacija buvo išperkama su 104 premija 2021 Liepos 1d, su 11% ketvirčių kuponais įsigyta 2012, Gegužės 20, kai palūkanos buvo 10% , perskaičiuojamos kas ketvirtį. Nustatykite:

1) pajamas arba nuolaidą;

2) įsigyjimo kainą;

3) rinkos kainą?

Turime

$S = 25000 \cdot 1,04 = 26000; \qquad i = 0,025; \ \frac{q}{k} = 0,0275.$

Palūkanų mokėjimo terminai yra Spalio 1d., Sausio 1d., Balandžio 1d. ir Liepos 1d. Laikotarpis tarp obligacijos įsigyjimo bei išpirkimo yra 9 metai ir 3 mėnesiai. Taigi $n = 37$. Tada pajamos 2012 balandžio 1d. yra tokios

$$PR = (25000 \cdot 0,0275 - 26000 \cdot 0,025)a_{37\rceil 0,025} = 898,40.$$

Įsigyjimo kaina 2012 Balandžio 1d. yra $P_1 = 26000 + 898,4 = 26898,4$. Laiko tarpas tarp Balandžio 1d ir Gegužės 20 apima 49 dienas; palūkanų periodas tarp Balandžio 1 ir Liepos 1d. apima 91 dieną. Todėl

$P_1 = 26898,4, \quad i = 0,025, \quad t = \frac{49}{91}$. Susikaupusi vertė 2012 Gegužės 20 dienai yra tokia:

$$FP = 26898.40(1 + 0.025\frac{49}{91}) = 27260,49.$$

Faktinės palūkanos Gegužio 20 dieną yra $AI = 25000 \cdot 0,0275\frac{49}{91} = 370,19$. Rinkos kaina yra lygi $QP = 27260,49 - 370,19 = 26890,3$. Taigi 2012 Gegužės 20 dieną:

1) pajamos yra 26890,30- 26000=890,3;

2) įsigyjimo kaina 27260,49;

3) rinkos kaina 26890,30.

6.12 Periodinės, serijinės ir be kuponų obligacijos

Apibrėžimas Obligacija, kurios nominalas kartu su palūkanomis yra išperkama naudojant įprastinio anuiteto metodą, vadinsime *periodinėmis obligacijomis.*

Panagrinėkime periodinę obligaciją, kurios nominalas A, kupono norma q kuponai mokami k kartų per metus, o obligacija išperkama per n laikotarpių.

Tada kuponas nustatomas tokiu būdu: $R = \frac{A}{a_{n\rceil \frac{q}{k}}}$.

Jei obligacija parduodama likus iki išpirkimo s kupono mokėjimų, kai rinkos norma r, tai šiuo atveju isigyjimo kaina nustatoma sąryšiu $QP = Ra_{s\rceil \frac{r}{m}}$, o obligacijos premija (nuolaida) nustatoma iš sąryšio

$$PR = R(a_{s\rceil \frac{q}{m}} - a_{s\rceil \frac{r}{m}}).$$

Pavyzdys Tarkime, kad 12% periodinė obligacija, kurios nominalas 4000000 yra išperkama vienodais pusmečio mokėjimais, per dešimt metų. Šiuose mokėjimuose įskaičiuotas nominalas ir palūkanos.

1) Nustatykite kokia yra įsigyjimo kaina, jei tuomet grąža 11%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį;

2) Žinoma, kad po ketverių metų obligacija bus parduota, kai pinigų vertė 13%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Kokia obligacijos pardavimo kaina?

3) Parduodamas obligaciją su premija ar ar nuolaida?

1) Nustatome pusmečio mokėjimų dydį. Turime, kad

$$A_n = 4000000, \quad i = 0,06; \quad n = 20.$$

Išsprendę lygtį

$$4000000 = Ra_{20\rceil 0,06}$$

gauname, pusmečio mokėjimus $R = 348738$.

Turime, kad obligacijos valdytojas kas pusmetį gaus po 348738 dydžio sumą.

Nustatome obligacijos įsigyjimo kainą. Kadangi $R = 348738; \quad i = 0,055, \quad n = 20$, tai $A_n = Ra_{20\rceil 0,055} = 4167552$. Vadinasi įsigyjimo kaina, esant 11% grąžos normai yra 4167552.

2) Rinkos kaina po ketverių metų yra likusių mokėjimų su nauja grąžos norma dabartinė vertė.

Turime, kad $R = 348738; \quad i = 0,065, \quad n = 12$.

Tada $A_n = Ra_{12\rceil 0,065} = 2845258$. Taigi rinkos kaina po ketverių metų, esant 13% grąžai yra 2845258.

Pajamas arba nuolaidą pardavus obligaciją gauname apskaičiavę skirtumą tarp obligacijos balansinės vertės ir pardavimo kainos. Balansinė vertė yra suprantama, kaip vertė gaunama išpirkimo metu visus likusius mokėjimus diskontavus su originalia grąžos norma. Todėl naudodamiesi tuo, kad $R = 348738; \quad i = 0,055, \quad n = 12$ gauname, kad $A_n = Ra_{12\rceil 0,055} = 3005605$. Gauname, kad obligacija bus parduodama su tokia nuolaida: $3005605 - 2845258 = 160347$.

Apibrėžimas Obligacija yra vadinama *serijine*, jei obligacijos nominalas arba nominalo dalys gali būti išperkamos bet kokiu laiko momentu.

Tarkime, kad obligacija, kurios nominalas A, kupono norma q, kuponai mokami k kartų per metus yra išperkama serija $A_1, \dots, A_t, \quad A = A_1 + \dots + A_t$.

Nustatysime obligacijos kainą įsigyjimo momentu, kai palūkanų norma yra r, serijos narių mokamų kuponų skaičiai yra $n_1, \dots, n_t$ atitinkamai. Tada obligacijos rinkos kaina yra tokia:

$$QP = A_1(1 + \frac{r}{k})^{-n_1} + R_1 a_{n_1\rceil \frac{r}{k}} + \dots + A_t(1 + \frac{r}{k})^{-n_t} + R_t a_{n_t\rceil \frac{r}{k}},$$

čia $R_i = A_i \frac{p}{k}$.

Pavyzdys Serijinė obligacija, kurios nominalas 2000000, palūkanų norma 10% , mokamos kas pusmetį yra išperkama dviem mokėjimais: 1200000 mokėjimu po dvylikos metų ir 800000 mokėjimu po penkiolikos metų. Nustatykite šios obligacijos įsigyjimo vertę sudarymo momentu, kai šiuo metu grąža yra 12%, pinigai perskaičiuojami kas pusmetį?

Serijinės obligacijos įsigyjimo kaina išleidimo metu yra ekvivalenti dviems įsigyjimo kainoms, t.y. 1200000 po dvylikos metų ir 800000 kainai po penkiolikos metų (metų pradžioje).

Nustatykime 1200000 kainos dabartinę vertę P_1 :

Turime, kad $A_1 = 1200000, \quad R = A_1 \cdot 0.05 = 60000; \quad n = 24; \quad i = 0,06$. Tada $P_1 = 1200000(1,06)^{-24} + 60000a_{24\rceil 0,06} = 1049396$.

Tą patį veiksmą atliekame ir su antrąja kaina: $A_2 = 800000, \quad R = A_2 \cdot 0,05 = 40000; \quad n = 30; \quad i = 0.06$. Be to $P_2 = 800000(1,06)^{-30} + 40000a_{30\rceil 0,06} = 689681$. Tada bendra įsigyjimo kaina yra šių dabartinių verčių suma: $QP = P_1 + P_2 = 1739277$.

Analogiškai kaip ir trumpalaikiai skolinimosi vertybiniai popieriai- vekseliai taip ir obligacijos gali būti ne tik su kuponais bet ir be kuponų. Šiuo atveju laikoma, kad palūkanos yra iš karto įtraukiamos į nominaliąją obligacijos vertę. jei obligacija be kuponų, tai obligacijos dabartinė vertė gaunama tiesiog diskontuojant nominalą su esama rinkos palūkanų norma.

Apibrėžimas Vertybinį popierių vadinsime *obligacija be kuponų*, jei obligacija išperkama pagal nominalą, o jos kaina nustatoma jos įsigyjimo metu diskontuojant nominalą su tuometine (sutarta) pinigų verte.

Kaip ir auksčiau $A-$ obligacijos nominalas, $i-$ faktinė (perskaičiavimo periodo) norma, $n-$ laikotarpių, kuriuose diskontuojama vertė skaičius, tai obligacijos dabartinė vertė (rinkos kaina) skaičiuojama tokiu būdu:

$$QP = A(1+i)^{-n}.$$

Aišku, kad kai $i \to 0$, tai $QP \to A$.

Pratybų uždaviniai

1. 10000 nominalo obligacija, su $9,5\%$ palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį, išperkama pagal nominalą po 10 metų. Kokia obligacijos kaina pradiniu pirkimo momentu, jei:

(a) pinigų vertė tuo metu 15% perskaičiuojamos kas pusmetį ?

(b) pinigų vertė tuo metu 8% perskaičiuojamos kas mėnesį?

2. Obligacija, kurios nominalas 5000, 10% palūkanos, perskaičiuojamos kas ketvirtį išperkama su 108 verte. Kokia obligacijos įsigyjimo kaina, jei įsigyjimo metu palūkanos $15,75\%$ palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, o įsigyjimo momentas penkeri metai prieš išpirkimą.

3. Obligacija, kurios nominalas 25000, su kupono palūkanų norma 13%, kurie mokami kas ketvirtį yra išperkama su 104 premija po šešerių metų. Kokia įsigyjimo kaina išpirkimo metu, jei tuomet pinigų vertė $14,25\%$, palūkanos perskaičiuojamos kas metus?

4. Obligacija, kurios vertė 10000, palūkanos $9,5\%$ perskaičiuojamos kas pusmetį, išperkama pagal nominalą 2014 Kovo 1 dieną, yra įsigyjama 2012 Rugsėjo 19 dieną. Tuo metu palūkanų norma 12% palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Kokia įsigyjimo kaina?

5. Obligacija, kurios nominalas 70000, kupono palūkanų norma 13% kuponai mokami kas pusmetį, išperkama su 112 verte, yra įsigyjamos ketveiri metai prieš išpirkimą, kai pinigų vertė 12% perskaičiuojami kas ketvirtį. Nustatykite obligacijos:

a) premiją (nuolaidą);

b) nurodykite įsigyjimo kainą;

c) rinkos kainą;

d) susikaupusias palūkanas;

e) faktines susikaupusias palūkanas.

6. Periodinė obligacija, kurios nominalas 10000, 12% palūkanomis, kurios išmokamos kas ketvirtį yra išmokama per 10 metų lygiomis dalimis mokant kas ketvirtį.

a) Nustatykite obligacijos įsigyjimo kainą, jei įsigyjimo metu palūkanų norma 16%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį?

b) Nustatykite obligacijos vertę po devynerių metų, kai pinigų vertė 10%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

c) Nustatykite ar pardavęs turėtą obligaciją po devynerių metų nuo įsigyjimo datos asmuo turės pajamas ar nuostolį, jei palūkanos 9% perskaičiuojamos kas ketvirtį?

7. Serijinė obligacija, kurios nominalas 50000, o kuponų norma 10,5%, mokami kas pusmetį yra išperkama sumokant 20000 po ketverių metų ir likusi 30000 vertė po dešimties metų. Nustatykite šios obligacijos įsigyjimo vertę išleidimo momentu, jei šiuo metu grąža yra 7%, pinigai perskaičiuojami kas pusmetį?

6.13 Obligacijos su kuponais grąžos normos

Aukščiau nagrinėdami prekybos obligacijomis problemą sprendėme tokį uždavinį: kokia yra obligacijos pardavimo kaina, jei obligacija parduodama anksčiau negu išpirkimo terminas? Matėme, kad ši kaina priklauso nuo tuo metu rinkoje esančios pinigų vertės (palūkanų normos). Padidėjus palūkanų normai, obligacijos vertė krenta ir atvirkščiai, nukritus rinkos palūkanų normai, obligacijos vertė kyla.

Apibrėžimas Obligacijos *pelno norma iki išpirkimo* (yield to maturity) vadinsime vidutinę grąžos normą per obligacijos valdymo laikotarpį.

Pelno normą iki išpirkimo paprastai vadinama obligacijos *grąžos norma* arba *pelningumo norma.*

Pastebėsime, kad obligacijos pelno norma iki išpirkimo žinoma tuo atveju, kai obligacija parduodama kaina, kuri sutampa su obligacijos rinkos kaina sudaryta pagal tuometinę pinigų vertę.

Įdomu tai, kad subjektas dažnai įsigyja obligaciją pagal siūlomą kainą, kuri ne visuomet remiasi vyraujančia rinkos palūkanų norma. Šiuo atveju obligacijos pelningumą gali apskaičiuoti remdamiesi įsigyjimo metu turimais duomenimis, pavyzdžiui žinodami rinkos kainą QP bei obligacijos parametrus (palūkanų normą ir nominalą).

Obligacijos *pelningumo matu*, jos įsigyjimo terminu, yra laikoma *dabartinė obligacijos pelno norma* i_0, kuria remiantis yra nustatoma įsigyjimo kaina žinant obligacijos nominalą arba išpirkimo kainą bei palūkanų normą. Aptarsime obligacijos pelno normos iki išpirkimo nustatymo metodus.

Tarkime, kad žinome obligacijos rinkos kainą QP, kai iki išpirkimo termino liko n laikotarpių, o kuponas dydis R. Remdamiesi obligacijos rinkos vertės skaičiavimo formule turime,

$$QP = A \cdot (1+i)^{-n} + Ra_{n\rceil i}.$$

Pažymėkime:

$$f(i) = A \cdot (1+i)^{-n} + Ra_{n\rceil i} - QP.$$

Tada šios funkcijos nulis, t.y. reikšmė i_0, $f(i_0) = 0$ ir bus ieškomoji grąžos norma (obligacijos pelningumo norma iki išpirkimo), kurią galime rasti remiantis, pavyzdžiui, Niutono metodu arba kitais aproksimaciniais metodais, kuriais remaintis galima rasti funkcijos nulius.

Dažnai obligacijomis prekiaujama rinkoje nurodant jos rinkos kainą, kuri sudaroma taikant obligacijos nominalui nuolaidą arba premiją. Šiuo atveju atsiranda poreikis nustatyti obligacijos grąžos normą, kuri paprastai nebūna nurodyta. Svarstymai šiuo atveju paprasti, jei obligacija perkama brangiau negu kupono norma, matyt rinkoje formuojasi situacija, kad palūkanų norma kris ir obligacija šiuo metu nuvertinta. Tad natūralu koreguoti obligacijos "tikrąją " grąžą pagal rinkos elgseną, kuri ir nurodys obligacijos grąžos normą. Dažnai obligacijos yra parduodamos rinkos kaina QP, kurioje "slepiasi" grąžos norma.

Pateiksime metodą apytikslei grąžos normai iki išpirkimo nustatyti. Praktiškai šis metodas taikomas gana dažnai.

Vidurkių metodas pelningumo normai nustatyti.

Pažymėkime:

$S-$ išperkamoji kaina;

$A-$ nominalas;

$k-$ kuponų mokėjimo skaičius per metus;

laikotarpio iki išpirkimo $PR-$ premija, $D-$ diskontas;

$\sum I-$ obligacijos iki išpirkimu likusio laikotarpio kuponų pajamos ($\sum I = nR$,) $n-$ bendras kuponų mokėjimų skaičius;

$\overline{P}$- vidutinių pajamų, tenkančių kupono periodui, dydis;

$V-$ vidutinė obligacijos kaina iki išpirkimo.

Naudodami šiuos žymėjimus gauname, kad vidutinės kupono periodo pajamos $\overline{P}$ yra

$$\overline{P} = \frac{\sum I \pm PR}{n} = R - \frac{PR}{n} -$$

Pastaba Atkreipsime dėmesį, kad $D = -PR$. Skaičiuojant vidutines, pajamas kai obligacija įsigyjama su premija, turime, kad dydis

$$\overline{P} = R - \frac{PR}{n},$$

o jei obligacija įsigyjama su nuolaida, tai

$$\overline{P} = R + \frac{D}{n}.$$

Vidutinė obligacijos išpirkimo kaina yra

$$V = \frac{1}{2}(QP + S).$$

Tada obligacijos grąžos norma (tenkanti kupono periodui) yra tokia:

$$\overline{p} = \frac{\overline{P}}{V} = 2 \cdot \big(\frac{A \cdot \frac{q}{k} - \frac{PR}{n}}{QP + S}\big) = 2 \cdot \big(\frac{A \cdot \frac{q}{k} - \frac{QP-S}{n}}{QP + S}\big).$$

Vadinasi obligacijos grąžos norma iki išpirkimo yra

$$r_0 = k \cdot \overline{p}.$$

Apibrėžimas *Obligacijos nominalia palūkanų norma iki išpirkimo* (bond equivalent yield) vadinsime paprastąsias metines palūkanas r nustatomas tokiu būdu $r = k \cdot \overline{p}$.

Kitaip tariant, nominali obligacijos norma yra metinė grąžos norma iki išpirkimo. Nagrinėtu atveju, tai norma r_0.

Obligacijos efektyviąja metine pelno norma (effective annual yield) e, vadinsime normą ekvivalenčią obligacijos kupono pelno normai, perskaičiuojamai k kartų per metus: $e = (1 + \overline{p})^k - 1$.

Pavyzdys 10 metų obligacija, kurios nominalas 25000 palūkanos 11.5% perskaičiuojamos kas pusmetį, įsigyjamos su 103.5 verte. Nustatykite apytikslę grąžos normą (pelningumo normą).

Randame, kad rinkos kaina yra

$QP = 25000 \cdot 1,035 = 25875$ ir $A = 25000$.

Tada

$$V = 0.5(QP + A) = 25437,50.$$

Pusmečio palūkanos yra $25000(\frac{0.115}{2}) = 1437,50$. Turime $n = 20$, $\sum I = 20 \cdot 1437,50 = 28750$. Tada premija $PR = 25875 - 25000 = 875$. Vidutinės pajamos per mokėjimo periodą yra

$$\overline{P} = \frac{28750 - 875}{20} = 1393,75.$$

Tada

$$\overline{p} = \frac{1393,75}{25437,5} = 0,05479$$

Apytikslė nominali grąžos norma yra $r_0 = 2 \cdot \overline{p} = 0,1096$.

Pavyzdys Obligacija, kurios nominali vertė 8000, su 10% pusmečio kuponais yra išperkama po 17 metų su 105 verte, šiuo metu įsigyta su $97\frac{3}{8}$ verte. Nustatykite apytikslę obligacijos grąžos normą.

Turime, kad rinkos kaina yra $QP = 8000 \cdot 0,97375 = 7790$ be to $S = 8000 \cdot 1,05 = 8400$. Tada vidutinė kaina

$$V = 0,5(QP + S) = 8095.$$

Pusmečio palūkanos yra $8000(\frac{0,1}{2}) = 400$. Turime, kad $n = 34$, $\sum I = 34 \cdot 400 = 13600$. Obligacijos nuolaida (diskontas) $D = 8400 - 7790 = 610$. Tada vidutinės palūkanų laikotarpio pajamos yra

$$\overline{P} = \frac{13600 + 610}{34} = 417,94.$$

Tada apytikslė palūkanų norma, tenkanti palūkanų periodui yra

$$\overline{p} = \frac{417,94}{8095} = 0,05163 = 0,0516.$$

Gauname, kad obligacijos ekvivalenti grąžos norma yra dvigubai didesnė: $r_0 = 2 \cdot \overline{p} = 0,1032$.

Tuo tarpu efektyvioji metinė pelno norma $e = 1,0516^2 - 1 = 0,1059$.

Pavyzdys Nustatykime 5000 nominalo obligacijos su 10% pusmečio kuponais grąžos normą, jei obligacija išperkama 2013 Birželio 15 dieną, o 2001 Gruodžio 2 dienai, obligacija įsigyjama su 103,75 premija.

Skaičiuodami apytikslę obligacijos, kurios vertė nustatoma laiko momentu tarp palūkanų mokėjimo terminų, grąžos normą, skaičiuosime laikotarpių skaičių n racionalaus skaičiaus tikslumu. Matome, kad tarp Gruodžio 5 d. ir sekančio kuponų mokėjimo laikotarpio, kuris yra Gruodžio 15d. yra 13 dienų laikotarpis. Tada bendras kuponų mokėjimo laikotarpis yra $n = 23 + \frac{13}{183} = 23,07$.

Nustatome rinkos kainą

$$QP = 5000 \cdot 1,0375 = 5187,50, \quad A = 5000.$$

Skaičiuojame vidutinę obligacijos kainą:

$$V = 0.5(QP + A) = 5093.75.$$

Kupono vertė yra $5000(\frac{0,1}{2}) = 250$. Turime $n = 23,07$ $TI = 23,07 \cdot 250 = 5767,5$. Obligacijos premija yra $E_n = 5187,5 - 5000 = 187,5$. Tada vidutinės pajamos tenkančios palūkanų periodui yra

$$\overline{P} = \frac{5750 - 187,5}{23,07} = 240,27.$$

Apytikslė palūkanų periodo norma lygi:

$$\overline{p} = \frac{240,27}{5093,75} = 0,0472.$$

Tada obligacijos nominalioji vidutinė grąžos norma yra $\bar{i} = 2 \cdot \overline{p} = 0,094$.

Apibrėžimas Obligacijos *esamąja pelno norma* (current yield) vadinsime obligacijos metinių pajamų (kupono išmokų) ir šios obligacijos dabartinės kainos santykį. Taigi:

$$r_0 = \frac{A \cdot q}{QP}.$$

Pavyzdys Nagrinėjame obligaciją, kurios nominalas 2000, su ketvirčio kuponais ir 12% palūkanų norma. Raskite obligacijos esamąją pelno normą, jei obligacija įsigyjama su 95 verte.

$$r_0 = \frac{A \cdot 0,12}{0,95A} = 0,1263.$$

Taigi, esamoji grąžos norma yra $12,63\%$.

Apibendrinant tai kas buvo pasakyta, reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad gaunamos obligacijos pajamos, kiekviename laikotarpyje gali būti reinvestuojamos, todėl bendrai paėmus pelno norma iki išpirkimo ne visada tinkamas pelningumo matas. Šiuo atveju yra naudojamas kitas metodas obligacijos pelningumui nustatyti, tai *vidinės grąžos normos* sąvoka.

Apibrėžimas Obligacijos *vidine grąžos norma* (internal rate of return) vadinsime sudėtinę (nominaliąją) grąžos normą per obligacijos gyvavimo laikotarpį laikant, kad kiekviena kuponų išmoka yra reinvestuojama su obligacijos pelno norma iki obligacijos išpirkimo.

Pavyzdys Tarkime, kad 1000 nominalo obligacija, kurios kupono norma 10 procentų, kuponai mokami kas pusmetį. Likus trims metams iki išpirkimo ji buvo parduota. Kokia obligacijos vidinė grąžos norma.

Turime, kad kuponai $R = 50$. Pirmąjį kuponą, gautą po pusmečio galima reinvestuoti 5 terminus, antrąjį keturis ir t.t. .

Bendrai susidariusi suma bus lygi:

$$50a_{6\rceil 0,05} + 1000 \approx 1253.$$

Randame vidinę grąžos normą i_v spręsdami lygtį:

$$(1 + i_v)^3 = 1,253.$$

Tada $i_v \approx 0,078$.

Apibrėžimas Nominaliąją (metinę) palūkanų normą, kuri ekvivalenti grąžos normai, kuria buvo investuojami kuponai tame pat laikotarpyje, vadinsime *realizuotąja grąžos norma* (realized return).

Pastaba Realizuotąją pelno normą galime nustatyti tik tada, kai baigiasi investavimo laikotarpis. Ji naudinga tik tam, kad galėtume nustatyti investavimo efektyvumą arba galėtume lyginti su kitais rezultatais. Be to šis metodas naudojamas modeliuojant realizuotąją grąžos normą.

Pavyzdys Tarkime, kad 1000 nominalo obligacijos, kurios palūkanų norma 10 procentų, kuponai mokami kas pusmetį. Likus trims metams iki išpirkimo ji buvo parduota. Valdytojas turi galimybę kuponus reinvestuoti su 12% palūkanų norma. Kokia realizuotoji grąžos norma.

Turime, kad kuponai $R = 50$. Pirmąjį kuponą, gautą po pusmečio galima reinvestuoti 5 terminus, antrąjį keturis ir t.t. .

Bendrai susidariusi suma bus lygi:

$$50(1,06^5 + 1,06^4 + 1,06^3 + 1,06^2 + 1,06 + 1) + 1000 \approx 1349.$$

Randame realizuotąją grąžos normą i_r spręsdami lygtį:

$$(1 + i_r)^3 1000 = 1349.$$

Tada $i_r = 0,105$.

6.14 Obligacijų trukmė

Nesunku suprasti, kad visi kuponai, mokami skirtingais laiko momentais bendrąsias pajamas įtakoja ne vienodai. Dėl šios priežasties kiekvieną kuponą galima susieti su tam tikru svertiniu dydžiu, kuris apibrėžia kiekvieno kupono įtaką įsigyjamos obligacijos kainoje. Panašiai buvo elgiamasi skaičiuojant vekselių portfelio įsigyjimo kainą.

Tegu kaip ir auksčiau A obligacijos nominali (arba su premija ar nuolaida) vertė; $i-$ faktinė (perskaičiavimo periodo) norma (rinkos norma), $n-$ diskontavimo laikotarpių skaičius (arba palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius), $QP-$ rinkos kaina. Apibrėžkime pajamų svorį, pasibaigus $k-$ ąjam laikotarpiui tokiu būdu:

$$s_k = \frac{R}{QP(1+i)^k}, \quad k = 1, \ldots, n-1; \quad s_n = \frac{R + A}{QP(1+i)^n}.$$

Nesunku suprasti, kad

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 1.$$

Todėl kiekvienas dydis s_k gali būti traktuojamas kaip $k-$ ųjų pajamų procentinė įtaka į bendrąsias pajamas.

Apibrėžimas *Obligacijos vidutine trukme vadinsime tokį dydį:*

$$T = \sum_{i=1}^{n} i \cdot s_i.$$

Pastebėsime, kad obligacijos be kuponų vidutinė trukmė sutampa su laikotarpiu, kuomet obligacija išperkama. Pavyzdžiui, jei obligacija 5 metų, be kuponų, tai jos vidutinė trukmė taip pat bus lygi 5. Panagrinėkime šią situaciją.

1. *Obligacijos be kuponų vidutinė trukmė* Tarkime, kad obligacija be kuponų išperkama po n laikotarpių, o mokėjimo laikotarpis tik vienas, tai remdamiesi vidutinės trukmės skaičiavimo apibrėžimu gauname, kad

$$T = n\frac{1}{QP} \cdot \frac{A}{(1+i)^n}.$$

Pastebėję, kad $\frac{A}{(1+i)^n} = QP$ gauname, kad $T = n$.

Pavyzdys Tarkime, kad palūkanos $i = 0.12$ perskaičiuojamos kas ketvirtį, o penkerių metų obligacija, kurios nominalas 2500 yra be palūkanų. Raskime šios obligacijos vidutinę trukmę.

Turime, kad

$$T = 20 \cdot \frac{1}{QP} \cdot \frac{2500}{(1.03)^{20}} = 20 \cdot 1,03^{20} \frac{1}{2500} \cdot \frac{2500}{(1.03)^{20}} = 20.$$

Iš čia išplaukia, kad $T = 20$ arba skaičiuojant metais, 5 metai.

Tuo tarpu obligacijos su kuponais vidutinė trukmė yra mažesnė negu išpirkimo laikotarpis.

Be įrodymo pateikiame kai kurių periodinių mokėjimų vidutinės trukmės skaičiavimo formules.

2. *Obligacijos su kuponais vidutinė trukmė*, kai rinkos faktinė norma i ir obligacijos kupono norma q, vidutinė trukmė yra lygi:

$$T = \frac{1+i}{i} - \frac{1+i+n(q-i)}{q\big((1+i)^n - 1\big) + i}.$$

Pastaroji lygybė išplaukia iš žemiau pateiktų samprotavimų. Visų pirma skaitytojui siūlome savarankiškai įsitikinti, kad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+i)^k} = \frac{1+i}{i^2} - \frac{(1+i)^{-n+1} + in(1+i)^{-n}}{i^2}. \tag{6.1}$$

Norit gauti šį sąryšį reikia naudojant geometrinės progresijos sumos formule apskaičiuoti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Išdiferencijavę abi paskutiniosios lygybės puses ar atlikę keletą nesudėtingų pertvarkymų gausime sąryšį (6.1).

Remdamiesi trukmės apibrėžimu gauname, kad

$$T = \sum_{k=1}^{n} k s_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{kAq}{QP(1+i)^k} + \frac{nA}{QP(1+i)^n}.$$

Naudodamiesi tuo, kad

$$\frac{QP}{A} = \frac{i}{(1+i)^n i} + \frac{q\left((1+i)^n - 1\right)}{(1+i)^n i}$$

Gauname, kad

$$T = \frac{(1+i)^n i}{i + q\left((1+i)^n - 1\right)} \left(\frac{q(1+i)}{i^2} - \frac{q\left(n(1+i)^{-n} + (1+i)^{-n+1}\right)}{i^2} + \frac{n}{(1+i)^n} \right) =$$

$$\frac{1}{i + q\left((1+i)^n - 1\right)} \left(\frac{q(1+i)^{n+1} - q(1+i) + i(1+i) - i(1+i+n(q-i))}{i} \right).$$

Pertvarkę paskutinįjį reiškinį gauname norimą rezultatą. Iš gautojo rezultato nesunkiai gauname kitas dvi trukmės formules.

3. Obligacijos su kuponais, kai rinkos faktinė norma i ir obligacijos norma q sutampa, t.y. obligacija parduodama pagal nominalą, vidutinė trukmė yra lygi:

$$T = \frac{1+i}{i} - \frac{1}{i(1+i)^{n-1}}.$$

4. Begalinės trukmės obligacijos su kuponais, kai rinkos faktinė norma i ir kuponai yra pastovūs vidutinė, trukmė lygi :

$$T = \frac{1+i}{i}.$$

5. Periodinių mokėjimų (anuiteto), kai rinkos faktinė norma i, mokėjimų skaičius lygus n, vidutinė trukmė yra lygi:

$$T = \frac{1+i}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}.$$

Pastaroji formulė gaunama nagrinėjant sumą:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{Rk}{Ra_{\overline{n}|i}(1+i)^k} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+i)^k}.$$

Remdamiesi (6.1) sąryšiu gauname anuiteto vidutinės trukmės skaičiavimo formulę.

Pavyzdys Raskime obligacijos su kuponais, kurie mokami kas pusmetį, o kupono norma 10%, vidutinę trukmę, jei obligacija įsigyjama 20 metų iki išpirkimo, kai rinkos nominali palūkanų norma išpirkimo metu 8%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

Turime, kad

$$T = \frac{1,04}{0,04} - \frac{1,04 + 40(0,05 - 0,04)}{0,05(1,04^{40} - 1) + 0,04} \approx 19,8.$$

Panagrinėkime, kaip kinta obligacijos kaina keičiantis rinkos palūkanų normai. Turime, kad

$$QP(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{Aq}{(1+i)^j} + \frac{S}{(1+i)^n},$$

čia A obligacijos nominalas, S yra arba nominalas arba išperkamoji vertė su nuolaida arba premija, i ir $q-$ rinkos ir obligacijos palūkanų normos (kupono periodui), atitinkamai. Suskaičiavę funkcijos $QP(i)$ išvestinę gauname, kad

$$\frac{\mathrm{d}QP(i)}{\mathrm{d}i} = -\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{Aqj}{(1+i)^{j+1}} + \frac{nS}{(1+i)^{n+1}}\Big).$$

Panagrinėkime šį reiškinį kiek kitu aspektu. Padalinę abi lygybės puses iš $QP(i)$ gauname

$$\frac{(QP(i))'}{QP(i)} = -\frac{1}{1+i}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{Aqj}{QP(i)(1+i)^{j+1}} + \frac{nS}{QP(i)(1+i)^{n+1}}\Big) = -\frac{1}{1+i}T.$$

Paskutinysis sąryšis yra *santykinis kitimo greitis* taške i. Remdamiesi paskutiniąja lygybe galime nustatyti keliais procentais pasikeis obligacijos rinkos kaina, palūkanų normai pakitus vienu procentiniu punktu, kai pokytis atliekamas taške i.

Kita vertus

$$\frac{\mathrm{d}QP(i)}{\mathrm{d}i} = -\frac{T \cdot QP(i)}{1+i}.$$

Šis reiškinys yra ribinės obligacijos kainos, esant palūkanų normai i, skaičiavimo formulė. Jos prasmė tokia: keliais piniginiais vienetais pasikeis obligacijos kaina palūkanų normai pasikeitus vienu procentiniu punktu.

Pavyzdys 5000 nominalo obligacija su 10,5% kuponais, kurie mokami kas pusmetį yra išperkama po 6-erių metų ir 10 mėnesių. Nustatykime kiek pasikeis obligacijos kaina, jei dabar pinigų vertė 11,5%, kurie perskaičiuojami kas pusmetį, nukristų vienu procentiniu punktu?

Nustatome rinkos kainą. Jį lygi $QP = 4756.78$. Turime, kad $n = 13,66,\ i = 0,0575,\ p = 0,0525$.

Randame šios obligacijos trukmę.

$$T = \frac{1,0575}{0,0575} - \frac{1,0575 - 13,66 \cdot 0,005}{0,0525\big((1,0575)^{13,66} - 1\big) + 0,0575} \approx 10.$$

Skaičiuojant trukmę metais gauname, kad trukmė lygi 5.

Tada

$$\frac{QP'(0,0575)}{QP(0,0575)} = -10\frac{1}{1,0575} = -9,4.$$

Gauname, kad jei faktinę normą padidinsime 1 procentiniu (metinę 2) punktu, tai obligacijos kaina sumažės maždaug 9,4 vienetais.

Aptarsime vidutinės trukmės sąvokos naudojimo aspektą apsaugant obligacijų portfelio vertę nuo palūkanų svyravimo. Ši investavimo politika vadinama obligacijų portfelio *i*munizavimu.

Finansinės institucijos paprastai skolinasi ir pačios skolina pinigines lėšas. Tačiau nuolat iškyla problema, kaip be nuostolių grąžinti pasiskolintas lėšas, jei rinkos pelno norma nuolat kinta?

Pasirodo šiuo atveju praverčia vidutinės trukmės metodas. Jei obligacijų porfelį suformuosime taip, kad portfelio vidutinė trukmė būtų lygi įsipareigojimų trukmei, tai obligacijų portfelio vertė įsipareigojimo pabaigoje bus ”atspari” rinkos pelno normos svyravimams. Nesunku suprasti, kad vidutinė trukmė priklauso nuo palūkanų normos svyravimų. Šiuo atveju esant nedideliam palūkanų normų svyravimui investicinis portfelis bus apsaugotas nuo palūkanų normos pokyčių. Tačiau esant didesniam rinkos palūkanų normos svyravimui atsiranda pokyčiai tarp portfelio vertės ir įsipareigojimų vertės. Kad amortizuoti šį poveikį, o tai dažnai susiję su ilgas terminais, kai palūkanų norma gali keisti gana daug, paprastai imunizuojant portfelį tenka nuolat perskaičiuoti vidutinę trukmę ir performuoti portfelio strategiją.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

Pavyzdys Bankas po 7 metų turės sumokėti 19487. Rinkos palūkanų norma 10% . Tad įsipareigojimų dabartinė vertė yra 10000. Vadybininkas atsakingas už šį projektą norėtų šį projektą imunizuoti 3 metų obligacijomis be kuponų ir begalinės trukmės obligacijomis su kuponais. Nustatykime imunizavimo strategiją.

Tada obligacijų portfelio vidutinė trukmė turi sutapti su įsipareigojimų trukme. Turime, kad šio įsipareigojimo trukmė yra yra 7 metai, tad ir vidutinė trukmė bus ta pati. Obligacijų porfelio vidutinę trukmę apibrėžia obligacijos, kurios įeina į šį portfelių ir trukmė priklauso nuo jų kiekio porfelyje, t.y. nuo jų svorio. Svoriai skaičiuojami statistiškai, t.y. proporcingai kiekiui. Žinome, kad begalinės trukmės vidutinė trukmė yra $T = 1.11/0.1 = 11$ metų. Pažymėję obligacijos be kuponų svorį raide s galime sudaryti portfelio vidutinės trukmės lygtį:

$$T = s \cdot 11 + 3(1 - s) = 7.$$

Išsprendę gauname, kad $s = 0,5$. Tai reiškia, kad porfelis turi būti sudaromas lygiomis dalimis, t.y. reikia pirkti obligacijų be kuponų už 5000 ir begalinės trukmės obligacijų už 5000. Tarkime, kad praėjo vieneri metai, bet palūkanų norma nepakito. Pastebėsime, kad po metų įsipareigojimai padididėjo iki 11000. Panagrinėkime dabartinį portfelį. Obligacijų be kuponų trukmė lygi 2 metams, o begalinės obligacijos tie patys 11 metų. Finansinių įsipareigojimų trukmė- šešeri metai. Panagrinėkime naują portfelį. Turime, kad

$$T = s \cdot 11 + 2(1 - s) = 6.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad $s = \frac{5}{9}$. Vadinasi tenka perskirstyti obligacijų svorius. Matome, kad obligacijų be kuponų vertė visame portfelyje turi būti lygi $11000 \cdot \frac{4}{9} \approx 4888,88$. Vadinasi pardavę begalinio laikotarpio obligacijų už 111,12 sumą ir nusipirkę 2 metų trukmės obligacijų be kuponų už 611 sumą porfelyje suformuojame naują portfelį.

Matome, kad bėgant laikui, norint išlaikyti obligacijų portfelį nenuostolingu tektų nuolat stebėti situaciją ir prekiauti vertybiniais popieriais.

Pratybų uždaviniai

1. Vekselių, kurių bendra nominali vertė 2000000 portfelis apmokamas naudojant forfeitingo metodą, penkerių metų laikotarpyje. Portfelio paprastųjų palūkanų norma yra 6% . Nustatykite šio portfelio vertę:

a) jo įsigyjimo metu;

b) po trejų metų nuo įsigyjimo.

2. Obligacija, kurios nominalas 10000 su 11% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį yra išperkama 2014 Rugpjūčio 1 su 104 verte, o parduota 2009 Birželio 17, su 95 $\frac{1}{2}$ verte. Raskite šios obligacijos grąžos normą iki išpirkimo.

3. 3 metų, 5000 nominalo obligacija su 10% pusmečio kuponais parduodama už 4700. Pirmaisiais metais palūkanų norma rinkoje buvo 10%, antraisiais 14% ir trečiaisias 12%. Apskaičiuokite apytikslę pelno normą iki išpirkimo ir realizuotąją pelno normą.

4. 10 metų trukmės, 5000 nominalo obligacija su 10% pusmečio kuponais parduodama už 4000.

1) Askaičiuokite esamąją pelno normą;

2) Apskaičiuokite apytikslę pelno normą iki išpirkimo;

3) realizuotą pelno normą, jei obligacija parduota 4 metai iki išpirkimo, esant 8% palūkanų normai.

4) kokia obligacijos vidinė pelno norma iki išpirkimo.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Tarkime, kad penkerių metų vekselis iki pareikalavimo, kurio nominalas 10000, apmokamas po dviejų metų sumokant 20% susikaupusios sumos, po 3 metų 1000, po 4 metų 2000, ir paskutiniais metais sumokama visa paskola su palūkanomis. Palūkanos keitėsi tokiu būdu: pirmaisiais metais norma 10%, antraisiais metais norma nukrito iki 6%, trečiaisiais metais iki 6%, ketvirtaisiais iki 9% ir penktaisiais pakilo iki 12%.

Nustatykite, kiek palūkanų sumokės už paskolą, jei:

1) Pasikeitus palūkanų normai arba sumokėjus dengiančią įmoką palūkanos skaičiuojamos nuo naujos balansinės vertės su palūkanomis;

2) Pasikeitus palūkanų normai arba sumokėjus dengiančią įmoką palūkanos skaičiuojamos tik nuo naujos paskolos balansinės vertės.

Ats: 1) I=4214; 2) 4115. (b) pinigų vertė tuo metu 13% perskaičiuojami kas pusmetį?

Ats: (a) 53367, (b) $45503,5$

2. Keturios obligacijos, kiekvienos nominalas 50000, kupono norma 13% kurie mokami kas pusmetį yra įsigyjamos septyneri metai prieš išpirkimą, kai pinigų vertė 12%, perskaičiuojami

kas pusmetį. Nustatykite ar obligacijos įsigyjamos su premija ar diskontu bei nurodykite įsigyjimo kainą, jei obligacijos išperkamos:

(a) pagal nominalą;

(b) su premija 107.

Ats: (a) 9295 (premija); 209295 (b) 1487 (premija); 215487.

3. Keturios 10000 nominalo obligacijos su palūkanų 16%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį išperkamos su 106 premija, 2004 Rugsėjo 1 dieną yra įsigyjamos 1992 Sausio 23, kai pinigų vertė 15%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Nustatykite

(a) ar įsigyjama obligacija su pajamomis ar nuolaida;

(b) įsigyjimo kainą;

(c) nustatytą kainą.

Ats: (a) 225.87 (pajamos) (b) 43556.85 (c) 42624.98

4. Obligacija, kurios nominalas 2500000, palūkanos 13% perskaičiuojamos kas pusmetį yra išperkamos 2002 Birželio 15 d. su 107 premija. 2002 Gegužės 9 d., kuomet palūkanos $14,5\%$, perskaičiuojamos kas pusmetį, asmuo įsigijo šią obligaciją. Raskite įsigyjimo kainą.

Ats: 107117

5. Obligacija, kurios nominalas 50000, palūkanos 11% perskaičiuojamos kas pusmetį yra išperkamos 1998 Balandžio 15 d. pagal nominalą. 1991 Birželio 25 d., asmuo įsigijo šią obligaciją su nuolaida $92\ \frac{3}{8}$. Raskite apytikslę obligacijos grąžos normą.

Ats: $12,56\%$

6. Obligacija 15000, palūkanos 11% perskaičiuojamos kas pusę metų, yra įsigytos šešiolika metų prieš išpirkimą su $78\ \frac{1}{4}$ nuolaida. Kokia grąžos norma?

Ats: 12.712%

7. Obligacija kurios nominalas 10000, palūkanos 15% perskaičiuojamos kas ketvirtį yra išperkamos su 102 premija 2003 Spalio 15 dieną. Ši obligacija buvo parduota 1991 Gegužės 5 dieną su $98\ \frac{3}{4}$ nuolaida. Kokia grąžos norma?

Ats: 14.990%

8. Periodinė obligacija, kurios nominalas 50000, $14,5\%$ kuponai, kurie mokami kas ketvirtį yra išperkama per 12 metų mokant kas ketvirtį lygias dalis.

(a) Nustatykite obligacijos įsigyjimo kainą, jei įsigyjimo metu palūkanų norma 16%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį?

(b) Nustatykite obligacijos vertę po devynerių metų.

(c) Nustatykite ar pardavęs turėtą obligaciją po devynerių metų nuo įsigyjimo datos asmuo turės pajamas ar nuostolį, jei palūkanos 17%, perskaičiuojamos kas ketvirtį?

Ats: (a) $46906,73$ (b) $20770,01$ (c) $298,05$ (nuostolis)

9. Serijinė obligacija, kurios nominalas 250000, o palūkanų norma 15% mokamos kas pusmetį yra išperkama 100000 po devynerių metų ir likusi 150000 vertė po dvylikos metų. Nustatykite šios obligacijos įsigyjimo vertę išleidimo momentu ir šiuo metu grąža yra 14.5% pinigai perskaičiuojami kas pusmetį?

Ats: $256678,26$

10. Obligacija, kurios nominalas 500000, su 14.5% kuponais, kurie mokami kas pusmetį, yra išperkama 2014 Rugpjūčio 1, buvo įsigyti 2003 Kovo 5, su $95\ \frac{1}{2}$ verte. Raskite šios obligacijos grąžos normą.

Ats: $15,347\%$

11. Periodinė obligacija, kurios nominalas 1000000, su 12% palūkanomis, kurios mokamos kas ketvirtį yra išperkama lygiais ketvirčio mokėjimais per 20 metų.

a) Nustatykite obligacijos įsigyjimo kainą, jei pinigų vertė 14%, perskaičiuojami kas ketvirtį.

b) Kokia obligacijos balansinė vertė po septynerių metų?

c) Nustatykite ar pardavęs obligaciją po septynerių metų, esant 15% palūkanoms, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį, turės nuostolį ar pelną?

Ats: (a) 885703 (b) 787925 (c) 35127 (nuostolis)

12. 3 metų, 5000 nominalo obligacija su 10% pusmečio kuponais parduodama už 4700. Pirmaisiais metais palūkanų norma rinkoje buvo 10%, antraisiais 14% ir trečiaisias 12% . Apskaičiuokite apytikslę nominaliąją pelno normą iki išpirkimo ir realizuotąją pelno normą.

13. 10 metų, 5000 nominalo obligacija su 10% pusmečio kuponais parduodama už 4000.

1) Apskaičiuokite nominaliąją pelno normą.

2) Apskaičiuokite realizuotąją pelno normą, jei obligacija parduota 4 metai iki išpirkimo, esant 8% palūkanų normai.

14. Tarkime, kad 10 metų obligacijos, su 12% pusmečio kuponais vidutinė trukmė yra 9,5 metų. Kiek pasikeis obligacijos kaina, jei pelno norma pakis $0,75$ procentinio punkto.

Privalomos namų darbų užduotys

1. Septynerių metų, 150000 nominalo vekselis, kurio palūkanų norma 12.5%, palūkanos perskaičiuojamos tolydžiai, buvo diskontuota su 14% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. žinoma, kad vekselio pajamos diskontavimo momentu yra 215000. Keli mėnesiai prieš vekselio išpirkimą buvo diskontuotas vekselis?

2. 60000 nominalo vekselis be palūkanų, kurio išpirkimo terminas 2012 Sausio 1 dieną, buvo diskontuotas 2009 Kovo pirmą dieną, kai palūkanų norma 8% ir palūkanos perskaičiuojamos kas pusę metų. Raskite vekselio pajamas bei diskonto dydį (metodas tikslus.)

3. 10000 nominalo vekselis su 12% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį, kurio išpirkimo terminas 2010 Vasario 15 dieną, buvo diskontuotas 2007 Balandžio 25 dieną, kai palūkanų norma 10% ir palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskite vekselio pajamas bei diskonto dydį (metodas tikslus.)

4. 100 vekselių, kurių nominalas 2000, o palūkanų norma yra 10%, portfelis yra apmokamas forfeitingo metodu, pusmečio mokėjimais. Nustatykite šio portfelio galutinę vertę, jei išpirkimo terminas po 4 metų. Vertę skaičiuokite taikydami abi kainos skaičiavimo strategijas.

5. 50 vekselių, kurių nominalas 5000 portfelis, vekselio palūkanų norma 14% yra apmokamas forfeitingo metodu, kas ketvirtį. Nustatykite šio portfelio galutinę vertę, jei išpirkimo terminas po 5 metų. Nustatykite portfelio vertę likus 2,5 metų iki išpirkimo, jei šiuo metu palūkanų norma 16%. Kiek tektų mokėti už šį portfelį, jei jį įsigytume 1 metai iki išpirkimo, esant

1) 8% palūkanų normai;

2) 18% palūkanų normai;

3) 14% palūkanų normai.

6. 50000 nominalo, su $11,5\%$ palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį obligacija išperkama pagal nominalą po 12 metų. Kokia obligacijos kaina pradiniu pirkimo momentu, jei pinigų vertė tuo metu $10,5\%$ perskaičiuojami kas pusmetį ?

7. 100000, nominalo, su 13% palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį obligacija išperkama pagal nominalą po 12 metų. Kokia obligacijos kaina dabartiniu momentu, jei:

(a) pinigų vertė tuo metu 10% perskaičiuojamos kas pusmetį ?

(b) pinigų vertė tuo metu 15% perskaičiuojamos kas pusmetį?

(c) pinigų vertė tuo metu 10% perskaičiuojamos kas mėnesį ?

(d) pinigų vertė tuo metu 15% perskaičiuojamos kas ketvirtį?

8. Obligacija, kurios nominalas 5000, palūkanos 14% perskaičiuojamos kas du mėnesius išperkama su premija 108. Kokia obligacijos įsigyjimo kaina, jei įsigyjimo metu palūkanos 17% palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį:

(a) įsigyjimo momentas penkeri metai prieš išpirkimą;

(b) dvylika metų prieš išpirkimą.

9. Devynios 10000 nominalo obligacijos, su 16% kuponų procentais, kurie perskaičiuojami kas pusmetį ir išperkamos pagal nominalą yra įsigyjamos aštuoneri metai prieš išpirkimą. Nustatykite ar obligacijos įsigyjamos su pajamomis ar nuolaida bei nurodykite įsigyjimo kainą, jei obligacijos išperkamos esant pinigų vertei: (a) 13%; (b) 18%; (c) 16%.

10. Tegu $A = 500000$ vertės obligacija bus išperkama su 106 premija 2018 Liepos 1, su 12% kuponais, kurie apmokami kas ketvirtį ir įsigyta 2008, Spalio 20, kai palūkanų norma 10%, perskaičiuojamos kas ketvirtį. Nustatykite:

1) pajamas arba nuolaidą; 2) įsigyjimo kainą; 3) nustatytą kainą?

11. Obligacija, kurios nominalas 5000 palūkanos 13.5% perskaičiuojamos kas pusmetį, įsigyjamos su 108 verte. Nustatykite apytikslę grąžos normą (pelningumo normą).

12. Nustatykime 30000 nominalo obligacijos su 12% pusmečio kuponais kuri, išperkama 2016 Birželio 25 dieną, vertę nustatytą 2006 Gruodžio 12 dienai, su 107 premija. Kokia obligacijos grąžos norma?

13. 15000 nominalo, 10 metų obligacija su 8% kuponais, kurie išmokami kiekvienų metų pabaigoje yra parduodama penkeri metai prieš išpirkimą su 97 verte, esant 10% . Nustatykite kiek pasikeis obligacijos kaina, palūkanų normai padidėjus iki 10.5%

14. Serijinė obligacija, kurios nominalas 250000, o palūkanų norma 8% mokamos kas pusmetį yra išperkama 70000 po dvylikos metų su 8% norma, kai palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį, 80000 mokėjimu po dešimties metų su 12 procentų palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas metus ir 100000 mokėjimu, kai palūkanų norma 6%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Nustatykite šios obligacijos įsigyjimo vertę išleidimo momentu ir šiuo metu grąža yra 12% pinigai perskaičiuojami kas pusmetį?

15. Tarkime, kad investicinė bendrovė po 10 metų investuotojui turi grąžinti 300000 sumą. Rinkos palūkanų norma 12% . Vadybininkas norėtų finansuoti šį įsipareigojimą 5 metų obligacijomis be kuponų, 7 metų obligacijomis su 10% kuponais, kurie mokami kas pusmetį ir begalinės trukmės obligacijomis. Kaip imunizuoti šį įsipareigojimą. Pateikite pasiūlymą trejiems metams, jei norma nesikeis.

16. Tarkime, kad investicinė bendrovė po 12 metų investuotojui turi grąžinti 100000 sumą. Rinkos palūkanų norma 10% . Vadybininkas norėtų finansuoti šį įsipareigojimą 6 metų obligacijomis su 14% kuponais mokamais kas pusmetį ir begalinės trukmės obligacijomis. Kaip imunizuoti šį įsipareigojimą. Pateikite pasiūlymą jei antrais metais norma bus 11% .

Mokėti: Paprastųjų ir sudėtinių palūkanų atveju skaičiuoti vekselių būsimąją vertę, diskontuoti vekselius nurodytu laiko momentu, skaičiuoti vekselių diskonto normą, vekselio pajamas ir diskontą, nustatyti vekselio palūkanų periodą, skaičiuoti vekselio palūkanų normą. Skaičiuoti su kuponais, be kuponų, periodinių ir serijinių obligacijų įsigyjimo bei rinkos kainas, grąžos normą iki išpirkimo, vidinę ir efektyviąją grąžos normas. Taikyti obligacijų trukmę nustatant obligacijų kainos pokyčius.