IV. DEKARTO KOORDINAČIŲ SISTEMA. VEKTORIAI

4.1 Skaliarinė sandauga erdvėje $\mathcal{R}^n$

Tarkime, kad duota vektorinė erdvė $\mathcal{R}^n$. Priminsime, kad šios erdvės elementai yra vektoriai $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$. Be mums jau žinomų vektorių operacijų šioje erdvėje apibrėžkime dar vieną operaciją.

Apibrėžimas Dviejų vektorių $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ ir $\beta = (b_1, \ldots b_n)$ skaliarine sandauga (žymėsime $\alpha \circ \beta$) vadinsime skaičių

$$\alpha \circ \beta = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Vektorinės erdvės sąvoką šiek tiek susiaurinkime, reikalaudami, kad vektorinėje erdvėje būtų apibrėžta skaliarinė sandauga.

Apibrėžimas Tarkime, kad x, y, z bet kokie, vektorinės erdvės $\mathcal{R}^n$ elementai. Tuomet funkcija ($\rho : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$), kuri dviems vektorinės erdvės elementams priskiria realų skaičių, vadinsime atstumu, jeigu ji turi savybes:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Kyla klausimas - kaip apibrėžti funkciją $\rho(,)$? Pasirodo, kad tai galime atlikti naudodami skaliarinę sandaugą. Skaitytojas nesunkiai gali patikrinti, kad visas atstumo savybes tenkina funkcija

$$\rho(x, y) := \sqrt{(x - y) \circ (x - y)}.$$

Kitaip tariant

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \tag{1}$$

jeigu $x, y \in \mathcal{R}^n$. Tikimės, kad skaitytojas supranta, kad atstumas tarp erdvės elementų nusakomas ne vieninteliu būdu! Ateityje mes nagrinėsime vektorinių erdvių $\mathcal{R}^n$, kai $n = 1, 2, 3$ su jose apibrėžta (1) metrika, atitiktis.

4.2 Geometriniai vektoriai. Veiksmų savybės

Prisiminkime mokyklinės geometrijos kursą, kitaip dar vadinamą- Euklidine geometrija. Euklidinės geometrijos objektas yra geometrinių figūrų savybių tiesėje, plokštumoje, bei erdvėje, tyrimas. Priminsime skaitytojui, kad matematinės sąvokos - taškas, tiesė, plokštuma, erdvė, atstumas yra neapibrėžiamos, t.y. pirminės. Susitarkime tiesę, plokštumą, bei erdvę, ateityje, jei nekils neaiškumų, vadinti tiesiog erdvėmis.

Geometriniu vektoriumi vadinsime tiesės atkarpą, su nurodytąja kryptimi. Taigi, vektorius erdvėje apibrėžia kryptį ir "daugybė" atkarpų, turinčių tą pačią kryptį ir ilgį reiškia tą patį vektorių. Beje, kiekviena tiesės atkarpa yra charakterizuojama ilgiu (tiesės atkarpos charakteristika). Taip apibrėžto vektoriaus atkarpos pradžios tašką vadinsime vektoriaus pradžios tašku, o tašką, kuriame nurodoma kryptis - pabaigos tašku. Kitaip tariant du vektoriai lygūs, kai vektorius nusakančių atkarpų ilgiai vienodi ir kryptys sutampa. Vektorius vadinsime kolineriais, jeigu juos nusakančios atkarpos lygiagrečios. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad tiesėje visi vektoriai kolinerūs. Sakysime, kad vektoriai komplanariniai, jei jie nėra kolineriniai ir yra vienoje plokštumoje. Sutarkime geometrinį vektorių žymėti graikiškosios abėcėlės mažosiomis raidėmis, jeigu mums bus nesvarbūs vektoriaus pradžios bei pabaigos taškai. Jeigu vektorius jungia taškus A, B, čia A yra vektoriaus pradžios, o $B-$ pabaigos taškai, tai tada vektorių žymėsime $\overrightarrow{AB}$.

Vektoriaus ir skaičiaus $c \in \mathcal{R}, \ c \neq 0$, sandauga $c\alpha$ vadinsime vektorių γ, kurio ilgis skiriasi nuo pradinio vektoriaus ilgio c vienetų (t.y. c kartų ilgesnis, jei $|c| > 1$ ir c kartų trumpesnis, jei $0 < |c| < 1$, be to γ kryptis ta pati kaip ir pradinio vektoriaus jei $c > 0$ ir priešinga, jei

$c < 0$. Norėtume pabrėžti, kad daugindami vektorių iš skaičiaus gauname vektorių, kolinerų pradiniam vektoriui, t.y. vektoriai γ ir α yra kolinerūs.

Geometrinių vektorių aibėje sudėties operaciją apibrėžkime tokiu būdu: sudėdami du vektorius visų pirma, abu dėmenis, atlikę lygiagretų postūmį, perkeliame į vieną tašką. Brėžiame lygiagretainį (jei vektoriai nekolinerūs), kurio kraštines sudaro minėtieji vektoriai. Tada šių vektorių suma vadinsime vektorių, kurio pradžios taškas sutampa su dėmenų pradžios tašku, o pabaigos taškas yra priešingoje lygiagretainio viršūnėje. Du vektorius galime sudėti ir kitu, taip vadinamu trikampio, būdu. Jo esmė tokia. Prie pirmojo dėmens pabaigos taško, lygiagretaus postūmio pagalba, perkelkime antrojo dėmens pradžios tašką. Tada vektorius, jungiantis pirmojo dėmens pradžios tašką su antrojo vektoriaus pabaigos tašku bus vadinamas šių vektorių suma. Žinoma, visai nesvarbu kokiu būdu sudėsime, trikampio ar lygiagretainio, rezultatas bus tas pat. Vektoriaus α ir β skirtumu vadinsime vektorių α ir $(-1)\beta$ sumą, trumpai $\alpha - \beta = \alpha + (-1)\beta$. Jei vektoriai kolinerūs ir tos pat krypties, tai jų suma yra vektorius, kurio ilgis lygus dėmenų ilgių sumai, o kryptis tokia pat kaip ir dėmenų. Jeigu vektorių kryptys priešingos, tai jų suma bus vadinamas vektorius, kurio ilgis lygus vektorių ilgių skirtumui, o šio vektoriaus kryptis sutampa su vektoriaus, kurio ilgis didesnis, kryptimi.

Skaitytojui paliekame įrodyti tokias vektorių veiksmų savybes:

1) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Be to, jeigu $m, n \in \mathcal{R}$, tai

2) $$(m + n)\alpha = m\alpha + n\alpha, \ m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta,$$

3) $$m(n\alpha) = (mn)\alpha.$$

Geometrinį vektorių α_0 vadinsime vektoriaus α ortu, jeigu jis kolinerus vektoriui α ir jo ilgis lygus vienetui. Geometrinio vektoriaus ilgį žymėsime $|\alpha|$. Akivaizdu, kad bet kokį vektorių galime užrašyti $\alpha = |\alpha|\alpha_0$. Vektorių α ir β skaliarine sandauga, kurią žymėsime $\alpha \cdot \beta$, vadinsime skaičių, kuris lygus vektorių ilgio ir kampo tarp jų kosinuso reikšmės sandaugai, t.y.

$$\alpha \cdot \beta = |a||b| \cos \psi,$$

ψ yra kampas tarp vektorių α ir β.

Tarkime duoti du vektoriai - α ir β. Tada skaičių $pr_\beta \alpha := \alpha \cdot \beta_0$ vadinsime vektoriaus α projekcija vektoriaus β kryptimi, kur β_0 yra vektoriaus β ortas. Iš pastarojo apibrėžimo gauname gerai žinomą formulę $pr_\beta \alpha = |\alpha| \cos \psi$, kur ψ yra kampas tarp vektorių α, β. Tarkime, kad duota vektorių α ir β suma. Tada vektorių sumos projekcija, tarkime vektoriaus γ kryptimi, yra lygi dėmenų projekcijų sumai, t.y.

$$pr_\gamma(\alpha + \beta) = pr_\gamma \alpha + pr_\gamma \beta \text{ ir } pr_\gamma k\alpha = kpr_\gamma \alpha, \tag{2}$$

čia $k \in \mathcal{R}$.

Skaliarinės sandaugos savybės

1. Skaliarinė sandauga yra komutatyvi, t.y.

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

2. Skaliarinė sandrauga turi distributyvumo savybę:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

3. Jei vektoriai kolinerūs, tai

$$\alpha \cdot \beta = \pm|\alpha||\beta|,$$

"$-$" bus tuo atveju, kai vektorių kryptys priešingos (skiriasi 180^0 laipsnių kampu), o kitu atveju bus + ženklas.

4. Vektoriaus skaliarinė sandauga iš jo paties lygi

$$4) \ \ \alpha \cdot \alpha = |\alpha|^2.$$

Tarkime, kad vektoriai α, β, γ yra plokštumos vektoriai ir α ir β. Tada vektorių γ galime užrašyti tokiu būdu: $\gamma = m\alpha + n\beta$, kur m, n yra vektoriaus γ projekcijos vektorių α, β kryptimi, atitinkamai. Norėdami tuo įsitikinti, vektorius γ, $m\alpha$, $n\beta$ lygiagrečiu postūmiu perkelkime į bendrą tašką. Tai atlikę pastebėsime, kad vektorius γ yra lygiagretainio, kurio kraštines apibrėžia vektoriai $m\alpha$ ir $n\beta$, įstrižainė. Jeigu α, β, γ - esantys ne vienoje plokštumoje erdvės vektoriai, tai naudodami dviejų nekolinerių vektorių sudėties taisyklę, nuosekliai du kartus, bet kokiam erdvės vektoriui δ gauname:

$$\delta = k\alpha + l\beta + m\gamma, \tag{3}$$

kur k, l, m yra vektoriaus δ projekcijos vektorių α, β, γ kryptimis, atitinkamai. Beje, tikimės, kad skaitytojas atkreipė dėmesį į tai, kad sumarinis vektorius δ, paskutinėje lygybėje, geometriškai reiškia gretasienio, kurio kraštines apibrėžia vektoriai

$$k\alpha, \ l\gamma, \ m\gamma,$$

įstrižainę.

Tris, poromis statmenus ortus, kurie prasideda viename taške, vadinsime erdvės reperiu. Pažymėkime šiuos ortus raidėmis $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad bet kokį erdvės vektorių galime užrašyti vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tiesiniais dariniais. Be to, jeigu

$\delta_1 = k_1 \ \mathbf{i} + l_1 \ \mathbf{j} + m_1 \ \mathbf{k}$, o $\delta_2 = k_2 \ \mathbf{i} + l_2 \ \mathbf{j} + m_2 \ \mathbf{k}$, tai

$$\delta_1 + \delta_2 = (k_1 + k_2) \ \mathbf{i} + (l_1 + l_2) \ \mathbf{j} + (m_1 + m_2) \ \mathbf{k}.$$

$$k\delta_1 = kk_1 \ \mathbf{i} + kl_1 \ \mathbf{j} + km_1 \ \mathbf{k}.$$

Šios lygybės įrodymas išplaukia iš vektorių (2) projekcijų savybių.

Kyla klausimas- ar bet koks vektorius, reperio vektorių tiesiniais dariniais, užrašomas vieninteliu būdu? Tarkime priešingai, t.y. vektorių δ galime užrašyti vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tiesiniais dariniais ne vieninteliu būdu. Taigi $\delta = k_1 \ \mathbf{i} + l_1 \ \mathbf{j} + m_1 \ \mathbf{k}$, ir $\delta = k_2 \ \mathbf{i} + l_2 \ \mathbf{j} + m_2 \ \mathbf{k}$. Atėmę lygtis vieną iš kitos gauname (prie vektoriaus δ pridedame vektorių $-\delta$),

$$0 = (k_1 - k_2) \ \mathbf{k} + (l_1 - l_2) \ \mathbf{j} + (m_1 - m_2)k.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $k_1 = k_2, l_1 = l_2, m_1 = m_2$. Priešingu atveju vektoriai $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ būtų komplanarūs, kadangi vieną vektorių galėtume užrašyti kitų tiesiniu dariniu.

Du statmenus plokštumos ortus, prasidedančius bendrame taške, vadinsime plokštumos reperiu. Analogiškai kaip ir erdvės atveju, plokštumos reperio vektorių tiesiniu dariniu galime išreikšti bet kokį plokštu- mos vektorių. Dar daugiau, kiekvienas vektorius išreiškiamas vieninteliu būdu.

Priskirkime geometriniam vektoriui δ_1 jo projekcijas į vektorius $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tokiu būdu: $\delta_1 = (k_1, l_1, m_1)$. Išsiaiškinome, kad nekomplanarių vektorių tiesiniu dariniu galime išreikšti duotą vektorių vieninteliu būdu, todėl teisingas ir atvirkščias veiksmas - bet kokiam realių skaičių rinkiniui (k, l, m) mes galime priskirti vienintelį geometrinį vektorių : $\delta := k_1 \ \mathbf{i} + l_1 \ \mathbf{j} + m_1 \ \mathbf{k}$. Kadangi ryšys tarp erdvės vektorių ir realiųjų skaičių rinkinių abipus vienareikšmis, o realiųjų skaičių rinkinių (l, m, n) aibė yra vektorinė erdvė $\mathcal{R}^3$ tai tikimės, skaitytojas, susipažinęs su ankstesniųjų skyrelių medžiaga pastebėjo, kad vektoriai $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ erdvėje atlieka bazės vektorių vaidmenį. Vadinasi tarp erdvės ir nagrinėtosios vektorinės erdvės $\mathcal{R}^3$ elementų egzistuoja abipus vienareikšmiškas sąryšis (bijekcija). Todėl ateityje mes nebeskirsime vektorių (vektorinės erdvės elementų) nuo geometrinių vektorių, nors vartodami vektoriaus sąvoką, omenyje turėsime geometrinį vektorių.

Visiškai analogiškas ryšys ir tarp vektorinės erdvės R^2 elementų ir plokštumos vektorių.

Todėl natūralu reperį vadinti erdvės (plokštumos) baze, kadangi bet kokį vektorių galime užrašyti (3) tiesinio darinio pagalba, o vektoriaus projekcijos reperio vektorių kryptimi, yra jo koordinatės bazėje. Tikimės, kad skaitytojui tapo aiškus ryšys tarp jau nagrinėtos vektorinių erdvių $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3$ ir tiesės, plokštumos bei erdvės, atitinkamai. Kadangi jau atkreipėme dėmesį, kad tarp kai kurių vektorinių bei geometrinių vektorių erdvių egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis, tai jau minėtą, neapibrėžtą atstumo savoką galime patikslinti, t.y. geometrinių vektorių erdvėje atstumu laikysime atstumą, tarp šiuos vektorius atitinkančių erdvės $\mathcal{R}^n$ elementų. Tad atstumą skaičiuosime remdamiesi (1) formule. Tačiau atstumą galime apibrėžti ir kiek kitu būdu. Šį būdą ir panagrinėkime.

Ateityje vektorių, kurio pradžia taške A, o galas taške B žymėsime simboliu $\overrightarrow{AB}$. Tarkime, kad duota tiesė. Parinkime joje tašką O, kurį pavadinkime pradžios tašku. Tegu X bet koks kitas, fiksuotas, šios tiesės taškas. Susitarkime vektoriaus $\overrightarrow{OX}$ ilgį laikyti lygų vienetui. Tokiu būdu mes parenkame tiesėje mastelį, laikydami atkarpą OX vienetine. Tad natūralu žymėti $\overrightarrow{OX} = \mathbf{i}$. Taškų pora O ir A, pasirinkta tiesėje nurodytu būdu, bus vadinama Dekarto koordinačių sistema tiesėje. Jeigu taškas X yra dešinėje pusėje, taško O atžvilgiu, tai šią koordinačių sistemą vadinsime tiesiogine, priešingu atveju- netiesiogine. Tarkime, kad A, bet koks tiesės OX taškas. Tada skaičių x, kuriam teisinga lygybė: $\overrightarrow{OA} = x\ \mathbf{i}$ vadinsime taško A koordinate duotoje koordinačių sistemoje. Aišku, tada atstumas tarp dviejų taškų, tarkime A ir B, yra lygus vektoriaus, jungiančio šiuos taškus, ilgiui. Jeigu A koordinatė yra x, o B koordinatė yra y, tai tada $\rho(X,Y) = |x-y|$ (žr. 5.1 formulė), kadangi esant apibrėžtai koordinačių sistemai tiesėje, jos taškus galime, abipus vienareikšmiškai, sutapatinti su vektorinės erdvės $\mathcal{R}^1$ elementais.

Tarkime, kad duotos dvi statmenos tiesės plokštumoje. Jų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Kaip ir tiesės atveju šį tašką vadinsime, pradžios tašku. Tarkime, kad taškas O yra ortų $\mathbf{i}$ ir $\mathbf{j}$, esančių skirtingose tiesėse, pradžios taškas. Tarkime, šių vektorių pabaigos taškai X ir $Y-$ atitinkamai. Šias tieses vadinsime tiesėmis OX (arba abscise) ir OY, (arba ordinate) atitinkamai. Tiesių OX ir OY sistemą plokštumoje vadinama ortogonaliąja Dekarto koordinačių sistema. Su statmenomis tiesėmis mes susiejome reperį, kuris statmenoms tiesėms suteikė orientaciją (kryptis). Fiksuokime statų kampą tarp reperio vektorių, tuo pačiu ir tiesių. Sakykime, kad tiesės OX orientacija yra tiesioginė. Tada sakysime, kad plokštumos ortogonalioji Dekarto koordinačių sistema yra tiesioginė, jeigu mažesnis kampas tarp vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ yra teigiamas. Priminsime, kad kampas $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ teigiamas, jeigu vektorių $\mathbf{i}$ reikia sukti vektoriaus $\mathbf{j}$ kryptimi, prieš laikrodžio rodyklę. Kitu atveju ortogonalioji Dekarto koordinačių sistema bus vadinama netiesiogine. Koordinatinės ašys plokštumą dalija į keturias dalis, kurias mes vadinsime ketvirčiais. Pirmuoju ketvirčiu vadinsime visus plokštumos taškus, kurių abscisė ir ordinatė yra teigiamos. Kiti ketvirčiai numeruojami eilės tvarka prieš laikrodžio rodyklę.

Pastebėsime, kad bet kokio taško B padėtį plokštumoje visiškai apibrėžia vektorius $\overrightarrow{OB}$, o pastarasis yra tiesinis vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ darinys, t.y.

$$\overrightarrow{OB} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j}.$$

Plokštumos vektoriaus koordinates x, y vadinsime plokštumos taško B koordinatėmis ir žymėsime $B(x,y)$. Tarkime, kad $B(b_1,b_2)$ ir $C(c_1,c_2)$ yra du plokštumos taškai. Tuomet šiuos du taškus jungiančio vektoriaus $\overrightarrow{BC}$ ilgis yra lygus (žr. 5.1 formulę)

$$\rho(B,C) = \sqrt{(c_1-b_1)^2 + (c_2-b_2)^2},$$

kadangi tap plokštumos taškų ir erdvės $\mathcal{R}^2$ vektorių egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis (bijekcija). Šį skaičių vadinsime atstumu tarp taškų B, C. Beje, pastarąją formulę skaitytojas lengvai galėtų gauti naudodamasis Pitagoro teorema!

Sakykime, kad duotos trys statmenos tiesės erdvėje. Jų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Šį tašką vadinsime, pradžios tašku. Tarkime, kad taškas O yra reperio vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, esančių skirtingose tiesėse, pradžios taškas. Tarkime, šių vektorių pabaigos taškai X, Y, $Z-$ atitinkamai. Šias tieses vadinsime tiesėmis Ox, Oy ir Oz atitinkamai. Tiesių Ox, Oy ir Oz sistemą vadinsime ortogonaliąja Dekarto koordinačių sistema erdvėje.

Pateiksime nelabai vykusį matematiniu požiūriu, bet skaitytojui lengviau suvokiamą dešininės orientacijos sąvoką. Sakysime, kad reperis α, β, γ turi dešininę orientaciją, jeigu vektoriaus γ kryptis yra tokia, kad stovint reperio vektorių bendrame taške, vektoriaus γ kryptimi, vektorius α yra dešinėje, o β kairėje pusėje, t.y. vektorių α ir β sistema yra tiesioginė. Sakysime, kad erdvės Dekarto koordinačių sistema yra tiesioginė, jeigu reperis $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ turi dešininę orientaciją. Reperį susietą su koordinačių sistema vadinsime koordinatiniu reperiu.

Kaip matuosime atstumą erdvėje? Pastebėsime, kad bet kokio taško B padėtį erdvėje, kurioje apibrėžta koordinačių sistema, nusako vektorius $\overrightarrow{OB}$, o pastarasis yra tiesinis vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ darinys, t.y.

$$\overrightarrow{OB} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}.$$

Skaičius x, y, z vadinsime erdvės taško B koordinatėmis ir žymėsime $B(x, y, z)$. Tarkime, kad $B(b_1, b_2, b_2)$ ir $C(c_1, c_2, c_3)$ yra du erdvės taškai. Tuomet šiuos du taškus jungiančio vektoriaus $\overrightarrow{BC}$ ilgis, o tuo pačiu ir atstumas tarp taškų B, C yra lygus (žr. 5.1 formulę),

$$\rho(B, C) = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2}.$$

Jeigu erdvėje (plokštumoje, tiesėje) apibrėžta koordinačių sistema (ateityje naudosime tik ortogonaliąsias Dekarto koordinačių sistemas), tai bet koks geometrinis vektorius abipus vienareikšmiškai susietas su koordinačių rinkiniu, t.y. $\forall \alpha$ ir $\forall \beta$ egzistuoja realių skaičių trejetai tokie, kad

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3),\ \beta = (b_1, b_2, b_3). \tag{4}$$

Nesunku įsitikinti, kad šie realiųjų skaičių trejetai yra vektorių projekcijos vienetinių vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, kryptimis. Vadinasi

$$\alpha = a_1\ \mathbf{i} + a_2\ \mathbf{j} + a_3\ \mathbf{k},\quad \beta = b_1\ \mathbf{i} + b_2\ \mathbf{j} + b_3\ \mathbf{k}.$$

Tarkime, kad $A(a_1, a_2, a_3)$ yra vektoriaus pradžios, o $B(b_1, b_2, b_3)$, $-$ pabaigos, taškai. Tada naudodami vektorių sudėties taisyklę gauname, kad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Bet tada vektorius $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Remdamiesi (1) formule gauname, kad vektoriaus ilgis (atstumas nuo koordinačių pradžios taško iki taško A) yra

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Turime, kad $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Tada

$$\mathbf{i} \cdot\ \mathbf{j} = 0,\quad \mathbf{i} \cdot\ \mathbf{k} = 0,\quad \mathbf{j} \cdot\ \mathbf{k} = 0,$$

ir

$$\mathbf{i} \cdot\ \mathbf{i} = 1,\quad \mathbf{k} \cdot\ \mathbf{k} = 1,\quad \mathbf{j} \cdot\ \mathbf{j} = 1,$$

Daugindami vektorių α skaliariškai su reperio $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektoriais gauname kampus,

$$\cos\psi_1 = \frac{a_1}{|\alpha|},\ \cos\psi_2 = \frac{a_2}{|\alpha|},\ \cos\psi_3 = \frac{a_3}{|\alpha|},$$

kuriuos vektorius α sudaro su koordinatėmis ašimis Ox, Oy, Oz, atitinkamai.

Naudodamiesi geometrinių vektorių skaliarinės sandaugos apibrė žimu ir 5.4 lygybėmis gauname, kad

$$\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \ \cos \psi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\alpha||\beta|},$$

čia ψ yra kampas tarp vektorių α ir β.

Apibrėžimas Vektorių α ir β vektorine sandauga vadinsime vektorių γ, kurio ilgis lygus vektorių α ir β ir kampo tarp jų sinuso sandaugai, be to jis statmenas vektorių α ir β plokštumai ir orentuotas taip, kad vektorių trejetas α, β, γ turi dešininę orientaciją.

$$\gamma = \alpha \times \beta = |\alpha||\beta| \sin \psi \mathbf{l},$$

čia vektorius $\mathbf{l}$ yra ortas, statmenas vektorių α, β plokštumai, o vektorių α, β, sistema turi dešininę orientaciją.

Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad $\alpha \times \beta = -(\beta \times \alpha)$.

Tarkime, kad $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ yra koordinatinis reperis. Tuomet

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \ \ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \ \ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \ \ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \ \ \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0. \tag{5}$$

Tarkime, kad vektoriai α ir β apibrėžti (4) lygybėmis. Siūlome skaitytojui, remiantis (5) lygybėmis įrodyti žemiau pateiktas vektorių savybes

1) $$\alpha \times \beta = -(\beta \times \alpha);$$

2) $$\big(\alpha + \beta\big) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \beta \times \gamma;$$

3) $$\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Nesunku suprasti, kad jei vektoriai kolinerūs, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Prisiminkime, kad jei vektoriai statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Aptarsime, atkarpos dalijimo uždavinį. Atkarpa yra tiesės dalis tarp dviejų taškų A, B. Sakykime, kad minėtoji atkarpa yra erdvėje, be to šioje erdvėje apibrėžta Dekarto koordinačių sistema. Tuomet $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Tarkime, kad taškas $C(x, y, z)$ priklauso atkarpai AB. Dalinkime atkarpą į dvi dalis taip, kad

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Pastebėkime, kad vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinerūs. Kadangi norimas atkarpų dalijimo santykis lygus λ, tai $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Prisiminkime, kad du vektoriai lygūs tada ir tik tada, kai atitinkamos jų koordinatės yra lygios. Vadinasi

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \ \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \ \lambda = \frac{z - z_1}{z_2 - z}.$$

Išsprendę nežinomuosius x, y, z gauname

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{5.6}$$

Iš paskutiniųjų lygčių gauname ieškomo taško koordinates. Pavyzdžiui, jeigu norime atkarpą dalyti pusiau, tai santykis $\lambda = 1$. Iš paskutiniųjų lygčių gauname, kad atkarpos vidurio taško koordinatės yra lygios:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Pabaigai pastebėsime, kad λ yra norimas atkarpų dalinimo santykis. Ją įrašę į (6) sistemą suskaičiuojame ieškomo taško koordinates. Beje, jeigu atkarpa plokštumoje, tereikia (6) sistemoje atmesti kintamąjį z. Jeigu atkarpa yra tiesėje, tai reikia praleisti ir kintamąjį y.

V. TIESĖS LYGTIS PLOKŠTUMOJE. PLOKŠTUMOS IR TIESĖS LYGTYS ERDVĖJE

5.1 Tiesės lygtis plokštumoje

Laikysime, kad plokštumoje apibrėžta Dekarto koordinačių sistema. Tegu $\alpha = (a, b)$. Užrašykime tiesės, kuriai priklausytų taškas $X_0(x_0, y_0)$ ir kuri būtų statmena vektoriui α, lygtį. Sakykime, kad taškas $X(x, y)$ yra bet koks, laisvai pasirinktas, ieškomosios tiesės taškas. Tada vektorius $\overrightarrow{XX_0}$ priklauso tiesei. Vadinasi, pastarasis vektorius ir vektorius α yra statmeni. Kitaip tariant, taškas X priklausys iekomąjai tiesei, jeigu vektorius $(x - x_0, y - y_0)$ bus statmenas vektoriui α. Užrašykime šių vektorių statmenumo sąlygą:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{XX_0} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{1}$$

Tuomet pažymėję $c = -(ax_0 + by_0)$ gauname lygybę

$$ax + by + c = 0. \tag{2}$$

Vektorių $\alpha = (a, b)$ vadinsime tiesės normaliniu vektoriumi.

Paskutinioji lygtis yra vadinama bendrąja tiesės lygtimi, plokštumoje. Panagrinėkime šia tiesės lygtį kiek plačiau. Pastebėkime, kad jei duota koordinačių sistema, tai mes galime vektorių α "valdyti." Pavyzdžiui, pareikalaukime, kad ieškomąjai tiesei priklausytų koordinačių pradžios taškas ir visi kiti tiesės taškai priklausytų arba pirmąjam arba trečiąjam ketvirčiams. Šis reikalavimas ir atlieka vektoriaus α "valdymą", kadangi šiuo atveju tiesė su absice sudaro 45^0 laipsnių kampą, taigi vektorius α, būdamas statmenas ieškomąjai tiesei, su absise turi sudaryti, pavyzdžiui, 135^0 laipsnius (pastebėkime, kad duotai tiesei statmeną vektorių galime parinkti ne vieninteliu būdu !). Nesunku suprasti, kad šiuo atveju tinka vektorius $\alpha = (-a, a)$. Kadangi tiesei priklauso taškas $(0, 0)$, tai naudodami (6.1) lygybę gauname, tokią tiesės lygties formulę: $y = x$.

Jeigu vektorius, statmenas tiesei, yra vienetinis tuomet šio vektoriaus koordinatės yra lygios $\alpha_0 = (\cos\psi, \sin\psi)$. Pareikalavę, kad šis vektorius būtų statmenas tiesei, kuriai priklauso taškas (x_0, y_0), gauname taip vadinamą *normalinę tiesės lygtį*

$$\cos\psi x + \sin\psi y = x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi = p, \tag{3}$$

čia $p-$ yra atstumas nuo tiesės iki koordinačių pradžios taško O. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į išties įdomų ir paprastą rezultatą. Bet apie viską iš eilės. Tarkime, kad taškas $X_0(x_0, y_0)$ nepriklauso tiesei. Žinome, kad vienetinio vektoriaus α_0 ir vektorius $\overrightarrow{OX_0}$ skaliarinė sandauga yra lygi vektoriaus $\overrightarrow{OX_o}$ projekcijai, vektoriaus α_0 kryptimi. (Laikykime, kad tiesė skiria taškus O ir X_0.) Pažymėkime šią projekciją raide l. Nesunku suprasti, kad skaičius $l = p + d$, kur p yra atstumas nuo koordinačių pradžios iki tiesės, o $d-$ atstumas nuo taško X_0 iki tiesės. Taigi, $(x_0, y_0) \cdot (\cos\psi, \sin\psi) = p + d$ arba

$$\cos\psi x_0 + \sin\psi y_0 = p + d \text{ arba } \cos\psi x_0 + \sin\psi y_0 - p = d. \tag{4}$$

Bet paskutinioji lygybė yra formulė, atstumui nuo bet kokio taško iki tiesės skaičiuoti. T.y., jei vietoje nežinomųjų x, y normalinėje tiesės lygties formulėje įrašysime taško koordinates, gausime atstumą d nuo to taško iki tiesės.

Išspręskime šį uždavinį bendrosios tiesės lygties atveju. Sakykime duota tiesės (1) lygtis. Kaip rasti atstumą nuo bet kokio taško iki šios tiesės? Užrašykime šios lygties normalinę lygtį! Kaip tai padaryti jau žinome. Reikia vienetinį vektorių, kolinerų vektoriui (a, b), skaliariškai padauginti su vektoriaus $(x - x_0, y - y_0)$. Bet vektoriui (a, b) kolinerus, vienetinis vektorius yra

$$\alpha_0 = (\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}).$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju mes susiduriame su problema, t.y. vektorius $-\alpha$ taip pat kolinerus vektoriui (a, b). Tad kurį pasirinkti? Pasirinkimą nulems (4) lygybė. Kodėl? Mes turėdami bendrąją tiesės lygtį norime vektorių (a, b) "pritrumpinti " jį iki vienetinio. Taigi, visus lygties koeficientus dalijame iš skaičiaus $\pm|\alpha|$ taip, kad gautume (6.4) lygybės analogą. Bet (4) lygybėse dydis $-p - d$ yra neigiamas, kadangi $p, d > 0$. Todėl mums reikia parinkti tokį ženklą, kad

$$\frac{c}{\pm|\alpha|} < 0.$$

Skaičius

$$M = \frac{1}{\pm|\alpha|}$$

vadinamas normuojančiu daugikliu.

Tarkime, kad žinome du $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ plokštumos taškus. Kaip užrašyti tiesės lygtį, kuriai priklausytų šie du taškai. Visų pirma, ieškomosios tiesės bet kokį tašką pažymėkime $X(x, y)$. Tuomet nesunku suprasti, kad vektoriai $\overrightarrow{AX}$, ir $\overrightarrow{BX}$ yra kolinerūs. Taigi, naudodamiesi kolinerumo sąlyga gauname, kad egzistuoja realus skaičius $k \in \mathcal{R}$ toks, kad

$$(x - x_1, y - y_1) = k(x - x_2, y - y_2).$$

Iš paskutiniosios vektorinės lygybės gauname

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Paskutinioji lygybė reiškia tiesės, kuriai priklauso taškai A ir B, lygtį. Beje, jei kurio nors santykio vardiklyje skirtumas bus lygus nuliui tarkime, kad $y_2 - y_1 = 0$, tai reikš, kad tiesės taškų ordinatės yra pastovios, o tiesės lygtis yra $y = y_1$. Perrašę paskutiniąją lygybę tokiu būdu:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = t, \; \frac{y - y_2}{y - y_1} = t$$

gauname taip vadinamą parametrinę, lygties plokštumoje, formą.

Rasime tiesės lygtį, jei žinoma, kad taškas $A(x_0, y_0)$ priklauso tiesei, be to kampas tarp tiesės bei absisių ašies yra θ.

Tarkime, kad $X(x, y)$ bet koks laisvai pasirinktas tiesės taškas. Tuomet $(x - x_0, y - y_0)$ priklauso tiesei. Antra vertus, bet koks vienetinis tiesės vektorius α_0 yra lygus

$$\alpha_0 = \cos\theta \; \mathbf{i} + \sin\theta \; \mathbf{j}.$$

Tada vienetinis vektorius, statmenas tiesei yra, pavyzdžiui, toks

$$\beta_0 = \cos(90^0 + \theta) \; \mathbf{i} + \sin(90^0 + \theta) \; \mathbf{j} = -\sin\theta \; \mathbf{i} + \cos\theta \; \mathbf{j}.$$

Naudodamiesi (1) formule gauname, kad ieškomoji tiesės lygtis yra tokia:

$$-\sin\theta(x - x_0) + \cos\theta(y - y_0) = 0.$$

Sutvarkę šią lygybę gauname

$$y - y_0 = \tan\theta(x - x_0).$$

Pažymėję $\tan\theta =: k$, paskutiniąją lygybę perrašome taip

$$y - y_0 = k(x - x_0.) \tag{6.5}$$

Skaičius k yra vadinamas tiesės krypties koeficientu. Jeigu duota tiesės bendroji lygtis, tai tada

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Remdamiesi (5) lygtimi gauname, kad $k = -a/b$. Taigi, jei žinoma tiesės bendroji lygtis, tai nesunkiai galime rasti tiesės krypties koeficientą.

5.2 Tiesių tarpusavio padėtis

Šiame skyrelyje nagrinėsime galimas tiesių tarpusavio padėtis. Visų pirma nurodysime sąlygas, kuomet tiesės yra lygiagrečios arba statmenos.

Nesunku suprasti, kad jei tiesės lygiagrečios, tai šių tiesių normaliniai vektoriai yra kolinerūs. Sakykime tiesės apibrėžtos lygtimis

$$ax + by + c = 0,\ a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Naudodamiesi vektorių kolinerumo salyga gauname, kad tiesės lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Taigi, tiesės lygiagrečios, jeigu jų koeficientai yra proporcingi. Analogiškai, tiesės yra statmenos, jeigu statmeni jų normaliniai vektoriai, t.y.

$$aa_1 + bb_1 = 0.$$

Pastaroji lygybė yra tiesių *statmenumo sąlyga.*

Tikimės, kad skaitytojas dar prisimena, kad kampas tarp tiesių nusakomas ne vienareikšmiškai, jeigu tiesės ne statmenos ir ne lygiagrečios. Per daug savęs nevaržydami, kampu tarp tiesių pavadinkime kampą tarp šių tiesių normalinių vektorių, t.y.

$$\psi = \arccos\frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Aišku, kad jei dydis $\psi > 0$, tai tada pasirenkamas mažesnis iš kampų tarp tiesių ir jei $\psi < 0$, tai parenkamas didesnis iš kampų tarp tiesių.

Šio skyrelio pabaigai norėtume pateikti keletą pastabų. Visų pirma, jei norime rasti dviejų tiesių bendrą tašką, turime spręsti lygčių sistemą. Ieškomasis sistemos sprendinys ir bus susikirtimo taškas. Jei sistema sprendinių neturi, tai tiesės lygiagrečios.

Tarkime duotos dvi susikertančios tiesės:

$$ax + by + c = 0,\ a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Raskime šių tiesių pusiaukampinės lygtį. Atkreipsime dėmesį, kad bet koks pusiaukampinės taškas turi savybę: - jis nuo abiejų tiesių nutolęs vienodu atstumu. Šį faktą ir išnaudosime. Tarkime, kad $X(x, y)$ yra bet koks laisvai pasirinktas pusiaukampinės taškas. Tada, kaip jau esame minėję, atstumas nuo šio taško iki abiejų kampo tiesių vienodi, t.y.

$$|aMx + bMy - p| = |a_1M_1x + b_1M_1y - p_1|.$$

Perrašę paskutiniąją lygybę gauname

$$(aM \pm a_1M_1)x + (bM \pm b_1M_1)y - (p \pm p_1) = 0,$$

kur ženklas "-" parenkamas tuo atveju, kai kampui, kurį dalija pusiaukampinė, priklauso koordinačių pradžios taškas, o kitu atveju imamas ženklas "+". Kodėl taip yra, siūlome panagrinėti skaitytojui.

5.3 Plokštumos lygtis

Sakykime, kad $\alpha = (a, b, c)$ vektorius, erdvėje. Tegu $X_0(x_0, y_0, z_0)$ koks nors fiksuotas erdvės taškas. Pareikalaukime, kad ieškomąjai plokštumai priklausytų taškas X_0 ir be to plokštuma būtų statmena vektoriui α. Tuomet bet koks ieškomosios plokštumos vektorius $\overrightarrow{XX_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ turi būti statmenas vektoriui α. Taigi

$$\alpha \cdot \overrightarrow{XX_0} = (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{6}$$

Iš pastarosios lygybės gauname bendrąją plokštumos lygtį

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{7}$$

Vektorių α vadinsime plokštumos normaliniu vektoriumi. Jeigu vektorius, statmenas plokštumai, vienetinis

$$\alpha_0 = (\cos\psi_1, \cos\psi_2, \cos\psi_3),$$

čia ψ_1, ψ_2, ψ_3 yra kampai, kuriuos vektorius sudaro su koordinatinėmis ašimis Ox, Oy, Oz, atitinkamai, tuomet gauname plokštumos lygtį

$$x\cos\psi_1 + y\cos\psi_2 + z\cos\psi_3 = p,$$

kurią vadinsime normaline, čia $p-$ atstumas nuo koordinačių pradžios iki plokštumos.

Analogiškai, kaip ir tiesės plokštumoje atveju, norint iš bendrosios tiesės lygties (žr. (3)) gauti normalinę, mums tereikia vektorių α "sutrumpinti" iki vienetinio. Tai atliekame vektoriaus koordinates dalindami iš dydžio

$$M := \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ženklas parenkamas taip, kad dydis $dM < 0$. Samprotavimai visiškai analogiški kaip ir tiesės plokštumoje atveju. Siūlome skaitytojui pačiam tai panagrinėti.

Rasime formulę atstumui nuo taško iki plokštumos skaičiuoti. Prisiminkime, kad bet kokį vektorių daugindami (skaliariškai) iš vienetinio, gauname pirmojo vektoriaus projekciją vienetinio kryptimi. Tarkime, kad $A_0(x_0, y_0, z_0)$ yra bet koks erdvės taškas. Tada skaliarinė sandauga

$$\overrightarrow{OA} \cdot \alpha_0 = p + d,$$

kur p yra atstumas nuo koordinačių pradžios iki plokštumos, o d yra atstumas nuo taško A_0 iki plokštumos, laikykime, kad plokštuma skiria taškus O ir A. Tai užtikrina, kad skaliarinė sandauga bus teigiama. (O kaip bus, jei taškai O ir A_0 yra toje pat plokštumos pusėje!) Bet paskutinioji sakliarinė sandauga (kairioji jos pusė) yra lygi normalinei plokštumos lygties formai, kai vietoje nežinomųjų įrašytos taško A_0 koordinatės, taigi

$$x_0\cos\psi_1 + y_0\cos\psi_2 + z_0\cos\psi_3 = p + d.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname formulę taško atstumui iki plokštumos rasti. Kitaip tariant, norint rasti atstumą nuo taško iki plokštumos, mums reikia iš bendrosios plokštumos lygties gauti normalinę. Po to, įrašę nagrinėjamo taško koordinates į normalinę plokštumos lygtį, gausi me kokį nors skaičių. Šio skaičiaus absoliutinė reikšmė ir bus atstumas nuo taško iki plokštumos.

Kampu tarp dviejų plokštumų laikysime kampą tarp šių plokštumų normalinių vektorių.

Taigi, kampo tarp dviejų plokštumų

$$ax + by + cz + d = 0,\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

kosinusas yra lygus

$$\cos\psi = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

Iš pastarosios lygybės gauname, kad *plokštumos statmenos*, jeigu $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$. Aišku, kad plokštumos lygiagrečios, jeigu jų normaliniai vektoriai yra kolinerūs, todėl plokštumų lygiagretumo salygą galime užrašyti taip:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Nesunku suprasti, kad plokštuma lygiagreti kuriai nors koordinatinei plokštumai, tarkime Oxy tada ir tik tada, kai jos lygtyje koeficientai prie kintamųjų x, y yra lygūs nuliui. Visai analogiškai, plokštuma lygiagreti koordinatinei ašiai, tarkime Oy, jeigu koeficientas, plokštumos lygtyje prie nežinomojo y yra lygus nuliui.

Rasime trijų plokštumų bendrą tašką, jeigu jis egzistuoja. Norint atsakyti į šį klausimą, mes turime išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Žinome, kad ši sistema gali būti nesuderinta arba suderinta. Paskutiniuoju atveju, sistema gali turėti vieną arba begalo daug sprendinių. Beje, tuo atveju kai sistema nesuderinta, taipogi galima kai ką pasakyti apie plokštumų tarpusavio padėtį. Aptarkime šias galimybes.

1. Jeigu sistema suderinta, ir apibrėžta, tai lygčių sistemos determinantas D yra nelygus nuliui. Tad naudodamiesi, pavyzdžiui, Kramerio formulėmis gauname šios sistemos sprendinį:

$$x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D},\ z = \frac{D_3}{D}, \tag{8}$$

kur $D_i,\ i = 1, 2, 3$ yra sistemos determinantai, kuriuose $i-$ asis stulpelis pakeistas laisvųjų narių stulpeliu.

2. Jeigu $D = 0$, ir bent vienas iš $D_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3$, tai tada galime tokie atvejai

1) D neturi dviejų proporcingų eilučių, t.y. sistemoje nėra dviejų lygiagrečių plokštumų, šiuo atveju trys plokštumos kas dvi kertasi lygiagrečiomis tiesėmis;

2) D turi dvi proporcingas eilutes, taigi šiuo atveju dvi plokštumos lygiagrečios, o trečioji nėra lygiagreti joms.

3. $D = 0$ ir visi skaitikliai lygūs nuliui. Šiuo atveju susikirtimo taškai neapibrėžti, vadinasi plokštumos turi ne vieną susikirtimo tašką, jos susikerta vienoje tiesėje arba plokštumoje. Skirsime šiuos atvejus:

1) D neturi proporcingų eilučių. Plokštumos nėra lygiagrečios, bet visos susikerta tiesėje;

2) D dvi eilutės proporcingos, ir atitinkamos dvi plokštumos sutampa, bet trečioji joms nelygiagreti;

3) D visos eilutės proporcingos, bet visos plokštumos skirtingos. Tuomet jos visos yra lygiagrečios;

4) D visos eilutės proporcingos bet dvi plokštumos sutampa, o trečioji skirtinga;

5) D visos eilutės proporcingos, tada visos plokštumos sutampa.

Taigi, aptarėme galimas trijų plokštumų tarpusavio padėtis.

5.4 Tiesė erdvėje

Praeitame skyrelyje mes pastebėjome, kad dviejų plokštumų susikirtimo rezultatas yra tiesė, būtent:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Šią sistemą vadinsime *bendrąja tiesės lygties forma* erdvėje.

Antra vertus, tiesę erdvėje galime apibrėžti jau mums pažįstamu, vektoriniu būdu. Tarkime, kad $\overrightarrow{s} = (l, m, n)$ yra vektorius, o taškas (x_0, y_0, z_0) priklauso ieškomajai tiesei, kuri lygiagreti fiksuotam vektoriui $\overrightarrow{s}$. Tarkime, kad taškas (x, y, z) yra, bet koks, laisvai pasirinktas, šios tiesės taškas. Tuomet vektoriai $\overrightarrow{s}$ ir $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ yra kolinerūs. Taigi, teisingi tokie sąryšiai:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Pastaroji lygtis vadinama tiesės *kanonine lygtimi*. Vektorių $\overrightarrow{s}$ vadinsime, tiesės erdvėje, *lydinčiu vektoriumi*. Matome, kad užrašyti tiesės kanoninę lygtį mums pakanka žinoti tašką, kuris priklauso tiesei ir vektorių, kuriam lygiagreti ieškomoji tiesė. Pasinaudosime šia pastaba, užrašydami tiesės, per du taškus, lygtį erdvėje.

Tarkime, kad duoti du taškai (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2). Pareikalaukime, kad šie taškai priklausytų ieškomajai tiesei. Pažymėkime

$$\overrightarrow{s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Tegu (x, y, z), bet koks laisvai pasirinktas tiesės taškas. Tada naudodamiesi tiesės kanonine forma gauname, kad

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Tai tiesės, per du taškus erdvėje, lygtis.

Iš kanoninės tiesės lygties gauname taip vadinamą parametrinę tiesės lygties formą:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Aptarsime metodą, kaip iš bendrosios tiesės lygties formos gauti kanoninę.

Tarkime, kad duota bendroji tiesės lygtis

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Norint užrašyti kanoninę tiesės lygties formą mes galima elgtis dvejopai: pirma, rasti du taškus, kurie priklauso plokštumų susikirtimo tiesei ir užrašyti tiesės, kuriai priklauso šie du taškai, lygtį (tai jau žinome kaip atlikti). Norint rasti plokštumų susikirtimo tiesei priklausantį tašką, pakanka vienam iš nežinomųjų parinkti konkrečią reikšmę ir ja pakeisti parinktą nežinomąjį (9) lygčių sistemoje. Gausime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, kurią išsprendę gausime kitų nežinomųjų skaitines reikšmes. Gautosios reikšmės, kartu su parinktąja nežinomojo reikšme priklausys plokštumų susikirtimo tiesei. (Įsitikinkite tuo!)

Antrasis būdas, kaip rasti tiesės kanoninę lygties formą yra toks: raskime vieną tašką priklausantį plokštumų susikirtimo tiesei, o reikiamas vektorius $\overrightarrow{s}$ gali būti gautas vektoriškai sudauginus plokštumų normalinius vektorius $\alpha_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\alpha_2 = (a_2, b_2, c_2)$, (kodėl?) t.y.

$$\overrightarrow{s} = \alpha_1 \times \alpha_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Aptarsime tiesių tarpusavio padėtį erdvėje. Dvi tiesės erdvėje gali būti lygiagrečios, prasilenkiančios arba gali kirstis. Viena svarbiausių tiesių tarpusavio padėties charakteristikų yra kampas tarp jų. Kampu tarp tiesių vadinsime kampą tarp šias tiesias lydinčių vektorių.

Jeigu $\overrightarrow{s_1} = (l_1, m_1, n_1)$, o $\overrightarrow{s_2} = (l_2, m_2, n_2)$ tai tada kampas tarp tiesių randamas sprendžiant lygtį:

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}.$$

Tad dvi tiesės statmenos, jeigu

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Tiesės lygiagrečios, jeigu jas lydintys vektoriai yra lygiagretūs. Tada lygiagretumo sąlygą galime užrašyti taip:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Aišku, kad erdvėje statmenos tiesės nebūtinai susikerta. O kokia gi sąlygos turi būti išpildytos, kad tiesės kirstųsi arba būtų prasilenkiančios?

Pastebėsime, kad jeigu tiesės yra prasilenkiančios, tai tada jas lydintys vektoriai nebus vienoje plokštumoje. O tai reiškia, kad

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

beto (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2) yra skirtingų tiesių taškai.

Tuo atveju, kai $\Delta = 0$, tai tiesės priklausys vienai plokštumai t.y., jos arba kirsis arba bus lygiagrečios.

Tarkime, kad plokštumai priklauso dvi tiesės, kurių lydintys vektoriai yra $\overrightarrow{s_1}$ ir $\overrightarrow{s_2}$. Tada plokštumą lydintis vektorius yra lygus $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$. Norint rasti tiesių, erdvėje, susikirtimo tašką pakanka išspręsti lygčių sistemą, kurią sudarytų dydžiai, priklausantys abiems tiesėms, pavyzdžiui

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1}, \\ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \\ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}. \end{cases}$$

Jeigu norime rasti tiesės ir plokštumos bendrą tašką, mums teks išspręsti sistemą

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + nt, \\ ax + by + cz + d = 0. \end{cases}$$

Jeigu tiesės yra lygiagrečios, tai plokštumos, kurioje yra šios tiesės, normalinį vektorių $\overrightarrow{n}$ galime rasti tokiu būdu:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{M_1 M_2},$$

čia $\overrightarrow{s_1}$ yra vienos iš tiesių lydintis vektorius, o taškai M_1 ir M_2 priklauso skirtingoms tiesėms.

Norint rasti tiesės erdvėje kokį nors tašką, pakanka parametrinėje lygties formoje parinkti konkrečią t reikšmę ir suskaičiuoti šią reikšmę atitinkančias x, y, z reikšmes. Tai ir bus taško, priklausančio tiesei, koordinatės.

Kaip skaičiuoti kampą tarp tiesės ir plokštumos? Tarkime, kad plokštumos normalinis vektorius yra $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, o tiesę lydintis vektorius yra (l, m, n). Visų pirma pastebėsime, kad jeigu tiesė yra statmena plokštumai, tai plokštumos normalinis vektorius ir tiesę lydintis vektoriai yra lygiagretūs. Tad tiesės ir plokštumos statmenumo sąlygą galime užrašyti taip:

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Aišku, kad jei tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios, tai plokštumos normalinis ir tiesę lydintis vektoriai yra statmeni, vadinasi tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlyga yra tokia:

$$la + mb + nc = 0.$$

Aptarkime kaip apskaičiuoti kampą tarp tiesės ir plokštumos. Visų pirma, kampas tarp tiesės ir plokštumos, tai kampas tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje. Tačiau pagrindinis plokštumą charakterizuojantis dydis yra jos normalinis vektorius. Aišku, kad plokštumos normalinis vektorius ir tiesės projekcija plokštumoje yra statmeni. Vadinasi, jeigu kampas tarp tiesės ir plokštumos normalinio vektoriaus yra lygus $90^0 - \psi$, tai tada kampas tarp tiesės ir plokštumos lygus ψ. Tada kampas tarp tiesės ir plokštumos bus skaičiuojamas tokiu būdu:

$$\cos\{90^0 - \psi\} = \sin\psi = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

5.5 Tiesinės nelygybės

Apibrėžimas *Tiesine nelygybe (toliau trumpinsime t.l.) su n nežinomųjų vadinsime nelygybę:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,$$

čia $a_j, b \in \mathcal{Q}$, a_j, ***j*** *vadinami nelygybės koeficientais, $b-$ lygties laisvuoju nariu, x_j* ***j***– *lygties nežinomaisiais.*

Reiškinys $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 7$ yra tiesinė nelygybė su keturiais nežinomaisiais.

Apibrėžimas *R*acionaliųjų skaičių rinkinį $(l_1, \ldots, l_n)$ vadinsime t. nelygybės sprendiniu, jeigu šis rinkinys tenkina nelygybę:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j l_j \equiv b.$$

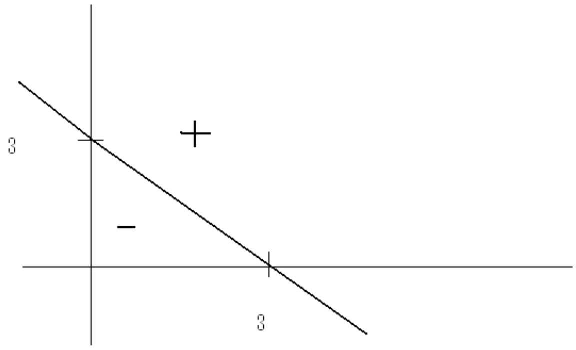
Kitaip tariant, minėtasis rinkinys vadinamas sprendiniu, jeigu nelygybėje nežinomųjų vietoje įrašę šį rinkinį gauname teisingą skaitinę nelygybę.

Pavyzdžiui skaičių rinkinys $(1, 0, 2)$ yra lygties $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 12$ sprendinys, kadangi $12 \leq 12$.

Ateityje nagrinėsime tik dviejų kintamųjų tiesines lygtis bei nelygybes. Skaitytojui priminsime, kad dviejų kintamųjų tiesinė lygtis yra tiesės lygtis plokštumoje $ax + by + c = 0$. Ši tiesė plokštumą dalija į tris dalis ir kiekvienos dalies taškai, tiesės atžvilgiu, tenkina tą pačią savybę, t.y. vienos plokštumos dalies taškus įrašę į tiesės lygtį gausime neigiamas skaitines reikšmes, kitos plokštumos dalies taškus įrašę į tiesės lygtį gautume teigiamas reikšmes, o trečios dalies taškai priklauso tiesei ir juos įrašę gautume skaitinę reikšmę lygią nuliui. Iliustruokime pavyzdžiu. Tarkime, kad duota tiesinė lygtis

$$x + y - 3 = 0$$

žr. paveikslėlis apačioje. $+$ ženklas žymi plokštumos dalį, kurios taškus įrašę į tiesės lygtį gausime teigiamas skaitines reikšmes- $-$ neigiamas skaitines reikšmes.



Nesunku suprasti, kad jei reikia nurodyti dviejų nežinomųjų tiesinės nelygybės sprendinių aibę, tai pakanka nurodyti pusplokštumę, kurios taškai tenkina nurodytą nelygybę. Pavyzdžiui nelygybės

$$x + y - 3 \leq 0$$

sprendinių aibę sudaro pusplokštumės dalis, kurios taškuose įgyjama neigiama reikšmė.

Apibrėžimas Funkciją $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0, \quad a_i \in \mathcal{R}, i = 0, \dots, n,$ vadinsime tiesine $n-$ kintamųjų funkcija.

Pavyzdžiui, funkciją $f(x, y) = ax+by+c, \quad a, b, c$ yra realūs skaičiai, vadinsime tiesine dviejų kintamųjų funkcija, o $f(x, y, z) = ax + by + cz + d, \quad a, b, c, d$ yra realūs skaičiai, vadinsime tiesine trijų kintamųjų funkcija.

Tarkime, kad duota tiesinė funkcija $f(x, y) = ax + by + c$. Tada lygtį $f(x, y) = d$, $d-$ realus skaičius vadinsime tiesinės funkcijos $l$ygio linija. Pastebėsime, kad tiesinės funkcijos lygio linija yra tiesė. Taigi, su kiekviena tiesine funkcija galime susieti begalo daug lygio linijų. Kiekvienos lygio linijos taškuose tiesinė funkcija įgyja pastovias reikšmes. Jeigu su tiesine funkcija susiejame lygio liniją

$$f(x, y) = 0,$$

tai šios lygio linijos taškuose tiesinės funkcijos reikšmės lygios nuliui. Vadinasi ši lygio linija dalija plokštumą į dvi dalis taip, kad vienoje plokštumos dalyje tiesinės funkcijos reikšmės yra teigiamos, o kitoje neigiamos. Dar daugiau, tiesinės funkcijos reikšmės yra pastovios tiesėse, lygiagrečiose tiesei $ax + by = 0$ ir tolstant nuo minėtos lygio linijos $+$ pusplokštumėje funkcijos reikšmės didėja, o $-$ pusplokštumėje- mažėja. Tai kas buvo pasakyta reikia turėti omenyje, kai ieškome tiesinės funkcijos didžiausios arba mažiausios reikšmės kokioje nors plokštumos dalyje.

Apibrėžimas *Tiesinių nelygybių aibę:*

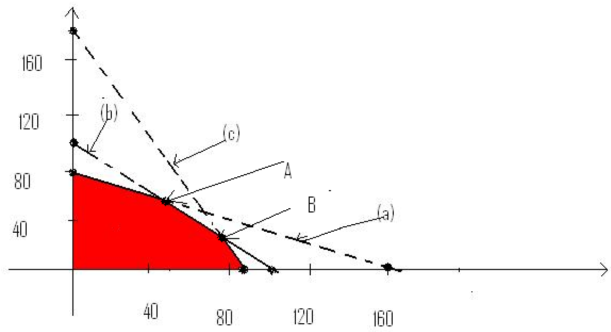
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

vadinsime m tiesinių nelygybių, su n nežinomaisiais, sistema.

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad duota tiesinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \ (a), \\ x + 2y \leq 160 \ (b), \\ 2x + y \leq 180 \ (c), \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Tada šios nelygybių sistemos sprendinių aibė geometriškai pavaizduota pav. apačioje.



Pastebėsime tai, kad kai ieškome dviejų kintamųjų funkcijos didžiausios ir mažiausios reikšmių kokioje nors iškiloje srityje (sritis iškila, jei bet kokios šios srities taškus galima sujungti tiese priklausančia šiai sričiai), tai pakanka nustatyti šios srities visus kampinius taškus, kurie yra tiesių susikirtimo taškai ir radame tiesinės funkcijos visas reikšmes šiuose taškuose. Iš šių taškų išrinkę didžiausią ir mažiausią reikšmes tuo pačiu nustatome ir ekstremalias funkcijų reikšmes.

Aptarkime algoritmą, kaip rasti dviejų kintamųjų tiesinės funkcijos maksimalią (minimalią) reikšmes nurodytoje plokštumos dalyje, kuri yra nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Tarkime duota tiesinė funkcija $f(x,y) = ax+by+c$. Raskime šios tiesinės funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmes nelygybių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \sim b_1, \\ a_{21}x + a_2y \sim b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x + a_{m2}y \sim b_m, \end{cases} \qquad a_{i1},\ a_{i2},\ \ b_i \in \mathcal{R},$$

o simbolis $\sim$ reiškia vieną iš simbolių $\leq, \geq, =, <, >$.

Algoritmas

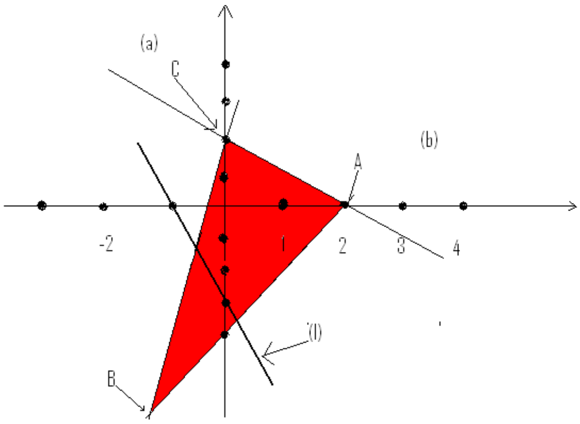
1. Tiesinių nelygybių sistemoje esančias nelygybes keičiame lygybėmis ir gauname tiesių lygtis.
2. Šias tiesių lygtis braižome plokštumoje ir tuo pačiu nurodome tiesinių nelygybių sprendinių sritis.
3. Plokštumoje pažymime šią sritį.
4. Surandame visų tiesių susikirtimo taškus.
5. Randame tiesinės funkcijos reikšmes visuose susikirtimo taškuose.
6. Iš reikšmių, suskaičiuotų 5. dalyje išrenkame didžiausią ir mažiausią. Šios reikšmės ir bus ieškomosios.

Pastaba Paprastai sprendžiant šį uždavinį visų susikirtimo taškų rasti nereikia, kadangi šis darbas gana varginantis. Paprastai pakanka rasti ne daugiau negu dviejų tiesių susikirtimo taškus, kurie ieškomi priklausomai nuo to, kaip plokštumoje yra išsidėstęs lygio linijos $f(x,y) = 0$ grafikas. Nubrėžus šį grafiką tampa aišku kuria kryptimi tiesinė funkcija didėja, o kuria mažėja.

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad duota tiesinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \ (a), \\ 2x - y \leq 4 \ (b), \\ -3x + y \leq 1 \ (c). \end{cases}$$

Raskime funkcijos $f(x,y) = 3x + 2y + 6$ didžiausią ir mažiausią reikšmes nelygybių sistemos sprendinių aibėje. Randame nelygybių sistemos sprendinių aibę reprezentuojančią plokštumos sritį ir nubrėžiame lygio liniją $3x + 2y + 6 = 0$ pav. žemiau. $+$ ženklu pažymime plokštumos dalį, kurioje nagrinėjama tiesinė funkcija teigiama (yra didėjanti, tolstant nuo lygio linijos), o kitoje - mažėjanti.



Nesunku suprasti, kad nagrinėjama funkcija maksimalią reikšmę įgyja taške A, o minimalią- taške B. Taško A koordinatės akivaizdžios, t.y. $(2, 0)$, o taško B gaunamos sprendžiant sistemą:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 2, \\ 2x - y = 4 \end{cases}.$$

Išsprendę gauname, kad $B(-5, -14)$.

Vadinasi

$$\max_D f(x, y) = f(A) = f(2, 0) = 18, \quad \min_D f(x, y) = f(B) = f(-5, -14) = -26.$$

Teoriniai klausimai

1. Dekarto koordinačių sistema Euklidinėse erdvėse $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^2$, $\mathcal{R}^3$.
2. Skaliarinės sandaugos savybės. Vektorinė sandauga ir jos savybės.
3. Skaliarinės ir vektorinės sandaugos taikymai. Mišri sandauga.
4. Tiesė plokštumoje. Tiesės lygties įvairios formos. Tiesių tarpusavio padėtis.
5. Plokštumos lygtis. Plokštumos lygties įvairios formos.
6. Plokštumų tarpusavio padėtis.
7. Tiesė erdvėje. Tiesės lygties įvairios formos.
8. Tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis.

Uždaviniai savarankiškam darbui

2. Duoti vektoriai $\alpha = -\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ ir $\beta = -\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ ir $\gamma = 4\,\mathbf{i} - \,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$. Raskite vektoriaus $\delta = \alpha - \beta - 3\gamma$ ilgį, jo vienetinį vektorių, bei kampus, kuriuos vektorius sudaro su koordinatinėmis ašimis.

Ats: $|\delta| = \sqrt{269}$;

$$\delta_0 = \left(\frac{13}{\sqrt{269}}, \frac{6}{\sqrt{269}}, \frac{8}{\sqrt{269}}\right), \; \cos\phi_1 = -\frac{13}{\sqrt{269}}; \; \cos\phi_2 = \frac{6}{\sqrt{269}}, \; \cos\phi_3 = -\frac{8}{\sqrt{269}}.$$

3. Atkarpą AB, taškai $P(2, 5, -3)$, $Q(-3, 3, 1)$ dalija į tris lygias dalis. Raskite taškų A ir B koordinates.

Ats: $A(7, 7, 7)$, $B(-8, 1, 5)$.

4. Taškai $A(3,-3)$, $D(2,0)$ yra dvi gretimos kvadrato $ABCD$ viršūnės. Raskite likusių viršūnių koordinates.

Ats: $B(6,-2)$, $C(5,1)$ arba $B'(0,-4)$, $C'(-1,-1)$.

5. Tarkime, kad duoti du vektoriai: $\alpha = (2,-4,3)$ ir $\beta = (3,1,-1)$, $\gamma = (0,-1,3)$. Raskite šių vektoriaus $\alpha - \gamma$ projekciją vektoriaus β kryptimi.

Ats: $\frac{3}{\sqrt{11}}$.

6. Kokia turi būti parametro m reikšmė, kad kampas tarp vektorių $\alpha = (-2,m,0)$ ir $\beta = (-2,0,2)$ būtų lygus 60^0.

Ats: $m = \pm 2$.

7. Vektoriai

$$\alpha = (1,-3,4),\ \beta = (0,2,-4$$

yra lygiagretainio kraštinės. Raskite kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

Ats: $\phi = \arccos(1/\sqrt{5})$.

8. Tarkime, kad vektoriai

$$\alpha = (2,2,-4),\ \beta(6,-1,-1),\ \gamma = (1,1,1)$$

yra trikampės piramidės briaunos. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį.
Ats: $V = 7$.

9. Ar duotieji taškai yra vienoje plokštumoje?

$$(2,3,9),\ (-8,3,-1),\ (2,2,6),\ (-5,1,-2).$$

Ats: Taip

10. Tarp vektorių α ir β yra 45^0 kampas. Be to žinoma, kad $|\alpha| = 2$, o $|\beta| = 5$. Apskaičiuokite vektoriaus

$$(2\alpha - \beta) \times (\alpha - 2\beta)$$

ilgį.
Ats: $|(2\alpha - \beta) \times (\alpha - 2\beta)| = 8$.

Vektorius δ yra statmenas vektoriams $\alpha = (4,-2,-3)$ ir $\beta = (0,1,3)$. Vektorius δ su ašimi Oy sudaro buką kampą. Rasti vektoriaus δ koordinates, jei $|\delta| = 26$.
Ats: $\delta = (-6,-24,8)$.

1. Kokia turi būti parametro a reikšmė, kad tiesės

$$2x - 3y + 1 = 0,\ x + ay - 8 = 0$$

būtų: a) lygiagrečios; b) statmenos; c) sudarytų $\phi = \mathrm{arctg}(-3/2)$ kampą.
Ats: a) $a = -3/2$; b) $a = 2/3$; c) $a = 12/5$ arba $a = 0$.

2. Yra žinoma, kad tiesei priklauso taškas $(0,5;5)$ ir be to ieškomoji tiesė su tiese $3x+2y-1 = 0$ sudaro kampą, kuris lygus 135^0. Sudarykite šios tiesės lygtį.
Ats: $10x - 2y + 5 = 0$, $2x + 10y - 51 = 0$.

3. Duota tiesė $x+2y-4 = 0$ ir taškas $(-1,-5)$. Raskite šio taško projekciją duotoje tiesėje, bei šiam taškui simetriško, šios tiesės atžvilgiu, taško koordinates.
Ats: $(2;1), (5;7)$.

4. Jei tiesės $4x - 3y = -5$ ir $2x - 1,5y = -3$ yra lygiagrečios, tai raskite atstumą tarp jų.
Ats: $1/5$.

5. Sakykime, kad trikampio viršūnių koordinatės yra tokios:

$$A(-3,1),\ B(5,3),\ C(0,7).$$

Sudarykite a) kraštinės AB, b) pusiaukraštinės AB, c) aukštinės AG, d) vidurio linijos, lygiagrečios kraštinei AB, e) tiesės einančios per viršūnę B ir lygiagrečios kraštinei BC, lygtis.

Ats: a) $x - 4y + 7 = 0$; b) $8x - 11y + 35 = 0$; c) $5x - 4y + 19 = 0$; d) $2x - 8y + 35 = 0$; e) $4x + 5y + 7 = 0$;

6. Tarkime, kad duotos trikampio kraštinių lygtys:

$$x + 6y + 2 = 0(AB),\ 3x + 2y - 10 = 0(BC),\ 5x - 2y + 10 = 0(CA).$$

Raskite: a) pusiaukraštinės BE ilgį; b) aukštinės BH ilgį; c) kampo ABC dydį; d) trikampio plotą; f) trikampio perimetrą; e) apibrėžtinio apskritimo centrą bei spindulį.

Ats: a) $\sqrt{149}/2$; b) $32/\sqrt{29}$; c) $\phi = \arccos(15/\sqrt{481}$;
d) $(\sqrt{13} + 3\sqrt{37})x + (6\sqrt{13} + 2\sqrt{37})y + (2\sqrt{13} - 10\sqrt{37}) = 0$;
e) $16m^2$; f) $P = \sqrt{37} + 2\sqrt{13} + \sqrt{29}$; g) $O(\frac{43}{32}; \frac{25}{16})$, $r = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

7. Sudarykite plokštumų, kurios tenkina sąlygas: a) plokštumai priklauso taškas $(1; -2; 0)$, o ji statmena vektoriui $\alpha = (4; 0; -2)$; b) plokštumai priklauso taškai

$$(3; 2; 0),\ (-3; 1; 1),\ (-1, -1, 4);$$

c) plokštumai priklauso taškas $(2; -4; 3)$, o ji lygiagreti plokštumai

$$2x + y - z + 5 = 0;$$

d) plokštumai priklauso taškas $(5; 1; -1)$, o ji statmena susikertančioms plokštumoms

$$x + 3y + 5z - 5 = 0,\ x - y + z + 6 = 0,$$

lygtis.

Ats: a) $2x - z - 2 = 0$; b) $x - 20y - 14z + 37 = 0$; c) $2x + y - z + 3 = 0$; d) $2x + y - z - 12 = 0$.

8. Jei plokštumos

$$3x + 2y + 6z - 1 = 0,\ 6x + 4y + 12z + 5 = 0$$

yra lygiagrečios, tai raskite atstumą tarp jų

Ats: $d = 0,5$.

9. Kokios turi būti parametrų m ir n reikšmės, kad plokštumos

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 6, \\ 4x + y + 3z = n, \\ x + y - mz = 1, \end{cases}$$

a) turėtų vieną bendrą tašką; b) eitų per vieną tiesę; c) poromis kirsdamosi sudarytų tris lygiagrečias tieses.

Ats: a) $m \neq -5/3$; b) $m = -5/3$; $n = 9$ c) $m = -5/3$; $n \neq 9$.

10. Sudarykite tiesių erdvėje a) kuriai priklauso taškas $(2, -2, 3)$ ir kuri lygiagreti vektoriui $\alpha = (4, -6, 3)$; b) per du taškus $(-3, 1, -4)$ ir $(5, -1, 1)$, lygtis.

Ats:

$$a)\ \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-3}{3},\quad b)\ \frac{x+3}{8} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{5}.$$

11. Raskite tiesės

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0, \\ x + y - 5z + 2 = 0, \end{cases}$$

parametrines bei kanonines lygtis.

Ats:

$$\frac{x+1}{14}=\frac{y+1}{11}=\frac{z}{5},$$

$$\begin{cases} x=14t-1; \\ y=11t-1; \\ \quad z=5t. \end{cases}$$

12. Jeigu tiesės yra prasilenkiančios, tai raskite atstumą bei kampą tarp tiesių:

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0, \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x=-2t-3, \\ y=-4, \\ z=3t+2. \end{cases}$$

Ats: $\phi=\arccos(\sqrt{13}/15)$; $d=99/\sqrt{689}$.

13. Raskite plokštumos $x-3y-z+5=0$ ir tiesės

$$\begin{cases} x-y+6z-7=0, \\ x+2y-3z+1=0, \end{cases}$$

bendrą tašką ir kampą tarp jų.

Ats: $(1/3;4/3;4/3)$, $\quad \phi=\arcsin(13/\sqrt{209})$.

14. Sudarykite plokštumos, a) kuriai priklauso taškas $(1,4,-3)$ ir tiesė

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{1}$$

b) kuriai priklauso taškas $(1,4,-3)$ ir lygiagreti tiesėms

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{3},$$

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=3t-1, \\ z=-2t-3, \end{cases}$$

lygtis.

Ats: a) $5x+11y+7z-28=0$; $\quad$ b) $7x-8y-5z-19=0$.

15. Sudarykite plokštumos, kuriai priklauso dvi lygiagrečios tiesės

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-4}{-8} \text{ ir } \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}.$$

lygtį.

Ats: $x-10y-7z-4=0$.

16.

1) Raskite funkcijos $f(x,y)=10x+12y$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} x+y\le 60, \\ x-2y\ge 0, \\ x,y\ge 0. \end{cases}$$

2) Raskite funkcijos $f(x,y) = 4x - 6y$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} y \leq 7, \\ 3x - y \leq 3, \\ x + y \geq 5, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

3) Raskite funkcijos $f(x,y) = 7x + 3y$ minimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} 3x - y \geq -2, \\ x + y \leq 9, \\ x - y = -1, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

4) Raskite funkcijos $f(x,y) = 2x + y$ minimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3, \\ 4x + 3y \geq 6, \\ x + 2y \geq 2, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

5) Raskite funkcijos $f(x,y) = 10x + 2y$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4, \\ x - 2y \geq 0, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Ats: 1) $f_{\max}(40,20) = 640$; 2) $f_{\min}(2,3) = -10$; 3) $f_{\max}(0,1) = 3$; 4) $f_{\min}(0.6, 1.2) = 2.4$; 5) $f_{\max} = \infty$ (neegzistuoja nes funkcija šioje srityje neapibrėžta).

17. Statybinius įrankius gaminantis verslininkas gamina dviejų rūšių įrankius A ir B. Kiekvienam įrankiui pagaminti yra naudojamos dvi staklės $S1$ ir $S2$ bei baigiamuosius žingsnius atliekantys darbuotojai D. Žemiau pateiktoje lentelėje pateikiamos darbo laiko sąnaudos reikalingos įrankiams pagaminti:

	$S1$	$S2$	D
A	2	1	1
B	1	1	1

18.Žinoma, kad per savaitę pirmosios staklės gali dirbti ne daugiau negu 70h, antrosios staklės ne daugiau negu 40h ir baigiamuosius darbus atliekantys darbininkai ne daugiau negu 90h. Pardavus pirmąjį įrankį A gaunamas 40Lt pelnas, o antrąjį 60Lt pelnas. Nustatykite, kiek ir kokių įrankių reikėtų pagaminti per savaitę, kad pelnas būtų didžiausias. Koks šiuo atveju bus pelnas?

Ats: $15A$, $25B$. Pelnas $2100Lt$.

19. Gamykla iš dviejų rūdos rūšių $R1$, $R2$ išskiria dvi metalų rūšis: metalą A ir B atitinkamai. Lentelėje yra pateikiami kiek kg. metalo yra išskiriama iš vienos tonos rūdos bei apačioje nurodyti kaštai (K):

	$R1$	$R2$
A	100	200
B	200	50
K	50	60

.

Gamykla privalo pagaminti ne mažiau negu 3 tonas metalo A ir 2.5 tonos metalo B. Nustatykite kiek ir kokio metalo turi būti pagaminta, kad kaštai būtų minimalūs. Raskite šiuos minimalius kaštus.

Ats: $10tA$, $10tB$. Pelnas $1100Lt$.

Užduotys namų darbams

1. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške M. Naudodami vektorių veiksmus užrašykite vektorių $\overrightarrow{MD}$ vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$.

2. Duoti vektoriai $\alpha = 2\ \mathbf{i} - 3\ \mathbf{j}$ ir $\beta = \ \mathbf{i} + 4\ \mathbf{j} - 3\ \mathbf{k}$. Raskite vektoriaus $\delta = 2\beta - \alpha$ ilgį, jo vienetinį vektorių, bei kampus, kuriuos vektorius sudaro su koordinatinėmis ašimis.

3. Raskite du taškus, kurie atkarpą AB, $A(1, -3, 4)$, $B(4, 3, 2)$ dalija į tris lygias dalis.

4. Taškai $A(-1, -3)$, $D(-2, 0)$ yra dvi gretimos kvadrato $ABCD$ viršūnės. Raskite likusių viršūnių koordinates.

5. Tarkime, kad duoti du vektoriai: $\alpha = (4, 1, -2)$ ir $\beta = (0, -3, 1)$. Raskite šių vektorių skaliarinę bei vektorinę sandaugas, kampą tarp vektorių, bei vektoriaus α projekciją vektoriaus β kryptimi.

6. Kokia turi būti parametro m reikšmė, kad kampas tarp vektorių $\alpha = (-2, m, 0)$ ir $\beta = (-2, 0, 2)$ būtų lygus 60^0.

7. Taškai

$$A(1, -1, 2),\ B(4, -6, 1),\ C(2, 1, 0)$$

yra lygiagretainio viršūnės. Raskite lygiagretainio aukštines, bei kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

8. Tarkime, kad vektoriai

$$\alpha = (-2, -3, 5),\ \beta(7, -3, 1),\ \gamma = (2, -3, 5)$$

yra trikampės piramidės briaunos. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį.

9. Ar duotieji taškai yra vienoje plokštumoje?

$$(2, 3, 9),\ (-8, 3, -1),\ (1, 0, 2),\ (-5, 1, -2).$$

10. Tarp vektorių α ir β yra 45^0 kampas. Be to žinoma, kad $|\alpha| = 2$, o $|\beta| = 5$. Apskaičiuokite vektoriaus

$$(2\alpha - \beta) \times (\alpha - 2\beta)$$

ilgį.

11. Duoti trys taškai

$$A(-6,5),\ B(3,-2),\ C(0,-1).$$

Raskite tašką vienodai nutolusį nuo duotųjų taškų.

12. Per taškus

$$A(-1,3),\ B(0,2),\ C(1,-1)$$

nubrėžtas apskritimas. Raskite šio apskritimo centrą bei spindulį.

13. Kokia turi būti parametro a reikšmė, kad tiesės

$$2x - ay + 5 = 0,\ x + 3y - 4 = 0$$

būtų: a) lygiagrečios; b) statmenos; c) sudarytų 45^0 kampą.

Užrašykite antrosios tiesės kryptinę, ašinę, bei normaliąją lygties formas.

14. Yra žinoma, kad tiesei priklauso taškas $(2,3)$ ir be to ieškomoji tiesė su tiese $9x-3y+2=0$ sudaro kampą, kuris lygus $\arctan(5/2)$. Sudarykite šios tiesės lygtį.

15. Duota tiesė $3x - 5y - 21 = 0$ ir taškas $(5,-8)$. Raskite šio taško projekciją duotoje tiesėje, bei šiam taškui simetriško, šios tiesės atžvilgiu, taško koordinates.

16. Jei tiesės $x - y = 0$ ir $-3x + 3y = 8$ yra lygiagrečios, tai raskite atstumą tarp jų.

17. Sakykime, kad trikampio viršūnių koordinatės yra tokios:

$$A(2,-3),\ B(3,3),\ C(-1,4).$$

Sudarykite a) kraštinės BC, b) pusiaukraštinės BE, c) aukštinės BH, d) vidurio linijos, lygiagrečios kraštinei BC, e) kampo B pusiaukampinės, lygtis.

18. Tarkime, kad duotos trikampio kraštinių lygtys:

$$4x - y - 7 = 0(AB),\ x + 3y - 31 = 0(BC),\ x + 5y - 7 = 0(CA).$$

Raskite: a) pusiaukraštinės BE ilgį, b) aukštinės BH ilgį, c) kampo ABC dydį, d) trikampio plotą, e) apibrėžtinio apskritimo centrą bei spindulį.

19. Sudarykite plokštumų, kurios tenkina sąlygas: a) plokštumai priklauso taškas $(2,2,-4)$, o ji statmena vektoriui $\alpha = (3,2,-4)$; b) plokštumai priklauso taškai

$$(2,1,-1),\ (-1,0,2),\ (1,2,-1);$$

c) plokštumai priklauso taškas $(1,1,-1)$, o ji lygiagreti plokštumai

$$x - y + z - 3 = 0;$$

d) plokštumai priklauso taškas $(-,3,2)$, o ji statmena susikertančioms plokštumoms

$$x + 2y - 3z - 4 = 0,\ 2x - y - z + 3 = 0,$$

lygtis.

20. Jei plokštumos

$$6x - 2y - 6z + 3 = 0,\ -6x + 2y + 6z - 1 = 0$$

yra lygiagrečios, tai raskite atstumą tarp jų. Kokiuose taškuose pirmoji plokštuma kerta koordinatines ašis?

21. Kokios turi būti parametrų m ir n reikšmės, kad plokštumos

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 6, \\ 2x + y + 3z = n, \\ 3x + y - mz = 1, \end{cases}$$

a) turėtų vieną bendrą tašką; b) eitų per vieną tiesę; c) poromis kirsdamosi sudarytų tris lygiagrečias tieses.

22. Sudarykite tiesių erdvėje a) kuriai priklauso taškas $(1, -2, 3)$ ir kuri lygiagreti vektoriui $\alpha = (4, -1, 3)$; b) per du taškus $(-3, 3, -4)$ ir $(2, -1, 1)$, lygtis.

23. Raskite tiesės

$$\begin{cases} x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \end{cases}$$

parametrines bei kanonines lygtis. Raskite kampą tarp šių plokštumų.

24. Jeigu tiesės yra prasilenkiančios, tai raskite atstumą bei kampą tarp šių tiesių:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} x = -4t - 3, \\ y = -4, \\ z = 6t + 2. \end{cases}$$

25. Raskite plokštumos $2x - 3y - z + 5 = 0$ ir tiesės

$$\begin{cases} x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 2y - 3z + 1 = 0, \end{cases}$$

bendrus taškus, jei jie egzistuoja.

26. Sudarykite plokštumos, a) kuriai priklauso taškas $(1, 4, -3)$ ir tiesė

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

b) kuriai priklauso taškas $(1, 0, -3)$ ir lygiagreti tiesėms

$$\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1},$$

$$\begin{cases} x = -2t, \\ y = -4, \\ z = 3t + 2, \end{cases}$$

lygtis.

27. Sudarykite plokštumos, kuriai priklauso dvi lygiagrečios tiesės

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-4}{-8} \text{ ir } \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{2}.$$

lygtį.

28.

1) Raskite funkcijos $f(x, y) = x + 2y + 1$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} x + y \leq 6, \\ x - 2y \geq 0, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

2) Raskite funkcijos $f(x, y) = 2x + y$ minimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} 3x - y \geq -4, \\ x + y \leq 5, \\ x - y \leq 3, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

29. Statybinius įrankius gaminantis verslininkas gamina dviejų rūšių įrankius A ir B. Kiekvienam įrankiui pagaminti yra naudojamos dvi staklės $S1$ ir $S2$ bei baigiamuosius žingsnius atliekantys darbuotojai D. Žemiau pateiktoje lentelėje pateikiamos darbo laiko sąnaudos reikalingos įrankiams pagaminti:

	$S1$	$S2$	D
A	3	2	1
B	2	2	1

Žinoma, kad per savaitę pirmosios staklės gali dirbti ne daugiau negu 40h, antrosios staklės ne daugiau negu 30h ir baigiamuosius darbus atliekantys darbininkai ne daugiau negu 50h. Pardavus pirmąjį įrankį A gaunamas 20Lt pelnas, o antrąjį 40Lt pelnas. Nustatykite, kiek ir kokių įrankių reikėtų pagaminti per savaitę, kad pelnas būtų didžiausias. Koks šiuo atveju bus pelnas?

30. Gamykla iš dviejų rūdos rūšių $R1$, $R2$ išskiria dvi metalų rūšis: metalą A ir B atitinkamai. Lentelėje yra pateikiami kiek kg. metalo yra išskiriama iš vienos tonos rūdos bei apačioje nurodyti kaštai (K):

	$R1$	$R2$
A	600	500
B	400	100
K	60	30

.

Gamykla privalo pagaminti ne mažiau negu 4 tonas metalo A ir 3 tonos metalo B. Nustatykite kiek ir kokio metalo turi būti pagaminta, kad kaštai būtų minimalūs. Raskite šiuos minimalius kaštus.

Literatūra

1. APYNIS, Antanas; STANKUS, Eugenijus, 2009 Matematikos pagrindai Vilnius TEV

2. PIEKARSKAS Vidmantas , PIEKARSKIENĖ Aldona, 2004 Tiesinės algebros ir analizinės geometrijos elementai Kaunas, Technologija

3. BRADLEY Teresa, 2009 Essential Mathematics for economics and business 30th edition Wiley & Sons

4. JASIŪNAS Hemrikas, VERIKAITĖ Vitolda 1998 Aukštosios matematikos uždavinių rinkinys. Analizinė geometrija VU leidykla