4 tema. PINIGŲ SRAUTAI. ANUITETAI

Temos tikslai:

- Skaičiuoti pinigų srautų vertes, taikant standartinius metodus.
- Vertinti alternatyvas bei teikti argumentuotus siūlymus.
- Modeliuoti matematines bei realaus turinio situacijas.

Tikrinami studijų rezultatai:

- Supras anuiteto taikymo sritis.
- Modeliuos matematinio bei realaus turinio situacijas.
- Teiks skaičiavimais grįstas rekomendacijas.

Studentų pasiekimų vertinimo kriterijai:

- Tikslus sąvokų naudojimas.
- Tinkamas formulių naudojimas.
- Tikslūs tarpiniai ir galutiniai atsakymai.
- Tikslūs atsakymai į klausimus.

1 Pastaba Jei atskirai nebus paminėta laikysime, kad metuose yra 365 dienos.

Pasikartokite sąvokas:

Nominalioji palūkanų norma, faktinė palūkanų norma, palūkanų perskaičiavimo periodas, sudėtinės palūkanos, efektyvioji palūkanų norma, palūkanų kapitalizavimas, diskontavimas, tikslusis kaupimo (diskontavimo) metodas, diskonto daugiklis, būsimoji ir dabartinė kapitalo vertės.

4.1 Bendrosios sąvokos

Apibrėžimas Mokėjimų seką, kuri atliekama bet kokiu laiko momentu nurodytame laiko intervale, vadinsime *pinigų srautu* (trumpai PS).

Mokėjimo momentas vadinamas *mokėjimo terminu.* Nurodytas laiko intervalas vadinamas *PS laikotarpiu.*

Mokėjimai gali būti atliekami laiko intervalo pradžioje arba pabaigoje. Mokėjimų dydis gali būti pastovus bet gali ir kisti, keičiantis laikui. Šiame skyrelyje pagrindinį dėmesį skirsime PS, kai mokėjimai yra vienodi ir atliekami pasibaigus nustatytam laiko intervalui arba šio laiko intervalo pradžioje. Kai visi mokėjimo intervalai vienodi, tai šis PS paprastai vadinamas *periodiniais mokėjimais* trumpinsime (PM). Periodinių mokėjimų atveju, kai mokėjimai pastovūs ir palūkanų norma PS-to laikotarpyje yra pastovi, šie mokėjimai vadinami *anuitetu*, o PS - anuiteto metodu.

Pavyzdys Tarkime asmuo sudarė sutartį, kad kiekvieno mėnesio pirmąją dieną iš jo sąskaitos į dujų kompanijos sąskaitą bus pervedama suma, kuria apmokamas suvartotas energijos kiekis (tiesioginio debeto metodas). Šiuo atveju turime PS, kuris nėra anuitetas, kadangi pervedama periodinė suma nėra pastovi. Tuo tarpu jei su draudimo kompanija sudaroma sutartis, kad kiekvienų metų pabaigoje (tam tikrą laikotarpį) į sąskaitą bus pervedama tarkime 2000 suma, nagrinėsime anuiteto metodą.

Laiko intervalas tarp gretimų mokėjimų vadinamas *mokėjimų intervalu.* PS-to mokėjimų intervalai gali būti pastovūs, bet gali būti ir skirtingi. Anuiteto atveju mokėjimo intervalai yra pastovūs ir šie intervalai vadinami *mokėjimų periodu.*

Apibrėžimas *PS-to laikotarpiu* vadinsime laiko intervalą nuo pirmojo mokėjimo intervalo pradžios iki paskutiniojo mokėjimo intervalo pabaigos.

Apibrėžimas PS-tą vadinsime *paprastuoju*, jei palūkanų perskaičiavimo periodas sutampa su mokėjimų intervalu. PS-tą vadinsime *kompleksiniu*, jei palūkanų perskaičiavimo periodas nesutampa su mokėjimų intervalo ilgiu.

Abiem atvejais, PS yra skirstomas į:

1) *įprastinį PS-tą*; 2) *apmokėtąjį PS-tą*; 3) *atidėtąjį PS-tą*; 4) *begalinį PS-tą* (arba viso gyvenimo PS-tą).

Apibrėžimas PS vadinamas *įprastiniu* (dažnai sakoma *postnumerando*), jei kiekvienas mokėjimas yra atliekamas mokėjimo intervalo pabaigoje.

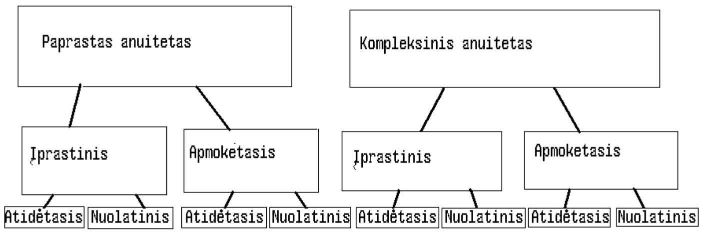
Apibrėžimas PS vadinamas *apmokėtuoju* (dažnai naudojamas terminas *prenumerando*), jei kiekvienas mokėjimas yra atliekamas mokėjimo intervalo pradžioje.

Apibrėžimas PS vadinamas *atidėtuoju mokėjimu*, jei pirmasis mokėjimas yra atliekamas ne anksčiau negu antrojo mokėjimo intervalo pabaiga.

Apibrėžimas PS vadinamas begaliniu (viso gyvenimo), jei mokėjimai tęsiasi neribotai.

Nagrinėjant PS-tus ypatingai svarbūs yra du dydžiai - *galutinė (bendroji) PS-to vertė* ir *dabartinė PS-to vertė*.

Pateiktame 1.1 pav. yra nurodytos įvairios paprastojo bei kompleksinio PS-to modifikacijos (rūšys). PS-to modifikacijas galima matyti skaitant bet kurią seką, nurodytą rodyklių kryptimi. Pavyzdžiui, gali būti nagrinėjamas "paprastasis įprastinis" arba "paprastasis apmokėtasis atidėtasis" arba "kompleksinis įprastinis viso gyvenimo atidėtasis" pinigų srautai ir t.t.



4.1 pav. Anuitetai

Apibrėžimas Visų mokėjimų sumą, kartu su palūkanomis, vadinsime pinigų srauto *bendrąja suma*. Šią vertę (sumą) žymėsime S. Kartais raidę S naudosime su indeksu.

Pastaba Jei taikomas anuiteto metodas, tai visų mokėjimų suma vadinama *anuiteto bendrąja suma*.

Pavyzdys Tarkime, kad esate sudarę sutartį su draudimo kompanija penkeriems metams, kad kiekvieno mėnesio pabaigoje į sąskaitą pervedate sumą, kurią pasirenkate savo nuožiūra. Palūkanos taikomos šiai sumai gali būti fiksuotos, bet gali būti ir kintamos. Suma, susikaupusi sąskaitoje po penkerių metų ir bus PS-to galutinė vertė.

Apibrėžimas *Dabartine* (diskontuota) PS-to verte vadinsime visų mokėjimų diskontuotų verčių sumą, kai diskontavimas atliekamas su sutartyje nurodoma palūkanų (kuri gali priklausyti nuo laiko) norma.

Pinigų srautų analizę pradėsime nuo paprasčiausių atvejų, t.y. kai mokėjimai fiksuoti, mokėjimo periodas pastovus ir faktinė mokėjimo periodo palūkanų norma taip pat fiksuota.

4.2 Paprastasis anuitetas

Šiame skyrelyje nagrinėsime PS-tą, kai srauto mokėjimai yra pastovūs ir palūkanų norma PS-to laikotarpiu yra pastovi. Šį pinigų srauto atvejį vadinsime anuitetu. Aptarsime įvairias anuiteto modifikacijas, skaičiuodami srauto būsimąsias bei dabartines vertes.

Apibrėžimas Anuitetas yra vadinamas *paprastuoju,* kai palūkanų perskaičiavimo ir mokėjimo periodai sutampa.

Pagrindinė problema kurią nagrinėsime- pinigų srauto dabartinės bei būsimosios verčių nustatymas. Be to laikysime, kad anuiteto laikotarpiu pinigų vertė arba kitaip tariant palūkanų norma, su kuria galima investuoti, nėra lygi nuliui. Su kiekviena anuiteto modifikacija bus siejama būsimoji ir dabartinė vertės.

Anuitetas yra atskiras PS-to atvejis todėl visos sąvokos, kurios buvo apibrėžtos aukščiau naudojamos nagrinėjant anuiteto problemas.

Pastaba Nagrinėsime situacijas, kai mokėjimai yra pastovūs ir kiekvienas mokėjimas R yra kapitalizuojamas, tad sprendžiant dabartinės bei būsimosios verčių radimo uždavinius taikysime sudėtinių palūkanų metodus vertėms nustatyti.

Žymėjimai: $n-$ mokėjimo periodų (tuo pačiu ir mokėjimų) skaičius;

$i = \frac{r}{m}-$ faktinė palūkanų norma;
r yra sutarties nominali palūkanų norma;
$m-$ palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius per metus;
$k-$ mokėjimų (mokėjimo periodų) skaičius per metus.

Pastaba Paprastojo anuiteto atveju $m = k$.

Nurodysime bendrąsias formules, kuriomis remiantis skaičiuojama bendroji anuiteto suma S ir anuiteto dabartinė vertė A.

4.3 Įprastinis anuitetas. Būsimoji ir dabartinė vertės

Panagrinėkime paprastojo - įprastinio anuiteto uždavinį. Tarkime, kad mokėjimai atliekami mokėjimo periodo pabaigoje ir per visą anuiteto laikotarpį atliekama n mokėjimų, o kiekvieno mokėjimo dydis yra R. Aišku, kad pirmasis mokėjimas R kaupime dalyvauja $n-1$ laiko intervalą arba $n-1$ perskaičiavimo periodų. Kadangi palūkanos sudėtinės, tai per šiuos laikotarpius iš įmokos R susikaups galutinė vertė $S_1 = (1+i)^{n-1}R$. Samprotaudami analogiškai gauname, kad antrojo periodo pabaigoje atlikta įmoka R kartu su palūkanomis sudarys $(1+i)^{n-2}R$ sumą ir t.t. $k-$ ojo laikotarpio įmoka kartu su palūkanomis sudarys $(1+i)^{n-k}R$ sumą. Paskutine įmoka baigiame šį procesą. Tada bendra įprastinio anuiteto suma yra tokia:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1}.$$

Naudodami geometrinės progresijos sumos formulę

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1,$$

gauname, kad

$$S = R\Big(\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}\Big) = R\Big(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\Big).$$

Finansinėje literatūroje paskutiniosios lygybės skliaustuose esantis reiškinys žymimas tokiu būdu:

$$s_{n\rceil i} := \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Remiantis pastarąja pastaba, bendrąją įprastinio anuiteto galutinės vertės skaičiavimo formulę perrašome taip:

$$S = Rs_{n\rceil i}. \tag{4.1}$$

Pavyzdys Tarkime, kad asmuo kiekvieno pusmečio pabaigoje į saskaitą padeda po 100. Kokia pinigų suma bus jo sąskaitoje po dviejų metų, jei jis atliko keturis mokėjimus. Palūkanos 6% , perskaičiuojamos kas pusmetį.

Remdamiesi (4.1) formule gauname:

$$S = Rs_{n\rceil i} = 100s_{4\rceil 0,03} = 100 \cdot 4,183627 = 418,36.$$

Apibrėžimas *Dabartine* (diskontuota) įprastinio anuiteto verte vadinsime visų periodinių mokėjimų R diskontuotų verčių sumą.

Primename, kad $A-$ anuiteto dabartinė vertė, $n-$ mokėjimų skaičius, $i-$ faktinė palūkanų norma, $R-$ mokėjimo dydis.

Tada, dabartinė įprastinio anuiteto vertė yra:

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}.$$

Matome, kad tai yra geometrinės progresijos n narių, kurios pirmasis narys yra lygus $R(1+i)^{-1}$ suma, o šios progresijos vardiklis lygus $(1+i)^{-1}$. Tada

$$A = \frac{\frac{R}{(1+i)}\big(1-(1+i)^{-n}\big)}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{(1+i)-1}.$$

Pertvarkę paskutinįjį sąryšį gauname, kad

$$A = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{i}.$$

Skliaustuose esantis reiškinys paprastai žymimas simboliu

$$a_{n\rceil i} := \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Nesunkus suprasti, kad

$$a_{n\rceil i} := s_{n\rceil i} \cdot (1+i)^{-n}.$$

Taigi, anuiteto arba kitaip tariant visų mokėjimų dabartinė vertė gali būti nustatoma remiantis formule

$$A = Ra_{n\rceil i}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad anuiteto dabartinė vertė A, gali būti siejama su įprastinio anuiteto būsimąja verte S tokiu būdu: subjektas (kreditorius), kuris skolina sumą A, esant rinkos faktinei palūkanų normai i, padėjęs į banko sąskaitą pinigus galėtų uždirbti būsimąją vertę $S = A(1+i)^n$. Kita vertus, jei jis skolina pinigus kitam subjektui, kuris su kreditoriumi atsiskaito pastoviais mokėjimais R, kurie atliekami pasibaigus fiksuotam laiko intervalui, tai gautas pinigų sumas kreditorius vėl reinvestavęs momentais kai buvo gautos įmokos, su ta pačia palūkanų norma, ir susumavęs turėtų sukaupti būsimąją vertę

$$S = R\Big(\frac{(1+i)^n-1}{i}\Big).$$

Sulyginę dvi paskutiniąsias lygybes turime, kad

$$A(1+i)^n = R\Big(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\Big).$$

Išsprendę A atžvilgiu gauname tą pačią formulę

$$A = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{i}.$$

Pavyzdys Šeima nutarė pirkti automobilį, lizingo būdu. Dėl šios priežasties šeima turės keturis metus, kiekvieno mėnesio pabaigoje mokės po 400. Sutarties palūkanų norma yra 12%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį. Kokia automobilio dabartinė vertė (kiek kainuoja naujas automobilis)?

Turime

$$R = 400, \quad i = 0,01, \quad n = 12 \cdot 4 = 48.$$

Tada

$$A = 400 a_{48\rceil 0,01} \approx 400 \cdot 37,973959 = 15189,58.$$

Pratybų uždaviniai

1. Asmuo siekdamas sukaupti pinigų senatvei į banko sąskaitą perveda po 500, kiekvieno mėnesio pabaigoje. Bankas moka 7% palūkanas, kurios perskaičiuojamos taip pat kas mėnesį. Kokia pinigų suma susidarys sąskaitoje po dvylikos metų?

2. Tėvai pasirašė sutartį su draudimo kompanija ir kaupia pinigus studijoms sūnui, kiekvieno pusmečio pabaigoje į sąskaitą pervesdami po fiksuotą pinigų sumą. Sutartyje nurodyta, kad aštuoniolika metų bankas mokės 5% metines palūkanas, kurias perskaičiuos kas pusmetį. Žinoma, kad galutinio termino taške sąskaitoje susidarys 60000 suma. 1) Kiek palūkanų yra šioje sukauptoje sumoje. 2) Kokią bendrąją nominaliąją vertę per šiuos metus pervedė į sąskaitą tėvai?

3. Asmuo šešiolika metų, kiekvieno ketvirčio pabaigoje į Kredito unijos sąskaitą padeda po 500. Kredito unija moka 10% palūkanas, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Nustatykite, kokią sumą reikėtų padėti į sąskaitą dabartiniu momentu, kad per tą patį laikotarpį sąskaitoje susikauptų ta pati būsimoje vertė esant analogiškai pinigų vertei?

4. Kiekvieno mėnesio pabaigoje, už automobilio nuomą turite mokėti po 600 ir taip penkerius metus. Palūkanų norma 12%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Žinoma, kad automobiliu naudositės penkerius metus. Kiek kainuoja šis automobilis dabar? b) Kiek palūkanų per penkerius metus sumokėsite bankui?

5. Nustatykite, kokiai palūkanų normai esant, kiekvieno ketvirčio pabaigoje į sąskaitą padedant po 2000 po 15 metų sąskaitoje susidarytų 200000 suma.

6. Nustatykite, per kiek laiko lizingu įsigytas kateris bus išpirktas, jei lizingo palūkanų norma 6%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį ir kas mėnesį sumokama po 2500. Pradinė katerio vertė 120000.

4.4 Apmokėtasis anuitetas. Būsimoji ir dabartinė vertės

Nagrinėsime paprastąjį anuitetą, kai mokėjimai atliekami mokėjimo periodo pradžioje.

Pastaba Šiame darbe dydžius (sukauptą sumą bei dabartinę vertę), apmokėtojo anuiteto atveju, žymėsime su žvaigždute viršuje.

Samprotaudami analogiškai, kaip ir nagrinėdami įprastinį anuitetą sudarome mokėjimų, su sukauptomis palūkanomis sumą, atkreipdami dėmesį į tai, kad visi mokėjimai "kaupia palūkanas" vienu periodu ilgiau negu įprastinio anuiteto atveju. Turime

$$S^* = R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^n = R(1+i)\Big(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\Big).$$

Taikydami geometrinės progresijos sumos formulę gauname,

$$S^* = R(1+i)s_{n\rceil i}. \tag{4.2}$$

Pavyzdys Asmuo kiekvieno ketvirčio pradžioje į banko sąskaitą perveda po 100. Bankas moka 8 procentų palūkanas, kurias perskaičiuoja kas ketvirtį. Kokia suma susidarys sąskaitoje po 9 metų?

Taikydami (4.2) formulę gauname, kad

$$S = R(1+i)s_{n\rceil i} = 100 \cdot 1,002(s_{36\rceil 0,02}) = 5303,43.$$

Panagrinėkime apmokėtojo anuiteto dabartinės vertės skaičiavimo uždavinį.

Pastebėję, kad ties kiekvienu mokėjimu esantis diskonto daugiklio laipsnis yra vienu vienetu mažesnis negu įprastinio anuiteto atveju, susiejame dabartinę vertę su mokėjimų suma tokiu sąryšiu:

$$A^* = R + \frac{R}{(1+i)} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = \big(\frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}\big)(1+i).$$

Kadangi

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = a_{n\rceil i},$$

tai dabartinės vertės formulę galime perrašyti tokiu būdu:

$$A^* = R(1+i)a_{n\rceil i}.$$

Pavyzdys Raskime apmokėtojo anuiteto, visų mokėjimų dabartinę vertę, jei 1000 vertės mokėjimai atliekami kas ketvirtį, penkerius metus, palūkanų norma 8%, o palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Turime $R = 1000, \quad i = 0,02, \quad n = 20.$

Tada

$$A^* = R \cdot 1,02 \cdot a_{n\rceil i} = 1020 \cdot 1,02a_{20\rceil 0,02} = 16678,46.$$

Pratybų uždaviniai

1. Asmuo į sąskaitą perveda po 300 kiekvieno mėnesio pradžioje. Bankas moka 8% palūkanas, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį. Kokia pinigų suma susidarys sąskaitoje po dešimties metų.

2. Kiekvieno mėnesio pradžioje, už įsigytą automobilį tenka mokėti po 800 ketverius metus. Palūkanų norma 5,75%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Kiek tektų sumokėti, jei už automobilį mokėtume iš karto?

b) Kiek per ketverius metus sumokės bendrai?

c) Kokie finansavimo kaštai?

3. Televizorius kainavo 1600. Sutartyje nurodyta, kad šią sumą vartotojas gražins per trejus metus, mokėdamas vienodas įmokas kiekvieno mėnesio pradžioje. Nustatykite pastovių mokėjimų dydį, jei palūkanų norma 7,5%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

4. Verslininkas kreditą, kurio nominali vertė 250000, apmoka pastoviomis įmokomis po 1500 kiekvieno ketvirčio pradžioje. Kiek laiko užtruks, iki verslininkas apmokės paskolą, jei palūkanų norma 12,75%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

5. Kokiai nominaliai palūkanų normai esant pastoviai mokant į sąskaitą, kiekvieno mėnesio pradžioje po 500, per dešimt metų sąskaitoje susikaups 100000 suma.

4.5 Atidėtasis įprastinis ir apmokėtasis anuitetai. Būsimoji ir dabartinė vertės.

Priminsime, kad atidėtuoju anuitetu vadinsime tokią mokėjimų seką, kuri prasideda vėliau negu pirmojo mokėjimo periodo pabaiga. Susipažinsime su sąvokomis, kurios naudojamos nagrinėjant atidėtąjį anuitetą.

Laiko intervalas tarp pirmojo mokėjimo pradžios ir paskutiniojo mokėjimo pabaigos yra vadinamas *atidėtojo anuiteto mokėjimų laikotarpiu,* visą sutarties (kontrakto) laikotarpį vadinsime *atidėtojo anuiteto laikotarpiu* ir laiko intervalą tarp sutarties pasirašymo ir pirmojo mokėjimo periodo pradžios - *atidėtųjų mokėjimų laikotarpiu.* Tarkime, kad l yra atidėtųjų mokėjimų skaičius, ir n yra mokėjimo periodų skaičius atidėtojo anuiteto mokėjimo laikotarpiu. Tada $n+l$ yra bendras periodų skaičius atidėtojo anuiteto laikotarpiu.

Atidėtojo anuiteto būsimąją vertę, kai mokėjimo periodų skaičius n, o atidėtų mokėjimo periodų skaičius yra l, žymėsime simboliu $S_n(l)$. Analogiškai atidėtojo anuiteto dabartinę vertę žymėsime simboliu $A_n(l)$. Jei atidėtieji mokėjimai yra apmokėtieji, prie šių simbolių papildomai bus pridedama žvaigždutė.

Nesunku suprasti, kad būsimosios vertės dydis skaičiuojamas analogiškai kaip ir neatidėtųjų mokėjimų ir priklauso tik nuo laiko momento, kuomet mokėjimai buvo pradėti. Todėl

$$S_n(l) = S_n.$$

Jei anuitetas apmokėtasis, tai

$$S_n^*(l) = S_n^*.$$

Dabartinę atidėtojo anuiteto vertę, kai mokėjimo periodų skaičius n, atidėtų periodų skaičius l, o periodo norma i, nustatome remdamiesi tokiais argumentais. Visų pirma nustatome dabartinę n mokėjimų vertę, mokėjimų pradžios terminui. Turime, kad

$$A_n = Ra_{n\rceil i}.$$

Tada atidėtojo įprastojo anuiteto dabartinės vertės skaičiavimo formulę gauname pastarąją vertę diskontuodami atidėtųjų mokėjimų laikotarpių skaičiui l :

$$A_n(l) = Ra_{n\rceil i}(1+i)^{-l}.$$

Jei anuitetas apmokėtasis, tai

$$A_n^*(l) = Ra_{n\rceil i}(1+i)^{-l+1}.$$

Pavyzdys A.B. dengia skolą 200 išmokomis tris metus, mokėjimai atliekami kiekvieno mėnesio pabaigoje. Mokėjimai yra atidėti. Jie pradedami mokėti šešto mėnesio pabaigoje. Raskite šio anuiteto (skolos) dydį, jei palūkanų norma 12 procentų, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Pastebėsime, kad skolos dydis yra atidėto anuiteto dabartinė vertė. Turime, kad $R = 200, \;\; l = 5, \;\; n = 36, \;\; i = 0,01$. Tada

$$A = Ra_{n\rceil i}(1+i)^{-l} = 200 \cdot a_{36\rceil 0{,}01}(1,01)^{-5} = 200 \cdot 30,107505 \cdot 0,951466 = 5729.$$

Pavyzdys Tarkime, kad 20000 skola yra apmokama 20-čia mokėjimų, kurie mokami kas ketvirtį, kiekvieno ketvirčio pabaigoje. Raskite kiekvieno iš šių mokėjimų dydį, jei pirmasis mokėjimas atliekamas po dviejų metų nuo dabar, palūkanų norma 20 procentų, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Turime, kad $A = 2000, \;\; l = 7, \;\; n = 20$. Naudodami atidėtojo anuiteto dabartinės vertės skaičiavimo formulę gauname, kad

$$R = \frac{A}{a_{n\rceil i}(1+i)^{-l}} = \frac{2000}{a_{20\rceil 0{,}05}(1,05)^{-7}} = \frac{2000}{12,46221 \cdot 0,7107} = 225,8.$$

Pavyzdys 200000 suma imama iš sąskaitos, kiekvieno ketvirčio pradžioje, pradedant dešimtaisiais metais nuo dabar ir baigiant dvidešimt antraisiais metais nuo dabar. Nustatykite, kokią sumą reikia padėti į sąskaitą dabar, kad būtų užtikrinti šie mokėjimai, jei palūkanų norma 10%, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Turime $R = 200000, \quad i = 0,025, \;\; n = 48$. Atidėtų periodų skaičius l= 40.

Turime

$$A_n = \Big(\frac{a_{48\rceil 0{,}025}}{1,025}\Big)200000 \cdot 1,025 = 5693497.$$

Tada

$$A_n^*(l) = 1,025^{-40} \cdot 5693497 = 2120433.$$

Pratybų uždaviniai

1. Įmonė atlyginimams banko sąskaitoje yra atidėjusi 600000 sumą. Nustatykite kiek laiko galite iš sąskaitos imti po 15000 kiekvieno mėnesio pabaigoje, jei šias sumas imti pradedate po šešerių metų nuo dabar, o palūkanų norma visos sutarties metu yra 8%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

2. Kokią pinigų sumą reikėtų padėti į sąskaitą dabar, kad po devynerių metų kiekvieno pusmečio pabaigoje, dešimt metų paeiliui, būtų gaunamos 4000 išmokos. Žinoma, kad banko palūkanų norma yra 6%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

3. A.B. draudimo kompanijoje sudarė gyvybės sutartį penkiolikai metų. Šiame laikotarpyje mokėjimai penkeriems metams buvo atidėti. Buvo sutarta kiekvieno mėnesio pradžioje į sąskaitą padėti po 450 sumą, o sukaupta galutinė vertė bus 100000. Jei viso kontrakto laikotarpiu palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį, nustatykite šią nominaliąją palūkanų normą.

4. Žinoma, kad po dvylikos metų nuo dabar asmuo išeis į pensiją. Bankas asmeniui pasiūlė į sąskaitą dabar padėti fiksuotą pinigų sumą su 12% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį su sąlyga, kad po dvylikos metų lygiai dvidešimt metų paeiliui, kiekvieno pusmečio

pradžioje gaus po 2500 sumą. Kokią sumą turi asmuo padėti į sąskaitą dabar, kad ketinimai būtų realizuoti?

5. Seneliai į banko sąskaitą padėjo 10000 su 10,5% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį, devyneriems metams su sąlyga, kad pasibaigus šiam laikotarpiui anūkui bus išmokama po 500 kiekvieno mėnesio pabaigoje. Nustatykite, kiek mėnesių anūkas gaus šias išmokas?

6. Nustatykite kokiai nominaliai palūkanų normai esant asmuo iš pensijų fondo įsigyjęs anuitetą 200000 sumai, po penkerių metų, kiekvieno mėnesio pradžioje gaus po 2000 lygiai 25 metus?

4.6 Paprastasis begalinis (viso gyvenimo) anuitetas.

Tarkime, kad jūs esate įsigijęs kokios nors bendrovės akcijų. Tada dividentai už akcijas bus mokami nuolatos, jeigu bendrovė ne bankrutuos arba jūs ne parduosite akcijų. Formalizuokime šią situaciją.

Primename, kad *begaliniu* anuitetu vadinsime periodinių mokėjimų seką, kuri prasideda fiksuotu laiko momentu ir tęsiasi be galo. Kaip ir kitais anuiteto atvejai yra skiriamos dvi begalinio anuiteto rūšys: a) įprastinis viso gyvenimo anuitetas; b) apmokėtasis viso gyvenimo anuitetas.

Nesunku suprasti, kad neįmanoma rasti begalinio anuiteto būsimosios vertės, tačiau dabartinę vertę nustatyti visuomet galima, kai žinomos papildomos sąlygos, t.y. mokėjimų dydis, nominali palūkanų norma bei mokėjimų dažnis (per metus). Kadangi nagrinėjame paprastąjį anuitetą, tai palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius sutampa su mokėjimų skaičiumi metuose.

Simboliu $A(\infty)$ žymėsime anuiteto dabartinę vertę, R periodinių mokėjimų dydį, $i-$ faktinę palūkanų normą. Jei mokėjimai prasideda po vieno laikotarpio (periodo) nuo dabar (įprastinis anuitetas), tai

$$A(\infty) = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} \ldots = \frac{R}{(1+i)(1-\frac{1}{1+i})} = \frac{R}{i}.$$

Šiuo atveju turime, kad $R = A(\infty)i$.

Nesunku suprasti, kad jei anuitetas nėra begalinis, bet apimantis daug mokėjimo periodų, tai šiam baigtiniam anuitetui, su nedidele paklaida, galime taikyti formulę

$$A \approx \frac{R}{i}.$$

Pavyzdys Į sąskaitą buvo padėta 50000 tam, kad kiekvienų metų pabaigoje būtų išmokoma fiksuota pinigų suma. Nustatykite mokėjimų dydį, jei sutartis sudaryta su 11% metine palūkanų norma.

Turime, kad

$A = 50000, \quad i = 0,11$. Tada $R = 50000 \cdot 0,11 = 5500$.

Jei mokėjimai atliekami iš karto sudarius kontraktą (apmokėtasis anuitetas), tai anuiteto dabartinę vertę skaičiuojame tokiu būdu:

$$A^* = R + \frac{R}{i} = \frac{R(1+i)}{i}.$$

Pavyzdys Tarkime kad žemės sklypas yra nuomuojamas nuolatinio anuiteto $R = 1250$ išmokomis, kurios išmokamos mėnesio pradžioje. Raskite žemės sklypo vertę, jei pinigų vertė $13,5\%$, pinigai perskaičiuojami kas mėnesį.

Turime

$R = 1250, \quad i = 0,01125$. Tada $A = 1250 + \frac{1250}{0,01125} \approx 112361$.

Pavyzdys Kokia pinigų suma A turi būti sukaupta pensininko draudimo fonde pradedant jam mokėti pensiją, jeigu numatoma palūkanų norma bus $r = 0,12$, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį ($i = 0,01$), o išmokama suma būtų 1000 ir išmokos būtų vykdamos iki gyvenimo pabaigos?

Turime, kad gaunama pastovioji suma $R = 1000$. Tada mokėjimų pradžioje susidariusi suma turi būti lygi

$$A = \frac{R}{i} = 100000.$$

Tada, kai anuitetas yra nuolatinis įprastinis ir atidėtas l periodų, tai dabartinė vertė skaičiuojama tokiu būdu:

$$A = \frac{R}{i(1+i)^l}.$$

Jei anuitetas nuolatinis, apmokėtas ir atidėtas l periodų, tai šiuo atveju dabartinės vertės formulė bus tokia:

$$A = \frac{R}{i(1+i)^{l-1}}.$$

Pratybų uždaviniai

1. Bankas įkūrė fondą, iš kurio numatoma kas mėnesį išmokėti po 500000 vertės stipendijų. Nustatykite fondo balansą, jei sutartyje nurodyta, kad fondas gyvuos amžinai, o sutarties palūkanų norma 8% , kurios perskaičiuojamos kas mėnesį;

a) jei anuitetas įprastinis;

b) jei anuitetas apmokėtasis;

c) jei anuitetas įprastinis ir atidėtas pusei metų;

d) jei anuitetas apmokėtasis ir atidėtas metams.

2. Asmuo į banko sąskaitą, dvylikai metų, padėjo 10000 sumą su 10% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas du mėnesius. Asmuo perka viso gyvenimo anuitetą susikaupusiai sumai. Kokiai anuiteto palūkanų normai esant asmuo užsitikrintų viso gyvenimo išmokas po 600 kas mėnesį? a) Anuitetas įprastinis; b) anuitetas apmokėtasis?

3. Žemės sklypas yra nuomuojamas mokant kiekvieno mėnesio pradžioje po pastovią sumą. Nustatykite pastovius mokėjimus, jei nuomojamo sklypo dabartinė vertė yra 10000, o palūkanų norma yra 8.5%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

4.7 Kompleksinis anuitetas ir jo modifikacijos

Nagrinėjome pinigų srautus, kuomet palūkanų periodas ir mokėjimų periodas sutampa arba, kai buvo nagrinėjama bendrai (PS atvejis), mokėjimo metu buvo imama to momento faktinė palūkanų norma. Tokį anuitetą vadinome paprastu anuitetu. Dabar nagrinėsime periodinius mokėjimus, kuomet mokėjimų periodas ir palūkanų perskaičiavimo periodas nesutampa, o nagrinėjant bendrąjį atvejį, kurio nors mokėjimo periodo laikotarpyje palūkanų perskaičiavimo periodas kitoks negu mokėjimo periodas. Tokio pobūdžio periodiniai mokėjimai vadinami *kompleksiniais mokėjimais* arba *kompleksiniu pinigų srautu* (KPS). Šiame skyrelyje nagrinėsime būsimosios bei dabartinės verčių formules įvairioms KPS-to modifikacijoms. Visų pirma aptarsime anuiteto metodą.

Tegu n yra bendras periodinių mokėjimų skaičius ir $c-$ palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius tenkantis vienam mokėjimo laikotarpiui (periodui). Tada bendras palūkanų perskaičiavimo periodų s skaičius yra

$$s = nc.$$

Skaitytojui siūlome atkreipti dėmesį į parametrą c kuris vaidina ypatingą vaidmenį skaičiuojant kompleksinį anuitetą.

Pavyzdys Nustatykite kokia suma susidarys kaupiamojoje sąskaitoje, jei kiekvieno pusmečio pabaigoje, lygiai trejus metus, į sąskaitą padedama po 1000, kai palūkanų perskaičiavimo periodas yra metai, palūkanų norma 12%?

Matome, kad palūkanų perskaičiavimo periodas bei mokėjimų periodas nesutampa, tad šis anuitetas yra kompleksinis. Be to mokėjimai atliekami periodo pabaigoje, todėl anuitetas yra įprastinis.

Galutinis mokėjimo terminas yra trečių metų pabaiga ir paskutinis mokėjimas atliekamas šiame termino taške ir lygus (kaip ir visi mokėjimai) 1000. Panagrinėkime padėtų indėlių iš "kito galo" įtaką galutinei sumai. Pastebėsime, kad šiuo atveju yra taikomas tikslusis, sudėtinių palūkanų skaičiavimo, metodas. Penktasis indėlis įneštas po 2,5 metų ir jis iki trečių metų pabaigos išbuvo sąskaitoje pusę perskaičiavimo periodo ir šio indėlio įnašas į bendrą galutinę sumą yra lygus $1000(1,12^{0,5}) = 1058,3$. Visiškai analogiškai, ketvirtojo mokėjimo, kuris iki galutinio laikotarpio išbus $n = 1$ perskaičiavimo periodą ir jo įnašas yra $1000(1,12^1) = 1120$; trečiojo indėlio įnašas yra $1000(1,12^{1,5}) = 1185,3$, antrojo indėlio įnašas yra $1000(1,12^2) = 1254,4$ ir pagaliau pirmojo indėlio įnašas yra pats didžiausias ir lygus $1000(1,12^{2,5}) = 1327,5$ sumai. Sudėję visas šias sumas gauname viso anuiteto galutinę vertę:

$$S_n = 1000+1000(1,12^{0,5})+1000(1,12^1)+1000(1,12^{1,5})+1000(1,12^2)+1000(1,12^{2,5}) = 6945,5.$$

Pavyzdys Nustatykite sąskaitos balansą po ketverių metų, jei žinoma, kad kiekvienų metų pabaigoje į sąskaitą yra padedama po 10000, palūkanų norma yra 12%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį. Apvalinsime sveikųjų tikslumu.

Turime keturis mokėjimus, kurie atliekami laikotarpio pabaigoje. Periodinis mokėjimas 10000. Palūkanų norma tenkanti perskaičiavimo periodui yra lygi $0,03$, o iš viso yra 16 perskaičiavimo periodų. Galutinis terminas yra po ketverių metų. Paskutinė įmoka atliekama ketvirtų metų pabaigoje ir lygi 10000. Trečiasis mokėjimas atliekamas po trejų metų ir šiam mokėjimui iki termino pabaigos tenka keturi perskaičiavimo periodai. Tad šio mokėjimo našas į galutinę anuiteto vertę sudaro $10000(1,03)^4 = 10120$. Analogiškai samprotaudami gauname, kad antrosios įmokos įnašas yra $10000(1,03)^8 = 12667$, o pirmosios įmokos įnašas- lygus $10000(1,03)^{12} = 14257$. Tada galutinė anuiteto vertė yra

$$S = 10000 + 10000(1,03)^4 + 10000(1,03)^8 + 10000(1,03)^{12} = 47044.$$

Šiuose pavyzdžiuose iliustruojama kokie gali būti mokėjimų dažnumai perskaičiavimo periodų atžvilgiu. Kompleksinio anuiteto atveju gali būti:

1) Palūkanų periodas ilgesnis negu mokėjimų periodas. Šiuo atveju kiekvienas mokėjimo intervalas apima dalį perskaičiavimo periodo.

2) Palūkanų periodas yra trumpesnis negu mokėjimo intervalas, tai šiuo atveju mokėjimo periode yra daugiau negu vienas palūkanų periodas.

Naudojami žymėjimai

$c-$ palūkanų perskaičiavimo periodų, tenkančių mokėjimo intervalui, skaičius (nebūtinai sveikas);

$m-$ yra palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius per metus;

$k-$ mokėjimo periodų skaičius per metus;

Tada

$$c = \frac{m}{k}.$$

$p-$ efektyvioji palūkanų norma tenkanti mokėjimo periodui. Jei anuitetas paprastasis, tai $p = i$.

Tarkime, kad mokėjimai atliekami ketvirčiais $k = 4$, ir palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį $m = 12$. Tada $c = \frac{12}{4} = 3$. Jei mokėjimų skaičius $k = 12$ ir palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį $m = 2$, tai $c = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Tegu p yra mokėjimo periodo efektyvioji palūkanų normą. Tada ši norma su faktine palūkanų norma i siejama tokiu sąryšiu

$$p = (1 + i)^c - 1.$$

Pavyzdys Bankas moka 12% sudėtines palūkanas, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Tarkime, kad A.B. padeda į sąskaitą po 2500, kiekvieno mėnesio pabaigoje. Raskite efektyviąją palūkanų normą tenkančią mokėjimo periodui?

Turime, kad $c = \frac{1}{3}$; $i = 0,03$. Tada

$$1 + p = (1,03)^{\frac{1}{3}} = 1,0099, \quad \text{arba} \quad p = 0,0099.$$

4.8 Įprastinis ir apmokėtasis anuitetai

Formule

$$p = (1 + i)^c - 1,$$

apibrėžta norma p sudaro prielaidas kompleksinį anuitetą keisti paprastuoju anuitetu. Kitaip tariant, su mokėjimo periodu susiejame palūkanų normą kuri ekvivalenti faktinei normai. Ši sąsaja sudaro prielaidas visas žinomas formules, taikytas paprastojo anuiteto atveju, perrašant jas kompleksinio anuiteto atveju.

Remdamiesi analogiškais samprotavimais, kaip ir paprastojo anuiteto atveju gauname, kad būsimosios vertės skaičiavimo formulė yra tokia:

$$S_n^c = \Big(\frac{(1+p)^n - 1}{p}\Big)R =: R \cdot s_{n\rceil p},$$

čia $R-$ pastovus mokėjimas, $n-$ bendras mokėjimų skaičius.

Įprastojo kompleksinio anuiteto dabartinės vertės skaičiavimo formulė yra tokia:

$$A_n^c = \Big(\frac{1 - (1+p)^{-n}}{p}\Big)R =: R \cdot a_{n\rceil p}.$$

Visiškai analogiškai sudaromos ir dabartinės bei būsimosios vertės formulės kompleksinio apmokėtojo anuiteto atveju:

$$S_n^{c^*} = (1+p)S_n^c,$$

čia $S_n^{c^*}$ apmokėtojo anuiteto būsimoji vertė. Arba

$$S_n^{c^*} = (1+p)\Big(\frac{(1+r)^n - 1}{p}\Big)R =: R(1+p) \cdot s_{n\rceil p}.$$

Naudodami analogiškus argumentus gauname, kad apmokėtojo anuiteto dabartinės vertės skaičiavimo formulė yra tokia:

$$A_n^{c^*} = (1+p) \cdot A_n^c.$$

Arba

$$A_n^{c^*} = \Big(\frac{1 - (1+p)^{-n}}{p}\Big)(1+p)R =: R(1+p) \cdot a_{n\rceil p}, \quad p = (1+i)^c - 1.$$

Pavyzdys Nustatykite kaupiamosios sąskaitos balansą po penkerių metų, jei kiekvienų metų pradžioje sąskaita papildoma 20000. Sutarties palūkanų norma 15%, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Turime $R = 20000, \quad n = 5, \quad c = 4, \quad i = 0,0375.$

Suskaičiavę

$$p = 1,0375^4 - 1 = 0,1586504$$

gauname, kad

$$S_5^{c^*} = \Big(\frac{(1,1586504)^5 - 1}{0,1586504}\Big)1,1586504 \cdot 20000 \approx 158939.$$

Pavyzdys Apmokant paskolą trejų metų laikotarpyje, kiekvieno ketvirčio pradžioje yra sumokama 1600 suma. Nustatykite paskolos dydį, jei pinigų vertė 16, 5%, pinigai perskaičiuojami kas mėnesį.

Turime $R = 1600, \quad n = 12, \quad m = 12, \quad k = 4, \quad c = 3, \quad i = 0,01375.$

Efektyvioji ketvirčio norma

$$p = 1,01375^3 - 1 = 4,18198.$$

Tada

$$A_3^{c^*} = \Big(\frac{1 - (1,0418198)^{-12}}{0,0418198}\Big)1,0408198 \cdot 1600 = 15480,2.$$

4.9 Kompleksinis atidėtasis anuitetas

Tarkime, kad atidėtų periodų skaičius yra l, n yra mokėjimų periodų skaičius, c palūkanų periodų skaičius mokėjimo periode, $R-$ periodinis mokėjimas.

Atidėtojo anuiteto būsimąją bei dabartinę vertes žymėsime simboliais

$$S_n^c(l), \quad \text{ir} \quad A_n^c(l),$$

atitinkamai.

Kaip ir paprastojo anuiteto atveju- atidėtasis laikotarpis jokios įtakos galutinei vertei neturi, tad

$$S_n^c(l) = S_n^c.$$

Analogiškai samprotaudami, kaip ir paprastojo anuiteto atveju galime gauti, kad dabartinė kompleksinio atidėtojo - įprastinio anuiteto vertė, kai atidėtų periodų skaičius yra l, yra lygi

$$A_n^{c^*}(l) = \Big(\frac{1-(1+p)^{-n}}{p}\Big)(1+p)^{-l}R =: R \cdot a_{n\rceil p}, \quad p = (1+i)^c - 1.$$

Tada bendroji atidėtojo apmokėtojo anuiteto formulė yra tokia:

$$\begin{aligned} A_n^{c^*}(l) &= \Big(\frac{1-(1+p)^{-n}}{p}\Big) \cdot \Big((1+p)^{-l}\Big)(1+p)R \\ &=: R(1+p) \cdot a_{n\rceil p}(1+p)^{-l}, \quad p = (1+i)^c - 1. \end{aligned}$$

Pavyzdys A.B. planuoja 12 metų, kiekvieno ketvirčio pradžioje padėti po 925 sumą į banko kaupiamąją sąskaitą. Kokia suma susidarys A.B. sąskaitoje sutarties pabaigoje, jei palūkanų norma 12% ir palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį, o įmokos mokėti būtų pradedamos po dešimties metų nuo sutarties sudarymo. Raskite atidėtų mokėjimų dabartinę vertę.

Turime $R = 925, \quad n = 4 \cdot 12 = 48; \quad c = 3, \quad i = 0,01.$

Tada mokėjimo periodo efektyvioji norma yra

$$p = 1,01^3 - 1 = 0,0303.$$

Gauname, kad

$$A_{48}^{c^*}(40) = \Big(\Big(\frac{1-(1,0303)^{-48}}{0,0303}\Big)1,0303 \cdot 925\Big) \cdot \frac{1-(1,0303)^{-40}}{0,0303} = 7255,72.$$

4.10 Kompleksinis viso gyvenimo anuitetas

Apibrėžimas *Kompleksiniu viso gyvenimo anuitetu* vadinsime begalinių periodinių mokėjimų seką, kai mokėjimai prasideda fiksuotu laiko momentu ir tęsiasi nuolatos, be to mokėjimo intervalo ir palūkanų perskaičiavimo intervalo ilgiai nesutampa.

Pastebėsime, kad šių formulių išvedimo metodologija nesiskiria nuo paprastų palūkanų atvejo, tik šiuo atveju faktinės palūkanų normos vietoje yra naudojama mokėjimo periodo efektyvioji palūkanų norma.

Tegu A^c, R yra dabartinė anuiteto vertė ir periodinių mokėjimų dydis, atitinkamai.

Begalinio įprastinio anuiteto atveju turime,

$$R = A^c p, \quad A^c = \frac{R}{p}, \quad p = (1+i)^c - 1.$$

Pavyzdys Kokią pinigų sumą reikėtų atidėti šiandien, jei palūkanų norma 12% palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį tam, kad nuo šiandien kiekvienų metų pabaigoje būtų gali gauti 2500 išmoką?

Turime $R = 2500, \quad c = 4, \quad i = 0,03.$

Tada

$$p = 1,03^4 - 1 = 0,125508.$$

Tad pradinė investicija turėtų būti tokia:

$$A = \frac{2500}{0,125508} \approx 19920.$$

Tuo atveju, jei R dydžio išmokos yra gaunamos tuojau pat, tai tada, remiantis paprasto anuiteto analogija gauname, kad išankstinio anuiteto dabartinę vertę galime skaičiuoti tokiu būdu:

$$A^* = R(\frac{p+1}{p}).$$

Pavyzdys Kokia viso gyvenimo anuiteto dabartinė vertė, jei pastovios išmokos yra 750 mokomos kiekvieno mėnesio pradžioje, o palūkanų norma 14,5% ir palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį?

Turime $R = 750, \quad i = 0,0725; \quad c = \frac{1}{6}.$

Tada

$$p = 1,01^{\frac{1}{6}} - 1 = 0,0117337.$$

Dabartinė viso gyvenimo anuiteto vertė yra

$$A^{*^c} = 750 + \frac{750}{0,0117337} = 64668,46.$$

4.11 Papildomas skyrius. Bendrosios pinigų srauto formulės

Panagrinėsime paprastojo anuiteto uždavinį, kai faktinė (mokėjimo momento) palūkanų norma yra laiko funkcija, t.y. $i = f(t)$, o mokėjimo dydis taip pat priklauso nuo laiko $R = R(t)$. Spręsdami anuiteto uždavinį mes visus mokėjimus susiejame su dabartiniu laiko momentu, t.y. laiko momentu kai sudaroma sutartis. Šiuo atveju mes darome prielaidą, kad pinigų vertė kintant laikui bus stabili ir lygi dabarties palūkanų normai bei mokėjimai taip pat vienodi visais laiko momentais. Nagrinėjant PS uždavinį galima laikytis ir kitos prielaidos t.y., kad pinigų vertė laikui bėgant kinta, o mokėjimai taip pat gali būti skirtingi įvairiais laiko momentais.

Nagrinėjant PS, kai palūkanų norma ir mokėjimai priklauso nuo laiko negalime taikyti žinomų formulių, kadangi nagrinėjama seka nėra geometrinė progresija. Panagrinėkime PS-tą, t.y. seką, kai palūkanos perskaičiuojamos mokėjimo metu ir vieną kartą šiame laikotarpyje. Simboliu t_i, čia i natūralusis skaičius, žymėsime i-ojo laiko intervalo ilgį. Pavyzdžiui, jei sutartis buvo pasirašyta 2010. 02.15, pirmasis mokėjimas buvo atliktas 2010.04.15, o antrasis mokėjimas buvo atliktas 2010.07.15 tai laikysime, kad $t_1 = 1/6, \ t_2 = 0,25$. Be to, tegu $f(t_i)-$ faktinė palūkanų norma i-uoju laiko momentu, r_i- palūkanų perkaičiavimo skaičius (tikslus įskaitant ir racionalų) i- tąjame laiko intervale. Panagrinėkime šią situaciją detaliau. Praėjus pirmąjam laiko intervalui buvo atlikta įmoka $S_1 = R(t_1)$, taigi sąskaitos balansas šiuo metu lygiai toks pat. Pasibaigus antrąjam periodui sąskaitos balansas yra $S_2 = R(t_2) + R(t_1)(1 + f(t_2))^{n_2}$. Pasibaigus trečiąjam periodui- balansas yra

$$S_3 = R(t_3) + S_2(1 + f(t_3))^{r_2} = R(t_3) + R(t_2)(1 + f(t_3))^{r_3} + R(t_1)(1 + f(t_2))^{r_2}(1 + f(t_3))^{r_3}$$

ir t.t.

$$S_n = R(t_n) + R(t_{n-1})(1+f(t_n))^{r_n} + R(t_{n-2})(1+f(t_{n-1}))^{r_{n-1}}(1+f(t_{n-2}))^{r_{n-2}} + \dots$$
$$+R(t_1)(1+f(t_2))^{r_2}(1+f(t_3))^{r_3}\dots(1+f(t_n))^{r_n}.$$

Naudojant sumavimo bei daugybos apibendrintus simbolius pastaruosius sąryšius galime perrašyti tokiu būdu:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} R(t_i) \prod_{j=i}^{n-1} (1+f(t_{j+1}))^{r_{j+1}},$$

laikome, kad sandaugos rezultatas lygus 1, jei viršutinis indeksas virš sandaugos ženklo yra mažesnis negu apatinis.

Tuo atveju, jei anuitetas apmokėtasis, tai būsimosios vertės skaičiavimo formulė bus tokia:

$$S_n^* = R(t_n)(1+f(t_n))^{r_n} + R(t_{n-1})(1+f(t_{n-1}))^{r_{n-1}}(1+f(t_n))^{r_n} + \dots$$
$$+R(t_1)(1+f(t_1))^{r_1}(1+f(t_2))^{r_2}\dots(1+f(t_{n-1}))^{r_{n-1}}(1+f(t_n))^{r_n}.$$

Arba trumpai

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} R(t_i) \prod_{j=i}^{n} (1+f(t_j))^{r_j}.$$

Panagrinėkime dabartinės vertės radimo uždavinį bendru atveju. Tegu s_i, yra i-ojo laikotarpio palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius (gal būt ir racionalus) tenkantis laiko intervalui $T = t_1 + t_2 + \cdots + t_i$. Samprotaudami analogiškai kaip ir anuiteto atveju turime, kad jei PS yra įprastiniai, tai pirmasis mokėjimas $R(t_1)$ yra diskontuojamas su faktine palūkanų norma, kuri buvo rinkoje laiko intervale t_1, t.y. $f(t_1)$. Tad šio mokėjimo dabartinė vertė bus $A_1 = R(t_1)/(1+f(t_1))^{s_1}$. Tada antrasis mokėjimas $R(t_2)$ yra diskontuojamas laiko intervale $t_1 + t_2$ su palūkanų norma, kuri antrojo mokėjimo momentu buvo rinkoje, t.y. $f(t_2)$. Tad šio mokėjimo dabartinė vertė bus

$$A_2 = R(t_2)/(1+f(t_2))^{s_1+s_2},$$

ir t.t. n-asis mokėjimas $R(t_n)$ yra diskontuojamas su faktine palūkanų norma, kuri n-uoju laiko momentu buvo rinkoje, t.y. $f(t_n)$. Tad šio mokėjimo dabartinė vertė bus

$$A_n = R(t_n)/(1+f(t_n))^{s_1+s_2+\cdots+s_n}.$$

PS dabartinė vertė yra visų dabartinių verčių suma, tada

$$A := A_n = \frac{R(t_1)}{(1+f(t_1))^{s_1}} + \frac{R(t_2)}{(1+f(t_2))^{s_1+s_2}} + \cdots + \frac{R(t_n)}{(1+f(t_n))^{s_1+\cdots+s_n}}.$$

Naudojant sutrumpintą formulę galime pastarąjį reiškinį perrašyti tokiu būdu:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{R(t_i)}{(1+f(t_i))^{s_1+\cdots+s_i}}.$$

Tuo atveju, jei anuitetas apmokėtasis samprotaudami analogiškai gauname, kad

$$A^* = R(t_0) + \frac{R(t_1)}{(1+f(t_1))^{s_1}} + \cdots + \frac{R(t_{n-1})}{(1+f(t_{n-1}))^{s_1+\cdots+s_{n-1}}}$$

arba

$$A^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{R(t_i)}{(1+f(t_i))^{s_1+\dots+s_{i-1}}}.$$

Pastebėsime, kad jei laikotarpis T nėra t_n kartotinis, tai diskontuojant taikomas tikslus metodas.

Aptarkime atidėtojo PS uždavinį. Samprotaudami kaip ir anuiteto atveju ir laikydami, kad atidėtasis laiko intervalas yra t, o atidėtųjų palūkanų perskaičiavimo periodų skaičius yra l, o atidėtojo PS mokėjimo periodų skaičius yra n gauname, kad būsimoji PS vertė yra

$$S_n(l) = S_n,$$

o dabartinė atidėtojo PS vertė yra

$$A_n(l) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{R(t_i)}{(1+f(t_i))^{s_1+\dots+s_i}}}{(1+f(t))^l}$$

primename, kad l yra faktinės palūkanų normos, momentu t, perskaičiavimo periodų skaičius laiko intervale $[0,t]$.

Analogiškai samprotaudami gauname ir apmokėtųjų atidėtųjų periodinių mokėjimų būsimąją ir dabartinę vertes.

$$S^*_n(l) = S^*_n, \quad \text{ir} \quad A^*_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{R(t_i)}{(1+f(t_i))^{s_i}}}{(1+f(t))^l},$$

čia t yra laiko intervalas, kuriame nebuvo atlikta mokėjimų, $t=0$ yra pradinis laiko momentas.

Panagrinėkime viso gyvenimo anuiteto uždavinį tuo atveju, kai anuitetas įprastinis ir apmokėtasis.

Tuo atveju, kai anuitetas įprastinis gauname, kad visų mokėjimų dabartinę vertę galime užrašyti tokiu būdu:

$$A(\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R(t_i)}{(1+f(t_i))^{s_i}}.$$

Jei anuitetas apmokėtasis, tai

$$A^*(\infty) = R(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R(t_i)}{(1+f(t_i))^{s_i}},$$

čia $R(0)$ yra pradinis mokėjimas, sutarties pradžioje.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių, kai mokėjimai kinta specialiu būdu.

Nagrinėsime atvejį, kai mokėjimai priklauso geometrinės progresijos sekai ir kiekvienas sekantis mokėjimas pakinta r procentų, o palūkanų norma yra i, kurios kaupiamos kas metus. Tegu R_k, $k=1,2,\dots$, yra $k-$ asis mokėjimas. Tada mokėjimų seką galime užrašyti tokiu būdu:

$$R_1 = R,\ R_2 = (1+r)R,\ \ \dots, R_k = (1+r)^k R, \dots.$$

Diskontuotų mokėjimų seką užrašome taip:

$$A(\infty) = \frac{R}{(1+i)}\Big(1 + \frac{1+r}{(1+i)} + \dots + \big(\frac{1+r}{(1+i)}\big)^2 + \dots + \big(\frac{1+r}{(1+i)}\big)^n + \dots\Big).$$

Taikydami geometrinės sekos begalinės sumos formulę gauname dabartinę nuolatinio anuiteto formulę:

$$A = \frac{R}{i-r}.$$

Pastaba Atkreipiame skaitytojo dėmesį, kad šiuo atveju r galime laikyti tiek teigiamu, tiek neigiamu dydžiu, t.y. kiekvienas mokėjimas gali būti didinamas arba mažinamas pastoviu procentų skaičiumi.

Tarkime, kad mokėjimai yra nevienodi, be to $k-$ asis mokėjimas, $k-1-$ ojo atžvilgiu padidėja dydžiu r_k ir periodo (faktinė) norma i. Pažymėję $n-$ ojo mokėjimo dydį simboliu $P_n, n = 1, 2, \dots$, gauname tokią mokėjimų seką:

$$P_1,\ P_2 = P_1(1+r_1),$$

$$P_3 = P_1(1+r_1)(1+r_2),\ \dots P_k = P_1(1+r_1)\dots(1+r_k),\dots.$$

Tada dabartinė diskontuota mokėjimų vertė yra lygi tokiai eilutei:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_1(1+r_1)\dots(1+r_k)}{(1+i)^k}.$$

Siūlome skaitytojui nustatyti, kada ši eilutė konverguoja.

Pastaba Dvi paskutiniosios formulės buvo sudarytos įprastinio PS atveju. Jei PS apmokėtasis, tuomet tektų šių formulių dešiniąsias puses padauginti iš dydžio $1+i$.

Aptarkime situaciją, kai mokėjimų dydis kinta. Laikysime, kad mokėjimo ir palūkanų periodai sutampa. Tarkime, kad $n-$ ojo mokėjimo dydis yra $P_n = P_{n-1}(1+r),\ n = 0, 1, 2, \dots$. Tarkime, kad mokėjimai sudaro geometrinę progresiją $P_0, P_1, \dots,$. Taigi, turime tokią seką $P_0,\ P_1 = (1+r)P_0,\ P_2 = (1+r)^2P_0, = \dots, P_n = (1+r)^{n-1}P_0, \dots$. Aišku, kad tai neaprėžta seka. Imkime šios sekos pirmuosius n narius ir sudėkime laikydami, kad mokėjimai atliekami periodo pabaigoje. Skaičiuodami mokėjimų dabartinę vertę gauname,

$$A = \frac{P_1}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \frac{P}{1+i}\Big(1 + \frac{1+r}{1+i} + \frac{(1+r)^2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(1+r)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\Big),$$

i yra faktinė palūkanų norma.

Iš paskutiniosios lygybės gauname, kad

$$A = P\Big(1 - \frac{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}\Big).$$

Šia lygybe mes skaičiuojame paprastų periodinių mokėjimų, kai pradinis įnašas yra P, o kiti įnašai didėja $p100\%$, dabartinę vertę.

Pratybų uždaviniai

1. Tėvai pasirašė sutartį su banku ir kaupia pinigus studijoms sūnui, kiekvieno mėnesio pabaigoje į sąskaitą pervesdami po fiksuotą pinigų sumą. Sutartyje nurodyta, kad penkiolika metų bankas mokės 6% metines palūkanas, kurias perskaičiuos kas ketvirtį. Žinoma, kad galutinio termino taške sąskaitoje susidarys 80000 suma. Nustatykite mėnesio įmokos dydį bei palūkanų, kurios susikaups sąskaitoje, dydį.

2. Asmuo, siekdamas užsitikrinti pakankamas lėšas senatvei, keturiasdešimt metų, kiekvieno mėnesio pabaigoje į sąskaitą pervesdavo po 400 sumą. Nustatykite kokia turėtų būti palūkanų norma, kad pabaigoje sąskaitoje susidarytų 1000000 suma, jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas pusę metų?

3. Automobilis kainuoja 75000. Buvo nuspręsta šį automobilį pirkti lizingo būdu, kiekvieno mėnesio pradžioje mokant po 700 sumą. Per kiek laiko bus išpirktas automobilis, jei palūkanų norma 3%, palūkanos perskaičiuojamos kas du mėnesius.

4. Traktorius kainuoja 50000. Buvo nuspręsta šį traktorių pirkti lizingo būdu, kiekvieno mėnesio pradžioje mokant po 900 sumą. Per kiek laiko bus išpirktas traktorius, jei palūkanų norma 5,5%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, o paskolos mokėjimai buvo atidėti dvejiems metams.

5. Apmokant 120000 paskolą 15 metų laikotarpyje tenka kas pusmetį mokėti po 6500 sumą. Žinoma, kad paskolos palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį. Raskite nominaliąją paskolos palūkanų normą jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį, o paskolos mokėjimai buvo atidėti trejiems metams.

6. Įsigytas turtas yra vertinamas 255 000. Yra numatyta šį turtą įsigyti lizingo būdu kas mėnesį mokant po 8000. Pirmas mokėjimas atliekamas po penkerių metų nuo turto įsigyjimo.

1) Tegu palūkanų norma yra 8% palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Kiek laiko teks mokėti skolą?

2) Nustatykite, kokiai palūkanų normai esant turtas bus įsigytas iš lizingo kompanijos per 10 metų.

7. Biuras yra nuomojamas mokant mėnesio pradžioje po 1500. Firma nusprendė įsigyti šį biurą. Nustatykite šių patalpų vertę, jei palūkanų norma yra 6%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

8. Mecenatas nusprendė įsteigti gerai besimokančių studentų stipendijų fondą. Sudarydamas fondą , į banko sąskaitą pervedė 2000000 sumą. Sutartyje numatyta, kad palūkanų norma bus 6% ir palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Kiekvienais metais dalis pinigų yra skiriama stipendijoms.

1) Nustatykime išmokoms skiriamų pinigų sumą (maksimalią), kad fondas galėtų egzistuoti neribotą laiką, jei stipendijos yra pradedamos išmokėti po trijų metų nuo sutarties sudarymo ir mokamos pasibaigus ketvirčiui?

2) Kokiai palūkanų normai esant, (palūkanos peskaičiuojamos kas pusmętį), fondas kas metus galėtų skirti po 100000 sumą neribotą laiko tarpą, jei mokėjimai būtų pradedami mokėti po penkerių metų nuo dabar.

9. Kiekvieno ketvirčio pabaigoje pensinkas iš pensijų fondo, kurio balansas 80000, gaus po 9000 kiekvieno pusmečio pradžioje visą gyvenimą. Žinoma, kad fondo palūkanos sudėtinės perskaičiuojamos kas mėnesį. Raskite nominaliąją palūkanų normą, jei mokėjimai atidedami trejiems metams.

10. Nustatykite kiek metų reikia kaupti pensiją, mokant po 500 kas mėnesį, kiekvieno mėnesio pradžioje, esant 8% palūkanų normai, kurios perskaičiuojamos kas du mėnesius tam, kad susidarytų 500000 suma. Nustatykite palūkanų normą, kuriai esant, kai palūkanos perskaičiuojamos kas keturis mėnesius, perkant šios sumos viso gyvenimo anuitetą asmuo galėtų kas mėnesį, kiekvieno mėnesio pradžioje, gauti po 3000 sumą?

Užduotys savarankiškam darbui

Paprastasis anuitetas

1. A.B. į sąskaitą perveda po 2000 kiekvieno ketvirčio pabaigoje. Bankas moka 13% palūkanas, kurios perskaičiuojamos taip pat kas ketvirtį. Kokia pinigų suma susidarys sąskaitoje po dvylikos metų.

Ats: 224135

2. Tėvai pasirašė sutartį su banku ir kaupia pinigus studijoms sūnui, kiekvieno pusmečio pabaigoje į sąskaitą pervesdami po fiksuotą pinigų sumą. Sutartyje nurodyta, kad penkiolika metų bankas mokės 12% metines palūkanas, kurias perskaičiuos kas pusmetį. Žinoma, kad galutinio termino taške sąskaitoje susidarys 150000 suma. Kiek palūkanų yra šioje sukauptoje sumoje.

Ats: 224135.

3. Siekdamas užsitikrinti pakankamas lėšas senatvėje, A.B. penkiolika metų, kiekvieno mėnesio pabaigoje į sąskaitą pervesdavo po 250 sumą. Po to dar dešimt metų sukaupta sąskaita buvo laikoma banke. Sutarties sąlygos: palūkanų norma 12%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Nustatykite sąskaitos balansą po 25 metų;

b) Kokią nominalią sumą sumokėjo A.B.;

c) Kiek sąskaitos balanse yra palūkanų.

Ats: *a*) 412202, *b*) 45000, *c*) 367202.

4. Asmuo šešiolika metų, kiekvieno pusmečio pabaigoje į Kredito unijos sąskaitą padeda po 3750. Kredito unija moka 17% palūkanas, kurios perskaičiuojamos kas pusmetį. Raskite sukauptos vertės, po šešiolika metų, dabartinę vertę.

Ats: $40300,7$.

5. Kiekvieno ketvirčio pabaigoje, už automobilio nuomą turite sumokėti po 6000 ir taip penkerius metus. Palūkanų norma 17,6%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

a) Kiek turėtumėte už naudojimąsi automobiliu penkerius metus sumokėti dabar iš karto visą sumą?

b) Kiek palūkanų per penkerius metus sumokėsite bankui?

Ats: *a*) $78728,3$, *b*) $41271,7$.

6. A.B. įsigydamas butą sutaria kiekvieno mėnesio pabaigoje, šešerius metus, mokėti po 2537,4 su 15% metinėmis palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Kiek kainuoja butas sutarties pasirašymo metu.

b) Kiek per visą mokėjimų laikotarpį sumokės palūkanų?

Ats: *a*) 120000, *b*) $9285,9$.

7. Nustatykite, kokiai palūkanų normai esant kiekvieno ketvirčio pabaigoje į sąskaitą padedant po 2000 po 15 metų sąskaitoje susidarytų 200000 suma.

Ats: $6,5\%$.

8. A.B. į sąskaitą perveda po 3000 kiekvieno mėnesio pradžioje. Bankas moka 12% palūkanas, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį. Kokia pinigų suma susidarys sąskaitoje po septynerių metų.

Ats: ≈ 395937.

9. Jonas įsigyjo motorinę valtį lizingo būdu, kurios originali kana 12500. Sutartyje nurodyta, kad šią sumą gražins per ketverius mokėdamas vienodas įmokas kiekvieno mėnesio pradžioje.

Nustatykite pastovių mokėjimų dydį, jei palūkanų norma 16,5%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Ats: $352,61$.

10. Kokiai nominaliai palūkanų normai esant pastoviai mokant į sąskaitą, kiekvieno ketvirčio pradžioje po 2500 sąskaitoje per dešimt metų susidarys 183070 suma.

Ats: 11%.

11. Tarkime, kad jūs į sąskaitą, dešimt metų, kiekvieno mėnesio pradžioje pervedate po 750. Nustatykite kiek laiko jūs galėtumėte po dešimties metų iš sukauptos sąskaitos kiekvieno mėnesio pradžioje imti po 2600, jei viso kontrakto palūkanų norma yra 12% , palūkanos perskaičiuojamos, kas mėnesį.

Ats: 109,5 mėnesiai.

12. Nustatykite lizingo efektyviąją palūkanų normą, jei kontrakto vertė 1350000, skola išmokama per septynerius metus, 150000 mokėjimais, kurie atliekami kas pusmetį, kiekvieno pusmečio pradžioje.

Ats: $16,165\%$.

13. Tarkime, kad dabar banko sąskaitoje turite 160000 sumą. Nustatykite kiek laiko galite iš sąskaitos imti po 10000 kiekvieno mėnesio pabaigoje, jei imti šias sumas pradedate po šešerių metų nuo dabar, o palūkanų norma visos sutarties metu yra 12% , palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Ats: 54,5 mėnesiai.

14. Kokią pinigų sumą reikėtų investuoti dabar, kad po devynerių metų kiekvieno ketvirčio pabaigoje, šešerius metus būtų gaunamos 1250 išmokos. Žinoma, kad banko palūkanų yra 10%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Ats: $8822,9$.

15. A.B. draudimo kompanijoje sudarė gyvybės sutartį aštuoneriems metams. Buvo sutarta kiekvieno ketvirčio pabaigoje į sąskaitą padėti po 750 sumą. Jei viso kontrakto laikotarpiu palūkanų norma 18%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį nustatykite:

1) Sąskaitos balansą sutarties pabaigoje.

2) Tarkime, kad trys pirmieji mokėjimai buvo praleisti, kokią vienkartinę sumą reikia sumokėti pirmuoju mokėjimu, kad toliau kontraktas būtų vykdomas įprastiniu režimu?

Ats: 1) $12591,67$ 2) $3208,64$.

16. Tėvai norėtų, kad duktė studijuodama mediciną kiekvieno mėnesio pabaigoje iš fondo gautų po 800. Žinoma, kad duktės studijos prasidės po septynerių ir ji studijuos dešimt metų. Nustatykite, kokią sumą į saskaitą reikėtų padėti dabar, kad šie planai būtų realizuoti, jei palūkanų norma 12% , palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį?

Ats: 24173.

17. Žinoma, kad po dešimties metų nuo dabar asmuo išeis į pensiją. Bankas asmeniui pasiūlė į sąskaitą dabar padėti fiksuotą pinigų sumą su 10% palūkanų norma, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį su sąlyga, kad po dešimties metų lygiai dvylika metų paeiliui, kiekvieno ketvirčio pradžioje gaus po 2000 sumą. Kokią sumą asmuo turi padėti į sąskaitą dabar?

Ats: $21204,33$.

18. Firma nuomoja biuro patalpas, kiekvieno mėnesio pradžioje mokant po 1250 sumą. Palūkanų norma rinkoje 13,5% , palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį. Kokia šių patalpų kaina, jei firma bandytų jas įsigyti.

Ats: 112361.

19. Verslininkas įsteigė vardinių meno stipendijų fondą, kurį sudaro 1254606 suma. Nustatykite, kokias kasmetines išmokas iš fondo būtų galima skirti, jei palūkanų norma 11,5% ir mokėjimai pradedami mokėti po ketverių metų.

Ats: 200000.

20. Nustatykite viešbučio rinkos kainą dabar, jei žinoma, kad vidutinės mėnesio pajamos sudaro 175000 per mėnesį, rinkos palūkanų norma 15,6% ir palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Ats: 13461538.

21. Asmuo įsigyjo nekilnojamo turto, kurio vertė 4680718 ir po trejų metų kas mėnesį, kiekvieno mėnesio pabaigoje, jis planuoja gauti 120000 pajamų visą gyvenimą. Nustatykite šio investicinio projekto palūkanų normą, jei palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

Ats: $\approx 18\%$.

Kompleksinis anuitetas.

1. Antanas kiekvieną ketvirtį, dengdamas skolą turi sumokėti po 3750. Žinoma, kad ši paskola paimta aštuoneriems metams su 12% metinėmis palūkanomis, kurios perskaičiuojamos kas mėnesį. Nustatykite kokią bendrą sumą sumokės po aštuonerių metų, jei:

(a) mokėjimus atliks kiekvieno ketvirčio pabaigoje? (b) kiekvieno ketvirčio pradžioje?

Ats: (a) 197923 (b) 203921.

2. Nustatykite sąskaitos balansą po dvylikos metų, jei į šią sąskaitą kas mėnesį yra pervedama po 145, kai banko palūkanų norma yra 15% ir palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Panagrinėkite du atvejus:

(a) pervedimai atliekami kiekvieno mėnesio pradžioje? (b) kiekvieno mėnesio pabaigoje?

Ats: (a) 55875 (b) 56553.

3. Kas mėnesį į sūnaus kaupiamąją sąskaitą yra padedama po 15 sumą, kuriai pagal sutartį mokamos 12% sudėtinės palūkanos, kurios perskaičiuojamos kas ketvirtį. Kiek laiko teks laukti iki susidarys 5000 suma, jei pervedimai atliekami:

(a) kiekvieno mėnesio pabaigoje? (b) kiekvieno mėnesio pradžioje?

Ats: (a) $n = 148.05$ (mėnesių) (b) $n = 147.3$ (mėnesių).

4. Buto remontui buvo paimta 32000 paskola, kuri bus grąžinama įprastinio anuiteto metodu mokant po 8200 kas ketvirtį, penkiolika metų. Žinoma, kad paskolos mokėjimas buvo atidėtas dešimčiai metų. Nustatykite nominaliąją palūkanų normą, jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

Ats: 17.699%.

5. Nustatykite kokia kontrakto nominalioji palūkanų norma, jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, ir be to žinoma, kad 250 išmokos yra išmokamos kas pusmetį (pabaigoje) aštuonerius metus iš saskaitos, kurioje yra 8400 suma?

Ats: 16.3%.

6. Nustatykite, koks vienas mokėjimas atliktas dabar būtų ekvivalentus pastoviems 3500 mokėjimams kurie atliekami kas pusmetį, esant 14% palūkanų normai, kai palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį ir mokėjimai atliekami:

(a) kiekvieno pusmečio pabaigoje 15 metų?

(b) kiekvieno pusmečio pradžioje 10 metų?

(c) kiekvieno pusmečio pabaigoje 18 metų, bet mokėjimai būtų atidėti ketveriems metams?

(d) kiekvieno pusmečio pradžioje 9 metus, atidėjus trejus metus?

(e) kiekvieno pusmečio pabaigoje visą gyvenimą?

(f) kiekvieno pusmečio pradioje visą gyvenimą?

Ats: (a) $42902,5$ (b) 39345 (c) 18914 (d) 24740 (e) 49140 (f) 52640.

7. Nustatykite, kokią pinigų sumą turite investuoti dabar į pensijinį fondą tam, kad dvidešimt metų, kiekvieno mėnesio pabaigoje gautumėte po 800 išmoką, jei viso nagrinėjamo laikotarpio (sutarties) palūkanų norma 12%, palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį ir mokėjimai atidedami 15-ai metų?

Ats: $12885,42$.

8. 4000000 skolos mokėjimas buvo atidėtas trejiems metams. Skola dengiama septynerius metus, mokant po pastovią sumą kiekvieno mėnesio pabaigoje. Nustatykite šių mokėjimų dydį, jei palūkanų norma 17%, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

Ats: 133804.

9. Nustatykite, koks bus kaupiamosios sąskaitos balansas po trejų metų, jei sutartyje nurodyta, kad asmuo pirmuosius metus kas pusmetį, antruosius kas ketvirtį, o trečiuosius kas du mėnesius į sąskaitą perveda kas kartą 10% didesnę sumą negu prieš tai ir be to sutartyje nurodyta, kad metinė palūkanų norma bus nustatoma pagal formulę

$$f(t) = \frac{4t+3}{t+1}, \quad t \in [0, 3],$$

palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Pradinė įmoka yra 1000, mokėjimai atliekami laikotarpio pradžioje.

10. Tarkime, kad asmuo grąžina 20000 paskolą pastoviais mokėjimais, kurie atliekami kiekvieno pusmečio pabaigoje, palūkanos perskaičiuojamos kas du mėnesius ir nustatomos pagal formulę

$$f(t) = 5\sin\frac{\pi t}{4} + 6, \quad t \in [0, 4].$$

Nustatykite paskolos dydį.

Privalomos namų darbų užduotys

1. Apmokėdamas penkiolikos metų skolą asmuo, kas du mėnesius į sąskaitą perveda po 2400 sumą. Banko palūkanų norma 8% , kurios perskaičiuojams taip pat kas du mėnesius. Kokią pinigų sumą, bendrai paėmus, sumokės asmuo per šiuos penkiolika metų.

2. Tėvai pasirašė sutartį su banku siekdami sukaupti pinigus sūnaus studijoms. Tad kiekvieno mėnesio pabaigoje į sąskaitą perveda po fiksuotą sumą. Sutartyje nurodyta, kad penkiolika metų bankas mokės 6% metines palūkanas, kurias perskaičiuos kas mėnesį. Žinoma, kad galutinio termino taške sąskaitoje susidarys 80000 suma. Nustatykite mėnesio įmokos dydį bei palūkanų, kurios susikaups sąskaitoje, dydį.

3. Asmuo, siekdamas užsitikrinti pakankamas lėšas senatvėje, keturiasdešimt metų, kiekvieno mėnesio pabaigoje į sąskaitą pervesdavo po 400 sumą. Nustatykite kokia turėtų būti palūkanų norma, kad pabaigoje sąskaitos balansas būtų 1000000, jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį?

4. Automobilis kainuoja 75000. Buvo nuspręsta šį automobilį pirkti lizingo būdu, kiekvieno mėnesio pradžioje mokant po 700 sumą. Per kiek laiko bus išpirktas automobilis, jei palūkanų norma 3%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

5. Nustatykite kokio dydžio pastovias įmokas kiekvieno mėnesio pradžioje tektų mokėti padengiant 500 000 paskolą, 20 metų laikotarpyje, jei paskolos palūkanų norma 6%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį ir be to kas dvejus metus, jų pradžioje sumokant papildomai po 20000 sumą.

6. Statybinė firma įsigyjusi betono maišyklę, kiekvieno mėnesio pradžioje turi sumokėti po 525 penkerius su puse metų. Palūkanų norma 6%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Kiek tektų sumokėti, jei už pirkinį mokėtume iš karto?

b) Kiek per penkerius su puse metų sumokės nominaliai?

c) Kokie finansavimo kaštai?

7. Tarkime, kad jūs į sąskaitą, dvylika metų, kiekvieno mėnesio pradžioje pervedate po 1750. Nustatykite kiek laiko jūs galėtumėte po dvidešimties metų iš sukauptos sąskaitos kiekvieno mėnesio pabaigoje imti po 5500, jei viso kontrakto palūkanų norma yra 7% , palūkanos perskaičiuojamos, kas mėnesį.

8. Biuras yra nuomuojamas mokant mėnesio pradžioje po 1500. Firma nusprendė šį biurą įsigyti dabartiniu momentu. Nustatykite šių patalpų vertę dabar, jei palūkanų norma yra 6% , palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

9. Mecenatas nusprendė įsteigti gerai besimokančių studentų stipendijų fondą jį sudarydamas banko sąskaitoje, pervesdamas 2000000 sumą. Sutartyje numatyta, kad palūkanų norma bus 6% ir palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Kiekvienais metais palūkanų dalis yra skiriami stipendijoms.

1) Nustatykime išmokoms skiriamų pinigų sumą, kad fondas galėtų egzistuoti neribotą laiką, jei stipendijos yra pradedamos išmokėti po trijų metų nuo sutarties sudarymo ir mokamos pasibaigus pusmečiui?

2) Kokiai palūkanų normai esant, (palūkanos peskaičiuojamos kas metus), fondas kas metus galėtų skirti po 100000 sumą neribotą laiko tarpą, jei mokėjimai būtų pradedami mokėti po penkerių metų nuo dabar.

9. Kiekvieno ketvirčio pabaigoje pensininkas iš pensijų fondo, kurio balansas 180000, po dešimties metų gaus po 6000 kiekvieno ketvirčio pradžioje visą gyvenimą. Žinoma, kad fondo palūkanos sudėtinės perskaičiuojamos kas ketvirtį. Raskite anuiteto nominaliąją palūkanų normą.

10. Asmuo nusprendė kaupti pinigus dvidešimt metų, pasibaigus keturiems mėnesiams į sąskaitą pervedant po 1500. Sutarties sąlygos: pirmuosius dvylika metų palūkanų norma 8% palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį, o likusius dvylika metų palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Nustatykite sąskaitos balansą po 8 metų;

b) Nustatykite sąskaitos balansą po 14 metų;

a) Nustatykite sąskaitos balansą po 20 metų;

b) Kiek palūkanų susidarys sąskaitoje po 20 metų?

11. Asmuo septynerius metus, kiekvieno ketvirčio pabaigoje į sąskaitą pervesdavo po 5000 sumą, kai palūkanų norma 12%, palūkanos perskaičiuojamos kas du mėnesius . Po to dar penkerius metus sukaupta suma buvo laikoma banke su ta pačia palūkanų norma.

a) Nustatykite koks bus sąskaitos balansas po 15 metų, jei palūkanų norma 13.5% , palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį.

b) Nustatykite, kiek laiko šia suma galėtų disponuoti asmuo, šiai sumai perka anuitetą, kurio sąlygose numatyta, kad kas mėnesį būtų išmokama po 2000, esant 8% palūkanų normai, kai palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį?

12. Įmonė buvo įsigyta lizingo būdu gavus 50000 nuolaidą nuo pradinės kainos. Už įsigytą turtą tenka mokėti po 35000 kiekvieno pusmečio pabaigoje, aštuonerius metus. Palūkanų norma 10%, palūkanos perskaičiuojamos kas mėnesį.

a) Kokia įsigyjamos įmonės vertė sandorio metu, kai nebuvo pritaikyta nuolaida?

b) Kiek palūkanų per šešerius metus bus sumokėta bankui?

c) Kokią sumą, bendrai paėmus, teks sumokėti už šį turtą jei mokėjimai atidedami dviems metams.

13. Kiek laiko tektų dengti paskolą, jei kiekvieno mėnesio pradžioje yra sumokama po 3500, palūkanos yra 6% perskaičiuojamos kas ketvirtį, paskolos dydis yra 200000.

14. Įsigytas turtas yra vertinamas 255 000. Yra numatyta šį turtą įsigyti lizingo būdu kas mėnesį mokant po 8000. Pirmas mokėjimas atliekamas po penkerių metų nuo turto įsigyjimo.

1) Tegu palūkanų norma yra 8% palūkanos perskaičiuojamos kas pusmetį. Kiek laiko teks mokėti skolą?

2) Nustatykite, kokiai palūkanų normai turtas bus įsigytas iš lizingo kompanijos per 10 metų.

15. Nustatykite kokia turėtų būti sukaupta suma pensijų fonde tam, kad perkant anuitetą 5000 sumai, kuri išmokama kiekvieno mėnesio pradžioje ir mokėjimai atliekami praėjus dviems metams po anuiteto įsigyjimo. Anuiteto laikotarpiu palūkanų norma 8% , palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį.

16. Kokia turėtų būti minimali fiksuota palūkanų norma, jei žinoma, kad palūkanos perskaičiuojamos kas du mėnesius, o premijų fondas, iš kurio išmokami kasmetiniai 200000 mokėjimai, pradiniu momentu yra sukaupęs 4500000 sumą.

17. Nustatykite fondo grąžos normą, jei žinoma, kad pradinė investuota suma sudaro 50000, palūkanos perskaičiuojamos kas ketvirtį, ir fondas garantuoja 3500 pusmečio išmokas.

18. Nustatykite kiek metų reikia kaupti pensiją, mokant po 500 kas mėnesį, kiekvieno mėnesio pradžioje, esant 8% palūkanų normai, kurios perskaičiuojamos kas du mėnesius tam, kad susidarytų 500000 suma. Kokiai palūkanų normai esant, kai palūkanos perskaičiuojamos kas keturis mėnesius, perkant šios sumos anuitetą asmuo kas mėnesį, kiekvieno mėnesio pradžioje, visą gyvenimą, galėtų gauti po 3000 sumą?

Pasitikrinkite sąvokas:

Ką vadiname: 1) periodiniu mokėjimu; 2) koks periodinis mokėjimas vadinamas anuitetu; 3) anuitetą vadiname (paprastuoju) kompleksiniu, jei..... 4) (paprastąjį) kompleksinį anuitetą vadiname įprastiniu, jei ...; 5) (paprastąjį) kompleksinį anuitetą vadiname apmokėtuoju, jei ...; 6) kompleksinį anuitetą vadiname atidėtu įprastiniu, jei ...; 7) (paprastąjį) kompleksinį anuitetą vadiname atidėtu apmokėtu, jei ...; 8) (paprastąjį) kompleksinį anuitetą vadiname viso gyvenimo įprastiniu, jei ...; 9) (paprastąjį) kompleksinį anuitetą vadiname viso gyvenimo apmokėtuoju, jei .....