II. VEKTORINĖ ERDVĖ $\mathcal{R}^n$

2.1 Vektoriai. Vektorių veiksmai

Apibrėžimas Sutvarkytą realių skaičių rinkinį $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vadinsime $n-$ mačiu vektoriumi. Skaičiai $a_j \in \mathcal{R}$, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami vektoriaus koordinatėmis.

Žemiau šiuos rinkinius trumpumo dėlei žymėsime graikiškomis raidėmis. Pavyzdžiui

$$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n),\ \gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Sakinys "sutvarkytas skaičių rinkinys " reiškia, kad koordinačių padėtis vektoriuje yra svarbi. Jeigu vektorius turi n koordinačių, tai sakysime, kad vektorius yra aibės $\mathcal{R}^n$ elementas.

Apibrėžimas Sakysime, kad aibės $\mathcal{R}^n$ elementai $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ir $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ yra lygūs, jeigu šių elementų atitinkamos koordinatės yra lygios, t.y. $a_j = b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Tad jei vektorius α yra lygus vektoriui β, tai šį veiksmą žymėsime $\alpha = \beta$.

Lygybės sąvokos apibrėžimas tuo pačiu paaiškina vektoriaus sutvarkymo fenomeną. Taigi, remiantis apibrėžimu vektoriai $(2, 5)$ ir $(5, 2)$ nėra lygūs.

Apibrėžimas Vektorių α ir β suma (žymėsime $\alpha + \beta$) vadinsime vektorių γ, kurio koordinatės nusakomos lygybėmis $c_j = a_j + b_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. Taigi,

$$\alpha + \beta = \gamma = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n).$$

Remdamiesi apibrėžimu gauname, kad

$$(2, 3, 4) + (3, -3, 1) = (5, 0, 5).$$

Apibrėžimas Vektoriaus $\alpha \in \mathcal{R}^n$ ir skaičiaus $k \in \mathcal{R}$ sandauga vadinsime vektorių

$$k\alpha = (ka_1, \ldots, ka_n).$$

Tegu $\alpha = (3, 4, 0, 0)$. Tada $2\alpha = (6, 8, 0, 0)$.

Matome, kad pateiktų veiksmų atžvilgiu vektorių aibė $\mathcal{R}^n$ yra uždara. T.y. atlikdami šiuos vektorių veiksmus aibėje $\mathcal{R}^n$, gauname tos pačios vektorių aibės elementus.

Veiksmų savybės.

1) Vektorių sudėtis yra komutatyvi:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš realiųjų skaičių komutatyvumo (dėmenų keitimo vietomis) dėsnio ir sąryšių:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \ldots b_n + a_n) = \beta + \alpha.$$

2) Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad sudėtis tenkina asociatyvumo (skliaustų perstatymo) dėsnį

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Vektorių, kurio visos koordinatės lygios nuliui, vadinsime nuliniu, ir žymėsime raide O nepriklausomai kokiai aibei $\mathcal{R}^n$ nulinis vektorius priklauso.

Nesunku suprasti, kad bet kokiam vektoriui α teisinga lygybė:

3) $$\alpha + O = O + \alpha = a.$$

4) Bet kokiam vektoriui $\alpha \in \mathcal{R}^n$ galima nurodyti vektorių $\overline{\alpha}$ tokį, kad

$$\alpha + \overline{\alpha} = O.$$

Vektorius $\overline{\alpha}$ vadinamas atvirkštiniu vektoriui α. Pasirodo, $\overline{\alpha} = (-1)\alpha$. Pažymėkime $-\alpha := (-1)\alpha$.

Akivaizdu, kad vektorius $(-1)\alpha + \alpha = O$. Taigi, jis yra atvirkštinis. Parodykime, kad jis vienintelis. Turime

$$\alpha + \overline{\alpha} = O.$$

Pridėję prie abiejų lygybės pusių vektorių $-\alpha$ gauname, kad

$$-\alpha + (\alpha + \overline{\alpha}) = -\alpha + O.$$

Antra vertus, iš paskutiniųjų lygybių išplaukia tokia lygybė:

$$O + \overline{\alpha} = -\alpha + O.$$

Dėka 3) savybės turime, kad $\overline{\alpha} = -\alpha$. Taigi, bet koks vektoriaus α atvirkštinis sutampa su vektoriumi $-\alpha$.

Žemiau pateiksime dar penkias veiksmų savybes, kurių įrodymus paliekame skaitytojui.

5) Visiems $\alpha \in \mathcal{R}^n$, $1 \cdot \alpha = \alpha$.

6) Vektoriaus ir realaus skaičiaus daugyba yra komutatyvi. T.y.,

$$\forall k \in \mathcal{R},\ \alpha \in \mathcal{R}^n,\ k \cdot \alpha = \alpha \cdot k.$$

7) $\forall l, k \in \mathcal{R}, \alpha \in \mathcal{R}^n$

$$\big(l + k\big) \cdot \alpha = l \cdot \alpha + k \cdot \alpha \text{ ir } (lk) \cdot \alpha = l \cdot (k \cdot \alpha).$$

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}^n$, $l \in \mathcal{R}$ teisinga lygybė:

$$l \cdot (\alpha + \beta) = l \cdot \alpha + l \cdot \beta.$$

Aibę $\mathcal{R}^n$, su aukščiau apibrėžtomis vektorių lygybės, sudėties ir daugybos iš skaičiaus operacijomis, vadinsime $n-$ mačių vektorių erdve.

2.2 Vektorių tiesinė priklausomybė

Apibrėžimas Sakykime, kad $l_i \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathcal{R}^n$, $(i = 1, \ldots, m)$. Tuomet vektorių

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j$$

vadinsime vektorių $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tiesiniu dariniu.

Atkreipsime dėmesį, kad jei $l_i = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$, tai $\alpha = O$. Pasirodo, kad atvirkščias teiginys, bendru atveju, nėra teisingas. Tiesinis darinys gali būti nulinis vektorius, nors sumoje yra ir nenulinių dėmenų. Apie tai šiek tiek plačiau.

Apibrėžimas Vektorių rinkinį $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ vadinsime tiesiškai nepriklausomu, jeigu tiesinis darinys

$$\sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j = O \tag{1}$$

tik tada, kai $\forall l_i = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$.

Priešingu atveju turime, kad jei darinys yra nulinis vektorius, tai tarp skaičių rinkinio elementų l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ egzistuoja nenulinis skaičius. Šiuo atveju vektorių rinkinį vadinsime tiesiškai priklausomu.

Kaip praktiškai patikrinti ar duotasis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas ar ne?

Tarkime duotas vektorių rinkinys $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Tuomet, kad patikrinti ar jis tiesiškai priklausomas ar ne mums reikia išspręsti lygtį:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \alpha_j = O.$$

Tiksliau kalbant reikia išspręsti tiesinių lygčių sistemą. Jeigu ši sistema turi tik nulinį sprendinį, tai vektorių rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Priešingu atveju rinkinys tiesiškai priklausomas. Pastebėsime, kad ši homogeninė t.l.s. visada suderinta.

Panagrinėkime, keletą pavyzdžių. Tarkime, kad duotas vektorių rinkinys

$$\alpha = (2, 1, 3),\ \beta = (0, 1, 0),\ \gamma = (2, 2, 3).$$

Patikrinkime, ar šis rinkinys tiesiškai priklausomas ar ne. Remiantis apibrėžimu, mums reikia patikrinti, su kokiomis x_1, x_2, x_3 reikšmėmis galima lygybė

$$x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = \mathrm{O}.$$

Akivaizdu, kad jei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ tai lygybė teisinga. Lieka atviras klausimas- ar ši lygybė yra teisinga tik su šiuo vieninteliu nuliniu rinkiniu ar egzistuoja ir nenulinis rinkinys?

Pasirodo, priklausomumo (nepriklausomumo) problema sprendžiama naudojant t.l. sistemas.

Užrašykime pateiktą vektorinę lygtį išskleista forma:

$$x_1(2, 1, 3) + x_2(0, 1, 0) + x_3(2, 2, 3) = (0, 0, 0).$$

Atlikę vektorių veiksmus kairėje pusėje gauname tokią vektorinę lygybę:

$$(2x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_3) = (0, 0, 0).$$

Žinome, kad du vektoriai lygūs, jei lygios šių vektorių atitinkamos koordinatės. Taigi,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Gauname homogeninę t.l.sistemą.

Siūlome skaitytojui išspręsti šią sistemą ir įsitikinti, kad ši sistema turi begalo daug sprendinių. Taigi, tarp rinkinių yra ir nenulinių. Vadinasi, duotasis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas.

Vektorių rinkinys bus tiesiškai nepriklausomas, jeigu nagrinėjama t.l.sistema bus pertvarkoma į trikampę. Taigi šiuo atveju ji turės vienintelį sprendinį, kuris bus nulinis.

Aptarsime sąlygas, kurios lemia ar nagrinėjamas vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas ar ne.

1 **Teorema** Jei vektorių rinkinyje, tarkime $\{\alpha_1, \ldots \alpha_m\}$, yra nulinis vektorius, tai šis rinkinys tiesiškai priklausomas.

$\ominus$

Tarkime, kad $\alpha_1 = O$. Imkime tokį realiųjų skaičių rinkinį: $l_1 = 1,\ l_i = 0,\ i = 2, \ldots, n$. Tuomet

$$1 \cdot \alpha_1 + \sum_{i=2}^{m} 0 \cdot \alpha_i \equiv O.$$

Taigi, šis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas, nes egzistuoja nenulinis rinkinys su kuriuo teisinga vektorinė lygybė (1).

$\oplus$ 2 **Teorema** Jei vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai nepriklausomas, tai ir bet kuri šio rinkinio dalis $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_j}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma.

$\ominus$

Tarkime priešingai, t.y., kad rinkinys $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_j}\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas. Pažymėkime $I_j = \{k_1, \ldots, k_j\}$, čia $I_j \subset \{1, \ldots, m\}$. Aibę I_j sudaro visi nagrinėjamo rinkinio indeksai. Kadangi rinkinys $\{\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_j}\}$ yra tiesiškai priklausomas, tai išplaukia, kad

$$\sum_{k \in I_j} l_k \alpha_k = O$$

ir $\exists j_0 \in I_j$ toks, kad $l_{j_0} \neq 0$. Sudarykime viso rinkinio tiesinį darinį tokiu būdu:

$$\sum_{k \in I_j} l_k \alpha_k + \sum_{k \notin I_j} l_k \alpha_k = O,$$

čia $l_k = 0, k \notin I_j$. Taigi, nurodėme nenulinį rinkinį su kuriuo tiesinis darinys lygus nuliui. Vadinasi ir pradinis vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas. Parodėme, kad $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ teisingas. Kadangi šis teiginys ir teiginys $p \Rightarrow q$ yra logiškai ekvivalentūs, tai iš įrodyto teiginio išplaukia teoremos teisingumas.

$\oplus$

3 **Teorema** Vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas rinkinio vektorius yra likusių rinkinio vektorių tiesinis darinys.

$\ominus$ Tarkime, kad

$$\sum_{i=1}^{m} l_j \alpha_j = O$$

ir $\exists i_0 \in \{1, \ldots, m\}, l_{i_0} \neq 0$. Tuomet naudodamiesi vektorių veiksmų taisyklėmis gauname:

$$\alpha_{i_0} l_{i_0} = -\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i_0}}^{m} l_i \alpha_i.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$\alpha_{i_0} = \sum_{i=1}^{m} -(\frac{l_i}{l_{i_0}}) \alpha_i.$$

Paskutinioji lygybė reiškia, kad vienas rinkinio vektorius yra kitų tiesinis darinys.

Įrodysime atvirkštinį teiginį.

Tegu vienas vektorius yra likusių rinkinio vektorių tiesinis darinys, t.y.

$$\alpha_{i_0} = \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i_0}}^{m} l_i \alpha_i.$$

Perrašę pastarąją lygybę

$$1 \cdot \alpha_{i_0} - \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq i_0}}^{m} l_i \alpha_i = O$$

matome, kad rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tiesinis darinys yra nulinis vektorius nors ne visi darinio koeficientai lygūs nuliui. Taigi rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tiesiškai priklausomas.

$\oplus$

4 **Teorema** Jeigu prie vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ prijungsime vektorių

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i,$$

tai vektorių rinkinys $\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, bus tiesiškai priklausomas.

$\ominus$

Imkime konstantų rinkinį $l = 1, l_i = -c_i, (i = 1, \ldots, m)$. Tuomet užrašę vektorių $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tiesinį darinį su šiomis konstantomis, gauname

$$1 \cdot \alpha + \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i = 1 \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} (-c_i)\alpha_i = O.$$

Akivaizdu, kad šis konstantų rinkinys nėra nulinis. Taigi, nagrinėjamasis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas.

$\oplus$

Tarkime, kad duoti trys vektoriai $\alpha = (1, 2, 3), \quad \beta = (0, 1, 1), \quad \gamma = \alpha + \beta = (1, 3, 4)$. Tada rinkinys α, β, γ yra tiesiškai priklausomas, kadangi

$$1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (-1) \cdot \gamma = \mathrm{O}.$$

Patikrinkite tai skaičiuodami!

5 **Teorema** Jeigu, bet kuris rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ vektorius yra rinkinio $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ vektorių tiesinis darinys, beje $k < m$, tuomet rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas.

$\ominus$

Laikykime, kad $\alpha_i \neq O, (i = 1, \ldots, m)$. Priešingu atveju išplaukia teoremos įrodymas.

Prie vektorių $\beta_1, \ldots, \beta_k$ prijunkime vektorių α_1. Žinome, kad jeigu rinkinyje yra bent vienas vektorius kitų vektorių tiesinis darinys tai tai šis rinkinys tiesiškai priklausomas (žr. 3 Teorema). Vadinasi

$$1 \cdot \alpha_1 + \sum_{i=1} c_i \beta_i = O$$

ir bent vienas iš $c_i \neq 0, (i = 1, 2, \ldots m)$ (priešingu atveju $\alpha_1 = O$ ir teorema būtų įrodyta). Tegu $c_1 \neq 0$. Tuomet turime:

$$\beta_1 = -(\frac{1}{c_1})\alpha_1 - \sum_{i=2}^{k} (\frac{c_i}{c_1})\beta_i.$$

Taigi, vektorius β_1 yra vektorių $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ tiesinis darinys. Tuo pačiu ir vektoriai $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ tiesiniai dariniai.

Prijunkime prie vektorių rinkinio $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ vektorių α_2. Remdamiesi 3 Teorema gauname, kad šis rinkinys tiesiškai priklausomas. Tuomet

$$\alpha_2 + l_1\alpha_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i \beta_i = O.$$

Pastebėsime, kad ne visi koeficientai $c_i = 0$, $(i = 2, \ldots, k)$ nes priešingu atveju gautume, kad vektoriai α_1, α_2 yra tiesiškai priklausomi ir teorema būtų įrodyta. Taigi, tarp konstantų c_i egzistuoja nenulinė. Tarkime, kad tai $c_2 \neq 0$. Tada

$$\beta_2 = -\frac{1}{c_2}\alpha_1 - \frac{l_2}{c_2}\alpha_2 - \sum_{i=3}^{k} (\frac{c_i}{c_2})\beta_2.$$

Iš pastarųjų lygybių išplaukia, kad ir vektoriai $\alpha_3, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ tiesiniai dariniai.

Toliau elgiamės visiškai analogiškai: prie vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ prijungiame vektorių α_3 ir t.t.

Atlikę $r \geq 2$ žingsnius gauname: a) arba vektoriai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra tiesiškai priklausomi, taigi ir rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas ir teoremos įrodymas būtų baigtas arba b) vektoriai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tiesiškai nepriklausomi ir vektoriai $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių

$$\alpha_1, \ldots \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_k$$

tiesiniai dariniai. Jei $r = k$, tai vektoriai $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tiesiniai dariniai. Tuomet, remdamiesi 3 Teorema gauname, kad rinkinys $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ (tuo pačiu metu ir rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$) yra priklausomi.

$\oplus$

2.3 Erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathcal{R}^n$. Be to, tegu $l_i \, (i = 1, \ldots, m)$ bet koks realiųjų skaičių rinkinys. Sudarykime vektorių

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i. \tag{2}$$

Kyla klausimas, ar egzistuoja erdvėje $\mathcal{R}^n$ vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, kad tinkamai parinkę skaičius l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ tiesinio darinio (2) vektoriais galėtume išreikšti bet kokį erdvės vektorių α.?

Visų pirma parodysime, kad apskritai egzistuoja vektorių rinkinys, erdvėje $\mathcal{R}^n$ toks, kad tinkamai parinkę tiesinio darinio koeficientus, minėtųjų vektorių pagalba galima išreikšti, bet kokį erdvės vektorių. Tarkime duotas $n-$ mačių vektorių rinkinys:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \; e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0), \; \ldots e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1). \tag{3}$$

Nesunku matyti, kad šis rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Įrodykite!

Tarkime, kad $e_1, e_2 \in \mathcal{R}^2$, t.y. $e_1 = (1, 0)$ ir $e_2 = (0, 1)$. Imkime šios erdvės vektorių $\alpha = (2, -11)$. Nesunku suprasti, kad

$$(2, -11) = 2(1, 0) + (-11)(0, 1).$$

Rašant trumpai, $\alpha = 2e_1 - 11e_2$.

Imkime bet kokį $n-$matį vektorių $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aišku, kad

$$\alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Matome, kad koks bebūtų vektorius $\alpha \in \mathcal{R}^n$ visuomet galime šį vektorių užrašyti (3) vektorių tiesiniu dariniu. Kokiomis savybėmis turi pasižymėti erdvės vektorių rinkinys, kad šio rinkinio vektorių tiesiniais dariniais galėtume užrašyti visus erdvės vektorius?

Apibrėžimas Tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinį $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, vadinsime erdvės $\mathcal{R}^n$ baze, jeigu bet koks šios erdvės vektorius α yra vektorių $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tiesinis darinys, t.y.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

6 **Teorema** Kiekvieną erdvės $\mathcal{R}^n$ bazę sudaro lygiai n vektorių.

$\ominus$

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra bazė. Kadangi kiekvienas vektorius $\alpha_i \, (i = 1, \ldots, m)$ yra vektorių $e_1, \ldots, e_n$ tiesinis darinys (tai jau esame parodę), visų pirma laikydami, kad $m > n$ ir remdamiesi 5 Teorema gauname, kad rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas. Bet tai prieštarauja teoremos prielaidai, kadangi $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra bazė. Vadinasi $m \leq n$. Tarkime, kad

$m < n$. Kadangi $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra bazė, tai bet kuris vektorius $e_j, (j = 1, \dots, n)$ yra vektorių α_i, $(i = 1, \dots, m)$ tiesinis darinys. Remdamiesi 5 Teorema gauname, kad rinkinys e_j, $(j = 1, \dots, n)$ yra tiesiškai priklausomas. Bet jau žinome, kad šis rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Tad prielaida, jog $m < n$ neteisinga ir telieka atvejis $m = n$.

$\oplus$

Teisinga tokia

7 **Teorema** Bet koks n tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinys yra erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė.

$\ominus$

Tarkime, kad rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tiesiškai nepriklausomas. Tuomet koks bebūtų vektorius $\alpha \in \mathcal{R}^n$, rinkinys $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra tiesiškai priklausomas. Kodėl? Bet tuomet teisingas sąryšis

$$l\alpha + \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j = O,$$

čia $l \neq 0$. (Jei būtų $l = 0$ tai rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ būtų tiesiškai priklausomas, nes nenulinis koeficientas turėtų būti tarp c_i, $i = 1, \dots, n$.) Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} -(\frac{c_i}{l})\alpha_j.$$

Kadangi vektorius buvo parinktas laisvai, tai išplaukia, kad $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ yra bazė.

$\oplus$

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ yra erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė. Tuomet, bet kokiam erdvės elementui α egzistuoja realių skaičių rinkinys l_j, $\quad (j = 1, \dots, n)$, toks, kad

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j \alpha_j.$$

Skaičius l_j, $(j = 1, \dots, n)$ vadinsime vektoriaus α koordinatėmis bazėje $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Skirtingose bazėse vektorius turi skirtingas koordinates, tačiau fiksuotoje bazėje vektoriaus koordinatės nusakomos vieninteliu būdu. Įrodysime tai.

8 **Teorema** Vektoriaus koordinatės duotoje bazėje nusakomos vieninteliu būdu.

$\ominus$

Tarkime priešingai, t.y vektorių α bazėje $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ galime išreikšti bent jau dvejopai:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j \alpha_j \text{ ir } \alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j.$$

Paskutiniąsias lygybes atėmę vieną iš kitos panariui, gausime

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \big(l_j - c_j\big)\alpha_j = O.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $l_j - c_j = 0$, arba $l_j = c_j, (j = 1, \dots, n)$ (priešingu atveju rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ nebūtų bazė).

$\oplus$

Įsitikinę, kad vektorių rinkinys

$$\alpha = (1, 2, 3), \quad \beta = (1, 1, 0), \quad \gamma = (0, 1, 2)$$

yra bazė, raskime vektoriaus $\delta = (1, 4, 8)$ koordinates šioje bazėje.

Naudojant Gauso metodą, galime iš karto spręsti du uždavinius

1) nustatyti ar vektorių rinkinys yra nepriklausomas;
2) rasti vektoriaus koordinates šioje bazėje.
Norint atlikti šią užduotį mums teks išspręsti tokią lygtį

$$\gamma = x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma.$$

Perrašykime šią lygtį naudodami vektorių veksmus. Įrašę konkrečius vektorius gauname, kad

$$(1,4,8) = x_1(1,2,3) + x_2(1,1,0) + x_3(0,1,2)$$

Taikydami vektorių veiksmų savybes gauname lygybę:

$$(1,4,8) = (x_1, 2x_1, 3x_1) + (x_2, x_2, 0) + (0, x_3, 2x_3)$$

arba sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Naudodami matricas sistemą perrašome tokiu būdu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & |4 \\ 3 & 0 & 2 & |8 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad vektorių koordinates į matricą perrašome stulpeliais.
Ši sistema turės vienintelį sprendinį (tuo pačiu rinkinys bus bazė), jeigu gausime trikampę t.l.s. Išspręskime sistemą.
Atlikę matricos eilučių veiksmus $-2L_1+L_2$ ir $-3L_1+L_3$ gauname tokią t.l.sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & -3 & 2 & |5 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $-3L_2 + L_3$ turėsime

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Paskutiniosios trikampės sistemos sprendinys yra toks:
$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$
Kadangi sprendinys vienintelis, tai vektorių δ nurodytais vektoriais išreiškiame vieninteliu būdu. Dar daugiau, vektorių rinkinys α, β, γ yra bazė (patikrinkite), o vektoriaus δ koordinatės šioje bazėje yra $(2,-1,1)$.

Apibrėžimas Vektorinės erdvės dimensija vadinsime šios erdvės bazės vektorių skaičių.
Apibrėžimas Tarkime, kad $V \subset \mathcal{R}^n$. Aibę V vadinsime erdvės $\mathcal{R}^n$ poerdviu, jeigu
1. $\mathrm{O} \in V$;
2. jei $k \in \mathcal{R}$ ir $\alpha \in V$, tai vektorius $k\alpha \in V$;
3. $\alpha, \beta \in V$, tai ir $\alpha + \beta \in \mathcal{V}$.
Poerdvio dimensija vadinsime didžiausią, nepriklausomų vektorių skaičių, šiame poerdvyje. Beje, šis vektorių rinkinys bus vadinamas poerdvio baze.
Sudarykime kokį nors trimatės erdvės poerdvį ir nustatykime jo dimesiją ir bazę. Tarkime duotas vektorių rinkinys

$$\alpha_1 = (2,1,3),\ \beta = (0,1,0),\ \gamma = (2,2,3).$$

Tada aibė

$$V = \{\theta; \theta = l_1\alpha + l_2\beta + l_3\gamma,\ l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{R}\},$$

kurią sudaro vektoriai, gaunami sudarant visus galimus tiesinius vektorių α, β, γ darinius, yra erdvės $\mathcal{R}^3$ poerdvis. Įsitikinkite patys!

Šio poerdvio dimensija priklauso nuo vektorių α, β, γ parinkimo. Tokiu būdu sudaryti poerdviai gali turėti dimensiją lygią 0 arba 1, arba 2, arba 3.

2.4 Vektorių rinkinio rangas

Remdamiesi 3 Teorema gauname, kad vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas rinkinio vektorius yra kitų vektorių tiesinis darinys. Šiame skyrelyje aptarsime metodą, kurį taikant bus galima nustatyti nepriklausomų vektorių skaičių rinkinyje.

Apibrėžimas Skaičius r vadinamas vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ rangu, jeigu šiame rinkinyje galime nurodyti r tiesiškai nepriklausomų vektorių $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tokių, kad bet kuris vektorių rinkinys iš $r+1$ vektoriaus $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{r+1}}\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas.

Kitaip tariant, rinkinio rangas yra maksimalus, tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius, duotame rinkinyje. Pastebėsime, kad rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ rangas $r \le \min\{m, n\}$, $\alpha_i \in \mathcal{R}^n$, $i = 1, \ldots n$.

Apibrėžimas Du tos pat erdvės vektorių rinkiniai $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ ir $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ vadinami ekvivalenčiais, jeigu bet kurį pirmojo rinkinio vektorių galima išreikšti antrojo rinkinio vektorių tiesiniu dariniu ir atvirkščiai.

9 **Teorema** Jeigu vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ rangas r, tai šiame rinkinyje yra lygiai r tiesiškai nepriklausomų vektorių, kurių tiesiniais dariniais galime išreikšti bet kurį rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ vektorių.

$\ominus$

Naudodamiesi rango apibrėžimu turime, kad egzistuoja r tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinys, tarkime $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\}$. Papildykime šį rinkinį, bet kuriuo rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ vektoriumi, tarkime α_i, $(i = 1, \ldots, m)$. Tada naujasis vektorių rinkinys bus tiesiškai priklausomas. (Kodėl?). Taigi,

$$\alpha_i = \sum_{l=1}^{r} c_l \alpha_{i_l},$$

ir $\exists c_i \neq 0$, $(i = 1, \ldots r)$. Tuo ir baigiame įrodymą.

$\oplus$

10 **Teorema** Ekvivalenčių vektorių rinkinių rangai yra lygūs.

$\ominus$

Sakykime, kad r yra vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ rangas, o vektoriai $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ tiesiškai nepriklausomi. Remdamiesi paskutiniąja teorema gauname, kad

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \alpha_j,\ (i = 1, \ldots, m).$$

Tegu p yra vektorių rinkinio $\{\beta_1, \ldots \beta_k\}$ rangas, o šio rinkinio vektoriai $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ tiesiškai nepriklausomi.

Remdamiesi tuo, kad vektorių rinkiniai ekvivalentūs galime užrašyti:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \alpha_i,\ (j = 1, \ldots, k).$$

Iš paskutiniosios lygybės, pasinaudoję (3.10) gauname

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \sum_{s=1}^{r} c_{is}\alpha_s = \sum_{s=1}^{r} \big(\sum_{i=1}^{m} b_{ji}c_{is}\big)\alpha_s, \ (j = 1, \ldots, k).$$

Bet tuomet, vektoriai $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ yra vektorių $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tiesiniai dariniai. Padarę prielaidą, kad $r < p$, bei remdamiesi 5. Teorema gauname, kad vektoriai $\beta_1, \ldots, \beta_p$ yra tiesiškai priklausomi. Tai prieštarauja prielaida, kad pasirinkti vektoriai nepriklausomi. Taigi, $p \leq r$. Bet, antra vertus,

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{p} d_{ji}\beta_i, \ j = (1, \ldots, k)$$

ir

$$\alpha_l = \sum_{i=1}^{k} t_{li}\beta_i, \ (l = 1, \ldots, m)$$

arba

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \big(\sum_{s=1}^{k} d_{is}t_{sj}\big)\beta_j, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Taigi, vektoriai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra vektorių $\beta_1, \ldots, \beta_p$ tiesiniai dariniai. Jeigu $p < r$, tai iš 5 Teoremos išplaukia prieštaravimas. Taigi belieka vienintelis galimas atvejis $p = r$. Analogiškus samprotavimus naudodami rinkiniui $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ gauname teoremos įrodymą.

$\oplus$

2.5 Vektorių rinkinio elementarieji pertvarkiai

Vektorių rinkinio elementariaisiais pertvarkiais vadiname:
1) vektorių keitimą vietomis rinkinyje;
2) vektoriaus dauginimą iš nelygaus nuliui skaičiaus;
3) dviejų rinkinio vektorių sudėtį.

11 **Teorema** Elementariaisiais pertvarkiais vektorių rinkinį pertvarkome į jam ekvivalentų rinkinį.

$\ominus$

Šio teiginio įrodymą paliekame skaitytojui.

Išvada. Vektorių elementarieji pertvarkiai nekeičia rinkinio rango, nors atliekant vektorių veiksmus pradinis rinkinys plečiasi.

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš paskutiniųjų dviejų teoremų.

Iš paskutiniosios išvados išplaukia, kad ekvivalenčiuose rinkiniuose yra vienodas tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius.

Iki šiol mes kalbėjome apie erdvės $\mathcal{R}^n$ elementus, kuriuos vadinome vektoriais. Beje, kadangi realieji skaičiai sudarantys šiuos rinkinius surašyti eilute, tai dažnai jie vadinami vektoriais eilutėmis.

Apibrėžimas Sutvarkytą realiųjų skaičių rinkinį

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_k \end{pmatrix}$$

vadinsime $k-$ mačiu vektoriumi stulpeliu. Skaičiai a_i, $(i = 1, \ldots, k)$ yra vadinami vektoriaus stulpelio koordinatėmis.

Norėdami atskirti vektorius stulpelius nuo kitų vektorių juos žymėsime α^*. Vektorių stulpelių veiksmai yra analogiški vektorių eilučių veiksmams. Sakysime, kad du vektoriai stulpeliai lygūs, jeigu jų atitinkamos koordinatės sutampa. Tegu

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Tada šių vektorių suma vadinsime vektorių

$$\gamma^* = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_k + b_k \end{pmatrix}.$$

Vektoriaus α^* ir skaičiaus $l \in \mathcal{R}$ sandauga vadinsime vektorių

$$l\alpha^* = \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \dots \\ la_k \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas Operaciją, kuri $k-$ matį vektorių stulpelį keičia $k-$ mačiu vektoriu eilute arba atvirkščiai, vadinsime vektorių trasponavimu, būtent

$$\alpha^{*T} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = \alpha$$

ir atvirkščiai,

$$\alpha^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha^*.$$

Transponavimo operacija turi tokias savybes:

1) $$\big(\alpha + \beta\big)^T = \alpha^T + \beta^T;$$

2) $$\big(l\alpha\big)^T = l\alpha^T.$$

Šios savybės išplauka iš tokių sąryšių:

$$\big(\alpha + \beta\big)^T = \big(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m\big)^T = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_m + b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix},$$

ir

$$\big(\alpha\big)^T = \big(la_1, \dots, a_m\big)^T = \begin{pmatrix} la_1 \\ \dots \\ la_m \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = l\alpha^T.$$

Jeigu transponuotume visus erdvės $\mathcal{R}^m$ elementus, tai gautume transponuotų vektorių aibę, kurios elementai turi analogiškas savybes kaip ir erdvės $\mathcal{R}^m$ vektoriai. Tad natūralu transponuotų vektorių aibę vadinti trasponuotų vektorių erdve ir žymėti $\mathcal{R}^{mT}$. Beje, pastebėsime, kad visi teiginiai, kurie buvo įrodyti vektoriams eilutėms, teisingi ir transponuotų vektorių erdvėje.

2.6 Vektorių ir tiesinių lygčių sistemų ryšys

Pažymėkime

$$\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ (j = 1, \dots, n), \ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sudarykime vektorinę lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j = \beta. \tag{3}$$

Iš pastarosios vektorinės lygties (prisiminkite vektorių lygybės savybę) gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m). \tag{4}$$

Vektorius β yra vadinamas laisvųjų narių stulpeliu, o vektoriai $\beta_j, \ (j = 1, \dots, n)$, vadinami lygčių sistemos vektoriais stulpeliais.

Matome, kad tiesinių lygčių sistemą galime užrašyti naudodamiesi vektorine lygtimi. Kyla klausimas- kaip yra susiję vektorių savybės ir tiesinių lygčių sistemų suderinamumo problema?

Pasirodo, kad teisinga tokia

12 **Teorema** (4) tiesinių l.s. yra suderinta tada ir tik tada kai vektorius β yra tiesinis, vektorių $\beta_j, \ (j = 1, \dots, n)$, darinys.

$\ominus$

Sakykime, kad

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} l_j \beta_j, \text{ kur } l_j \in \mathcal{R}, \ (j = 1, \dots, n).$$

Nesunku suprasti, kad pastaroji lygybių sistema reiškia (4) lygčių sistemą, kuomet nežinomųjų vietoje įrašytas realiųjų skaičių rinkinys $l_1, \dots, l_n$. Taigi, paskutinysis rinkinys yra lygčių sistemos (4) sprendinys.

Atvirkščiai. Tarkime, kad (4) sistema turi sprendinį $t_1, \dots, t_n$. Tuomet

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m).$$

Bet paskutinioji lygybė reiškia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinis darinys, kadangi

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \beta_j = \beta.$$

$\oplus$

Pademonstruosime šią teoremą konkrečiu pavyzdžiu. Tarkime, kad duota t.l.sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ -3x_2 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Šią sistemą perrašykime vektorine forma

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad rinkinys $(1, 0, 2)$ yra t.l. sistemos sprendinys. Be tuo pat metu teisinga vektorinė lygybė (patikrinkite)

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13 **Teorema** Tiesinių, homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos koeficientų vektoriai stulpeliai yra tiesiškai priklausomi.

$\ominus$

Tarkime iš pradžių, kad stulpeliai tiesiškai priklausomi, t.y.

$$\sum_{j=1}^{n} l_j \beta_j = O, \ (l_1, \ldots, l_n) \neq O.$$

Bet tuomet rinkinys $(l_1, \ldots, l_n)$ yra sistemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \ (i = 1, \ldots, m)$$

nenulinis sprendinys.

Atvirkščiai, tarkime, kad sistema turi nenulinį sprendinį $(l_1, \ldots, l_n)$ t.y., bent viena sprendinio komponentė $l_i \neq 0, (i = 1, \ldots, m)$. Tuomet teisingos lygybės

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j = 0, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad vektoriai stulpeliai $\beta_1, \ldots, \beta_n$ yra tiesiškai priklausomi.

$\oplus$

14 **Teorema** $n-$ mačių vektorių eilučių
$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ \alpha_2 = (0, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \ \ldots,$
$\alpha_r = (0, \ldots, 0, a_{rr}, \ldots, a_{rn}), \ a_{ii} \neq 0$, rangas yra lygus r.
Analogiškai, $m-$mačių vektorių stulpelių

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots \beta_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ a_{rr} \\ \ldots \\ a_{mr} \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0, (i = 1, \ldots, r)$ rangas yra lygus r.

$\ominus$

Norint įrodyti teoremą mums pakanka parodyti, kad nagrinėjami vektoriai eilutės, arba stulpeliai, yra tiesiškai nepriklausomi. O tai reikš, kad r vektorių rinkinyje maksimalus tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius yra r.

Tarkime, kad tiesinis vektorių darinys yra nulinis vektorius, t.y.

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i = O.$$

Šią lygybę galime perrašyti ir taip:

$$\big(x_1a_{11}, x_1a_{12} + x_2a_{22}, x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33}, \ldots, x_1a_{1n} + \cdots + x_ra_{rn}\big) =$$

$\overbrace{(0, \ldots, 0)}^{r}$.

Naudodamiesi vektorių lygybe gauname

$$\begin{cases} x_1a_{11} = 0, \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} = 0, \\ x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_1a_{1n} + \cdots + x_ra_{rn} = 0. \end{cases}$$

Iš paskutiniosios lygčių sistemos išplaukia, kad $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Taigi, nagrinėjamas vektorių rinkinys tiesiškai nepriklausomas ir jo rangas lygus vektorių skaičiui, arba tiesiog lygus r.

$\oplus$

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Surašę šios sistemos koeficientus tokiu būdu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gausime stačiakampę skaičių lentelę, kurią vadinsime tiesinių lygčių sistemos koeficientų matrica. Beje, atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad šios matricos eilutes arba stulpelius galime interpretuoti kaip vektorius eilutes arba stulpelius, atitinkamai.

Apibrėžimas Matricos eilučių (stulpelių) rangu vadinsime šios matricos eilučių (stulpelių) pagalba sudarytų vektorių eilučių (stulpelių) rangą.

Remdamiesi 13 Teorema gauname, kad matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}, a_{ii} \neq 0 \ i = 1, \ldots, r$$

rangas lygus r.

Apibrėžimas Matricos elementariaisias pertvarkiais vadinsime jos eilučių arba stulpelių elementariuosius pertvarkius.

15 **Teorema** Bet kokią, nenulinę matricą, elementariaisiais pertvarkiais galime pertvarkyti į matricą:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix},
$$

kurios pirmose r eilutėse ir r stulpeliuose yra lygiai r vienetų (kiekvienoje po vieną), $r \leq \min(m, n)$.

$\ominus$

Tarkime, kad duota matrica

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}.
$$

Laikykime, kad $a_{11} \neq 0$. Priešingu atveju sukeitę eilutes vietomis galime pasiekti, kad pirmoje eilutėje, pirmasis koeficientas būtų nelygus nuliui. Jeigu visi $a_{i1} = 0$, $(i = 1, \dots, m)$ tai keisdami eilutes ir stulpelius vietomis galime pasiekti, kad pradinė prielaida būtų išpildyta. Prisiminkime, kad elementarieji pertvarkiai nekeičia vektorių rinkinių rangų! Elgsimės panašiai kaip ir spręsdami tiesines lygčių sistemas Gauso metodu.

Pridėkime prie $i-$osios eilutės pirmąją eilutę padaugintą iš skaičiaus $-a_{i1}/a_{11}$, $i = 2, \dots, m$. Gausime matricą

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\
.. & \dots & \dots & \dots \\
0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)}.
\end{pmatrix}
$$

Tegu $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (priešingu atveju elgsimės kaip ir pirmąjame žingsnyje). Prie paskutiniosios matricos $i-$osios eilutės $i = 3, \dots, m$ pridedame antrąją eilutę padaugintą iš daugiklio $-a_{i1}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ ir gauname,

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)}
\end{pmatrix}.
$$

Elgdamiesi analogiškai, atlikę $r-1$ žingsnį gauname tokią matricą:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}.
$$

Tuo atveju, kai $r = m$, nulinių eilučių matricoje nebus. Toliau, visiškai analogiškai pertvarkydami paskutiniosio matricos stulpelius gausime

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & b_{rr} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Teoremos įrodymą gausime, jeigu $i-$ąją eilutę (stulpelį) padauginsime iš $1/b_{ii}$
$\oplus$
Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad matricos stulpelių bei eilučių rangai sutampa. Todėl natūralu matricos eilučių arba stulpelių rango neskirti, ir šiuos abu rangus vadinti tiesiog matricos rangu.

Šis algoritmas sudaro prielaidas ne tik nustatyti rinkinio rangą, bet ir nustatyti, kurie vektoriai yra nepriklausomi.

Tarkime, kad duotas toks vektorių rinkinys:

$$\alpha_1 = (2, 1, 1, 0), \quad \alpha_2 = (-1, 1, 1, -1), \quad \alpha_3 = (1, 2, 2, -1), \quad \alpha_4 = (0, 3, 3, -2).$$

Raskime šio vektorių rinkinio rangą, bei nustatykime, kurie vektoriai yra nepriklausomi.
Surašykime šiuos vektorius eilutėmis į matricą. Gauname

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & (v_1) \\ -1 & 1 & 1 & -1 & (v_2) \\ 1 & 2 & 2 & -1 & (v_3) \\ 0 & 3 & 3 & -2 & (v_4) \end{pmatrix}.$$

Pasirinkę trečią eilutę generaline, ir atlikę veiksmus $v_3 + v_2$, $-2v_3 + v_1$ bei sukeitę trečią eilutę su pirmąja gauname matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & (v_3) \\ 0 & 3 & 3 & -2 & (v_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_4) \end{pmatrix}.$$

Gavome matricą, kuri turi trapecinę formą, kurioje dvi nenulinės eilutės. Taigi vektorių rinkinio rangas (maksimalus nepriklausomų vektorių skaičius rinkinyje) yra lygus 2. Dar daugiau, nepriklausomų vektorių porą sudaro v_1 ir v_3 vektoriai. Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad nepriklausomų vektorių pora galėjo būti ir kita, jei būtume kita seka atlikę veiksmus.

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad matricos stulpelių bei eilučių rangai sutampa. Todėl natūralu matricos eilučių arba stulpelių rango neskirti, ir šiuos abu rangus vadinti tiesiog matricos rangu.

2.7 Tiesinių lygčių sistemų suderinamumo sąlygos

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m).$$

Tegu kaip ir aukščiau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

Tada teisinga tokia teorema:

16 **Teorema**(Kronekerio - Kapelio) Tiesinių lygčių sistema yra suderinta tada ir tik tada, kai rang$A$ = rang$B$.

$\ominus$

Visų pirma tarkime, kad t.l.s. yra suderinta. Tuomet egzistuoja realiųjų skaičių rinkinys $(l_1, \dots, l_n)$ su kuriuo teisinga lygybė:

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} l_j \beta_j,$$

kur β yra lygčių sistemos laisvųjų narių stulpelis, o β_j, $(j = 1, \dots, n)$ yra t.l. sistemos koeficientų stulpelis prie nežinojojo x_j.

Antra vertus, paskutinioji lygybė reiškia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinis darinys. Tarkime, kad rang$A = r$. Tuomet egistuoja šiame vektorių rinkinyje r tiesiškai nepriklausomų vektorių, tarkime

$$\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}.$$

Vadinasi $\forall \beta_j, \ j \notin I_r := \{j_1, \dots, j_r\}$ teisingos lygybės

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{r} c_{jj_k} \beta_{j_k} \ (j = 1, \dots, n).$$

Naudodamiesi paskutiniosiomis lygybėmis lygčių sistemą perrašome taip:

$$\beta = \sum_{j=1, j \notin I_r}^{n} l_j \Big(\sum_{k=1}^{r} c_{jj_k} \beta_{j_k} \Big) + \sum_{k=1}^{r} l_{j_k} \beta_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1, j \notin I_r}^{n} l_j c_{jj_k} \beta_{j_k} +$$

$$\sum_{k=1}^{r} l_{j_k} \beta_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=1, j \notin I_r}^{n} l_i c_{jj_k} + l_{j_k} \Big) \beta_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} a_k \beta_{j_k},$$

čia $a_k = \sum\limits_{j=1, j \notin I_r}^{n} l_i c_{jj_k} + l_{j_k}$. Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ tiesinis darinys, bet tuomet vektorių $\beta, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$ rinkinys yra tiesiškai priklausomas ir jo rangas taip pat yra r. Taigi rang$A$ = rang$B = r$.

Įrodysime atvirkščią teiginį. Tarkime, kad $\beta_{j_1}, \dots \beta_{j_r}$ koks nors nepriklausomų vektorių stulpelių rinkinys matricoje B. Matricos B rangas lygus r, tai rinkinys $\beta, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}$, yra tiesiškai priklausomas. Taigi, egzistuoja nenulinis realiųjų skaičių rinkinys $l, c_{j_1}, \dots, c_{j_r}$ toks, kad teisinga lygybė:

$$l\beta + \sum_{k=1}^{r} c_{j_k} \beta_{j_k} = O.$$

Be to pastebėkime, kad $l \neq 0$ (kodėl?). Tuomet iš pastarosios lygybės išplaukia

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} d_j \beta_j,$$

čia

$$d_j = \begin{cases} 0, \ j \notin I_r, \\ -c_{j_k}/l, \ j \in I_r, \end{cases} \qquad I = \{j_1, \dots, j_r\}.$$

Bet pastaroji lygybė reiškia, kad t.l.s yra suderinta, dar daugiau, nurodėme ir jos sprendinį.

$\oplus$

17 **Teorema** Tiesinių lygčių sistema apibrėžta, kai rang$A$ =rang$B$ =n ir neapibrėžta, kai rang$A$ =rang$B$ $< n$.

$\ominus$

Aišku, kad rang$A$ =rang$B$ =n gali būti tik tuo atveju, kai $m \geq n$. Bet tuomet t.l.s. stulpeliai tiesiškai nepriklausomi. Šiuo atveju tarkime priešingai, t.y. egzistuoja bent du sprendiniai tokie, kad

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \beta_j = \beta \ \text{ ir } \ \sum_{j=1}^{n} d_j \beta_j = \beta.$$

Tuomet

$$\sum_{j=1}^{n} \big(c_j - d_j\big) \beta_j = O.$$

Kadangi vektorių rinkinys nepriklausomas, tai pastaroji lygybė galima tik su nuliniais koeficientais. Taigi $c_j = d_j, \ (j = 1, \dots, n)$. Vadinasi sprendinys vienintelis.

Įrodysime antrąją teoremos dalį. Tarkime, kad rang B=rang$A < n$. Taigi, vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ rinkinys yra tiesiškai priklausomas (kodėl?). Tuomet egzistuoja nenulinis realių skaičių rinkinys $t_1, \dots, t_n$ toks, kad

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \beta_j = O.$$

Kadangi lygčių sistemos matricos ir išplėstinės t.l.s. matricos rangai sutampa, tai sistema turi sprendinį, sakykime $l_1, \dots, l_n$. Tuomet teisinga lygybė

$$\sum_{j=1}^{n} l_j \beta_j = \beta.$$

Pastarųjų dviejų lygybių dėka gauname, kad

$$\sum_{j=1}^{n} \big(l_j + t_j\big) \beta_j = \beta.$$

Matome, kad rinkinys $(t_1 + l_1, \dots, t_n + l_n)$ yra kitas sistemos sprendinys. Taigi, šiuo atveju rinkinys turi ne vienintelį sprendinį. Tuo baigiame teoremos įrodymą.

$\oplus$

18 **Teorema** Tiesinių homogeninių lygčių sistema turi ne nulinį sprendinį tada ir tik tada, kai matricos rangas rang $A < k$, čia $k = \min(m, n)$, n stulpelių, o m eilučių skaičius.

$\ominus$

Įrodymą paliekame skaitytojui.

$\oplus$

2.8 Tiesinių poerdvių pavyzdžiai

1. Vektorių rinkinio generuotas poerdvis

Išvada Tarkime, kad vektorių $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathcal{R}$ rinkinio rangas yra r. Tada šio vektorių rinkinio tiesinių darinių aibė

$$V = \{\alpha(l_1, \ldots, l_m)| \;\; \alpha(l_1, \ldots, l_m) = \sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j, \;\; l_i \in \mathcal{R}^n\}$$

yra tiesinis vektorinės erdvės $\mathcal{R}^n$ poerdvis.

Įrodymą paliekame skaityrojui.

Tarkime duotas erdvės $\mathcal{R}^n$ vektorių rinkinys rinkinys $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Tarkime, kad yra nagrinėjami visi šio vektorių rinkinio tiesiniai dariniai

$$\alpha(l_1, \ldots, l_m) = \sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j.$$

Kyla klausimas- kokią erdvės dalį "užpildo " visų šių vektorių visuma, kai skaičiai $l_1, \ldots, l_m$ renkami laisvai. Žinome, kad jei vektorių $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas ir $m = n$, tai šis rinkinys erdvės bazė, vadinasi šie dariniai apima visą erdvę $\mathcal{R}^n$. Tad šiuo atveju poerdvis sutampa su visa erdve. Panagrinėkime situaciją, kai nepriklausomų vektorių skaičius rinkinyje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ yra $r \le n$. Remdamiesi aukščiau pateikta teorine medžiaga aptarkime algoritmą, kaip sukonstruoti poerdvį kuriam priklausytų visi erdvės $\mathcal{R}^n$ vektoriai, kuriuos galima užrašyti nagrinėjamo vektorių rinkinio tiesiniais dariniais. Tarkime duotas vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathcal{R}^n$.

1) Randame šio vektorių rinkinio rangą, o tuo pačiu ir didžiausią nepriklausomų vektorių skaičių rinkinyje. Tarkime šis vektorių skaičius yra r.

Norint tai atlikti pakanka:

a) surašyti vektorių koordinates į matricą eilutėmis, eilutes sunumeruojant pagal rinkinio vektorių numerius.

b) naudojant eilučių elementariuosius pertvarkius pertvarkyti matricą į trapecinę formą, be to kaitaliojant eilutes kartu keiskite ir atitinkamus numerius.

Pertvarkius matricą į trapecinę, gauname keletą atsakymų, visų pirma, kiek trapecinėje formoje yra nenulinių eilučių, toks vektorių rinkinyje yra nepriklausomų vektorių skaičius, o tuo pačiu ir tokia bus rinkinio generuoto poerdvio dimensija. Be to, tie numeriai, ties kuriais yra nenulinės eilutės parodo, kurie pradinio rinkinio vektoriai gali būti laikomi baziniais vektoriais. Kitaip tariant iš karto galime nurodyti šio rinkinio generuoto poerdvio bazę.

2) Jei norima patikrinti, ar koks nors erdvės vektorius priklauso šiam poerdviui pakanka išreikši šį vektorių baziniais pradinio rinkinio vektoriais, Jei sistema turi vienintelį sprendinį (tik tokį ir gali turėti) tai vektorius priklauso poerdviui. Tuo pačiu, sprendinio komponentės yra šio vektoriaus koordinatės poerdvio bazėje. Priešingu atveju, t.y. jei sistema sprendinių neturi, vektorius rinkinio generuotam poerdviui nepriklauso.

Pavyzdys Duotas vektorių rinkinys

$$\alpha_1 = (0, 0, 1, 1), \;\; \alpha_2 = (1, 1, 1, 1), \;\; \alpha_3 = (1, 0, 1, -1), \;\; \alpha_4 = (1, 0, 2, 0).$$

Rasti šio rinkinio generuoto poerdvio dimensiją, nurodyti pradinio rinkinio vektorius, kurie sudaro poerdvio bazę. Be to patikrinti, ar vektorius $\alpha = (5, 2, 6, 0)$ priklauso šiam poerdviui.

1. Rasime šio rinkinio rangą ir bazinius vektorius (vektorius kuriais galime išreikšti visus poerdvio vektorius). Surašę į matricą paeiliui (tai nebūtina) visus vektorius, po to sukeitę vietomis, gauname:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & (v_1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & (v_2) \\ 1 & 0 & 1 & -1 & (v_3) \\ 1 & 0 & 2 & 0 & (v_4) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & (v_2) \\ 1 & 0 & 1 & -1 & (v_3) \\ 1 & 0 & 2 & 0 & (v_4) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (v_1) \end{pmatrix} \sim$$

Atlikę operaciją $v_3 + v_1 = v_1^{'}$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & (v_2) \\ 1 & 0 & 1 & -1 & (v_3) \\ 1 & 0 & 2 & 0 & (v_4) \\ 1 & 0 & 2 & 0 & (v_1^{'}) \end{pmatrix} \sim$$

Atlikę operaciją $v_4 + v_1^{'} = v_1^{"}$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & (v_2) \\ 1 & 0 & 1 & -1 & (v_3) \\ 1 & 0 & 2 & 0 & (v_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_1^{"}) \end{pmatrix}.$$

Taigi, vektorių rinkinio rangas yra $r = 3$. Be to bazę sudaryti gali tie vektoriai, kurių numeriai yra ties nenuliniais vektoriais trapecinės formos matricoje. Taigi bazę sudaro $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$.

2. Patikrinsime ar vektorius $\alpha = (5, 2, 6, 0)$ priklauso šiam poerdviui. Žinome, kad jei vektorius priklauso poerdviui, tai jį galima užrašyti bazės vektorių tiesiniu dariniu. Bandome tai atlikti, t.y užrašome tiesiniu dariniu, t.y. bazinius vektorius į matricą surašome stulpeliais, o už brūkšnio surašome reiškiamą vektorių. Po to atlikę veiksmą $-2l_1 + l_3 = l_3^{'}$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & (l_1) & |5 \\ 1 & 0 & 0 & (l_2) & |2 \\ 1 & 1 & 2 & (l_3) & |6 \\ 1 & -1 & 0 & (l_4) & |0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & (l_1) & |5 \\ 1 & 0 & 0 & (l_4) & |2 \\ -1 & -1 & 0 & (l_3^{'}) & |-4 \\ 1 & -1 & 0 & (l_4) & |0 \end{pmatrix} \sim$$

Atlikę veiksmą $(-1)l_3^{'} + l_4 = l_4^{'}$ ir be to sukeitę antrąją l_2 su eilute $l_3^{'}$ ir atlikę veiksmą $-2l_3^{''} + l_4 = l_4^{'}$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & (l_1) & |5 \\ 1 & 1 & 0 & l_2^{'} & |4 \\ 1 & 0 & 0 & l_3^{''} & |2 \\ 2 & 0 & 0 & l_2^{'} & |4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & l_2^{'} & |5 \\ 1 & 1 & 0 & l_2^{'} & |4 \\ 1 & 0 & 0 & l_3^{''} & |2 \\ 0 & 0 & 0 & l_4^{'} & |0 \end{pmatrix}.$$

Gavome trikampę t.l.s. Tad sistema turi vienintelį sprendinį, kuris yra vektoriaus koordinatės poerdvio bazėje. Gauname, kad $x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$. Išreiškę vektorių α per bazės vektorius turime:

$$\alpha = 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4.$$

2. Homogeninės t.l. sistemos sprendinių poerdvis

Teorema Tiesinės homogeninės lygčių sistemos, kurios matrica ekvivalenti trapecinės formos matricai, turinčiai r lygčių ir n nežinomųjų , čia $r \leq n$, sprendiniai generuoja erdvės $\mathcal{R}^n$ poerdvį, kurio dimensija yra lygi $l = n - r$, l yra laisvųjų nežinimųjų skaičius bendrojo sprendinio formoje.

Įrodymą paliekame skaitytojui.

$\oplus$

Tarkime, kad duota $m-$ lygčių su n nežinomaisiais homogeninė t.l.sistema. Tada, šios lygties sprendiniai, sudaro erdvės $\mathcal{R}^n$ poerdvį, kurio dimensija $n - r$, čia r yra homogeninės t.l.sistemos matricos A rangas. Aptarsime, kaip rasti šio poerdvio bazę. Sakykime, kad duota homogeninė t.l.sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Pertvarkę šią sistemą į trapecinę gauname

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = 0, \end{cases}$$

čia $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots r)$ ir $r \leq n$.

Spręsdami šią sistemą randame šios sistemos bendrąjį sprendinį

$$(l'_1, \dots, l'_r, x_{r+1}, \dots, x_n),\ x_i \in \mathcal{R}, i = r+1, \dots, n.$$

Parinkę nežinomųjų $x_{r+1},\ \dots, x_n$ vietoje skaičius $t_i,\ i = r+1, \dots, n$, gauname sistemos atskirąjį sprendinį. Taigi, šiuo atveju t. l. sistema turi begalo daug sprendinių.

Homogeninės sistemos atskirąjį sprendinį galime traktuoti, kaip erdvės $\mathcal{R}^n$ elementą. Sudarykime $n - r$ atskirų šios sistemos sprendinių, laisvuosius nežinomuosius pasirinkdami tokiu būdu:

$x^1_{r+1} = 1,\ x^1_{r+2} = 0 \dots x^1_n = 0,$
$x^2_{r+1} = 0,\ x^2_{r+2} = 1 \dots x^2_n = 0,$
$x^3_{r+1} = 0,\ x^3_{r+2} = 0,\ x^3_{r+3} = 1, \dots x^3_n = 0,$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$x^n_{r+1} = 0,\ x^n_{r+2} = 0,\ x^n_{r+3} = 1, \dots x^3_n = 1.$

Gausime tokius atskiruosius sprendinius:

$$\big(x^1_1(1, 0, \dots, 0), x^1_2(1, 0, \dots, 0), x^1_3(1, 0, \dots, 0), \dots, x^1_r(1, 0, \dots, 0), 1, 0, \dots, 0\big)$$

$$\big(x^2_1(0, 1, \dots, 0), x^2_2(0, 1, \dots, 0), x^2_3(0, 1, \dots, 0), \dots, x^2_r(0, 1, \dots, 0), 0, 1, \dots, 0\big)$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$\big(x^{n-r}_1(1, 0, \dots, 0), x^{n-r}_2(0, 0, \dots, 1), x^{n-r}_3(0, 0, \dots, 1), \dots, x^{n-r}_r(0, 0, \dots, 1), 0, 0, \dots, 1\big).$$

Pasirodo, kad šie vektoriai sudaro homogeninės t.l. sistemos sprendinių generuoto poerdvio V bazę. Taigi, kiekvieną šios sistemos sprendinį galima išreikšti šių sprendinių tiesiniu dariniu.

Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad šis vektorių rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas.

Pavyzdys Raskime tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & |0 & l_1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & |0 & l_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & |0 & l_3 \end{pmatrix}$$

sprendinių generuoto poerdvio dimensiją, ir bazę.

Atlikę eilučių veiksmus $l_1 + l_2 = l'_2$ ir $l_1 - l_3 = l'_3$ gauname sistemą ekvivalenčią pradinei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & |0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & |0 & l'_2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & |0 & l'_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & |0 & l_1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & |0 & l''_2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & |0 & l''_3 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad trapecinė sistema yra 3×5 eilės, vadinasi sistemos generuoto poerdvio dimensija yra $l = 5 - 3 = 2$. Vadinasi spendinio poerdvyje yra du baziniai vekoriai. Bendrąjį sprendinį randame išsprendę sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |-1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & |-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & |2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi $(-1-2x_4,\ 1-x_4-x_5,\ -2x_4,\ x_4,\ x_5),\ \ x_4, x_5 \in \mathcal{R}$.
Tada sprendinių generuotą poerdvį galime užrašyti taip:

$$S = \{s(x,y)|\ s(x,y) = (-1-2x, 1-x-y, -2x, x, y),\ x, y \in \mathcal{R}\}.$$

Baziniai šio poerdvio vektoriai yra pavyzdžiui tokie

$$\beta_1 = (-3, 0, -2, 1, 0),\ \ \beta_2 = (-1, 0, 0, 0, 1).$$

Temos teoriniai klausimai

1. Vektoriai. Vektorių veiksmai
2. Vektorių tiesinė priklausomybė
3. Teoremos apie vektorių priklausomumą
4. Erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė. Teoremos apie rinkinius sudarančius erdvės bazę
5. Vektorių rinkinio rangas
6. Vektorių rinkinio elementarieji pertvarkiai
7. Vektorių ir tiesinių lygčių sistemų ryšys
8. Tiesinių lygčių sistemų suderinamumo sąlygos
9. Vektorinės erdvės poerdviai

a) Vektorių rinkinių generuoti poerdviai (tiesiniai apvalkalai)
b) Homogeninių tiesinių lygčių sistemų sprendinių generuoti poerdviai.

10. Kronekerio-Kapelio teorema.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Raskite vektorių $3\alpha - 5\beta$, kai

$$\alpha = (1, 2, 0, 4, 5),\ \beta = (2, 1, -1, 4, 1);$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Raskite vektorių γ, jeigu $6\alpha - \gamma = 3\beta$ ir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3. Nustatykite ar vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas:

3.1) $$\alpha_1 = (2, 2, 1),\ \alpha_2 = (4, 3, 2),\ \alpha_3 = (10, 9, 5);$$

Ats: Priklausomas

3.2) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ats: Nepriklausomas

3.3) $$\alpha_1=(3,4,2),\ \alpha_2=(2,1,1),\ \alpha_3=(4,1,1)\alpha_4=(1,1,2).$$

Ats: Priklausomas

3.4) $$\beta_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}2\\4\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Ats: Nepriklausomas

4. Nustatykite ar vektorių rinkiniai:

4.1) $$\alpha_1=(2,1,3),\ \alpha_2=(2,-1,-4),\ \alpha_3=(1,-3,2);$$

4.2) $$\alpha_1=(3,2,1,4),\ \alpha_2=(2,-1,-2,0),\ \alpha_3=(1,0,0,0),\ \alpha_4=(-2,3,0,0);$$

4.3) $$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}4\\10\\7\end{pmatrix}$$

yra bazės atitinkamose erdvėse.

Ats: 4.1) ir 4.2) yra bazės, 4.3)- ne.

5. Nustatykite, ar vektorių rinkinys:

$$\alpha_1=(2,4,-6,3),\ \alpha_2=(3,2,4,2),\ \alpha_3=(2,3,2,-4),\ \alpha_4=(-3,-2,3,2)$$

yra erdvės $\mathcal{R}^4$ bazė. Jei taip, raskite vektoriaus $\alpha=(-3,4,7,1)$ koordinates šioje bazėje.

Ats: Bazę sudaro. Vektoriaus α koordinatės bazėje yra $(1,0,2,3)$.

6. Nustatykite ar vektorių rinkinys sudaro erdvės bazę. Jei taip, raskite vektoriaus $\alpha=(0,1,2,3)$ koordinates bazėje:

$$\alpha_1=(2,3,1,2);\ \alpha_2=(0,-2,3,1);\ \alpha_3=(1,1,1,1);\ \alpha_4=(2,2,0,2).$$

Ats: Vektoriaus α koordinatės bazėje yra $(7;3;-14;0)$.

7. Nustatykite ar vektorių rinkinys

$$\alpha_1=(1,2,0,-4,0);\ \alpha_2=(1,-1,-3,1,-3);\ \alpha_3=(2,-3,-4,-5,-2);$$

$$\alpha_4=(1,-9,1,6,2);\ \alpha_5=(3,7,-8,-14,-7)$$

sudaro erdvės bazę. Jei ne, raskite šio rinkinio tiesinio apvalkalo (generuoto poerdvio) bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai

$$\alpha=(3,-6,-4,7,5)\text{ ir }\beta=(0,8,-4,-5,-5)$$

priklauso šiam poerdviui. Jei taip raskite šių vektorių koordinates kokioje nors poerdvio bazėje.

Ats: Bazės nesudaro. Vektorius α nepriklauso poerdviui, o vektorius $\beta-$ priklauso: $\beta=1\alpha_5+(-1)\alpha_2+(-1)\alpha_1$ (viena iš galimybių)

8. Raskite pateiktųjų vektorių rinkinių rangus:

8.1) $\alpha_1 = (1,4),\ \alpha_2 = (2,8),\ \alpha_3 = (-3,-12),\ \alpha_4 = (5,20);$

8.2) $\alpha_1 = (4,1,2),\ \alpha_2 = (2,3,4),\ \alpha_3 = (-2,2,2),\ \alpha_4 = (10,0,2);$

8.3)
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Ats: a) rangas lygus 1; b) rangas lygus 2; a) rangas lygus 3.

9. Nustatykite, su kokiomis parametro reikšmėmis vektoriai $\alpha_a = (-1, a, 3, 2)$, $\beta_b = (b, 2, b-2, 1)$ priklauso vektorių rinkinio

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

generuotam poerdviui.

Ats: $a = 8;\ \ b = 7.$

10. Raskite homogeninių tls-os sprendinių generuoto poerdvio bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai $\alpha = (0, -2, -2, -2, 2)$ bei $(0, 2, 2, 3, 2, -2)$ priklauso šiam poerdviui. Jei taip, raskite vektoriaus koordinates poerdvio bazėje.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Ats: Vektorius α priklauso poerdviui, o $\beta-$ nepriklauso. Poerdvio dimensija lygi 1, o bazinis vektorius gali būti toks $e_1^* = (0, -1, -1, -1, 1)$. Tada $\alpha = 2e_1^*$.

11. Raskite homogeninių tls-os sprendinių generuoto poerdvio bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai $\alpha = (4, 6, -2, -2)$ bei $(2, 3, 2, -2)$ priklauso šiam poerdviui. Jei taip, raskite vektoriaus koordinates poerdvio bazėje.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Ats: Vektorius α priklauso poerdviui, o $\beta-$ nepriklauso. Poerdvio dimensija lygi 1, o bazinis vektorius gali būti toks $e_1^* = (-2, -3, 1, 1)$. Tada $\alpha = -2e_1^*$.

12. Nustatykite pateiktų matricų rangus:

$$12.1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 6 & -2 & 17 & 18 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad 12.2)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 10 & -4 & 9 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ats: 12.1) $rangA = 2;$ 12.2) $rangB = 3.$

Užduotys namų darbams

Vektorinės erdvės

1. Raskite $3\alpha - 5\beta$, kai

$$\alpha = (2, 2, 1, 4, 5), \ \beta = (1, 1, -1, 4, 1);$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Raskite vektorių γ, jeigu $4\alpha + 3\gamma = 3\beta$ ir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Nustatykite ar duotieji vektorių rinkiniai tiesiškai priklausomi:

a) $$\alpha_1 = (1, 2, 1), \ \alpha_2 = (5, 3, 2), \ \alpha_3 = (3, 7, 5);$$

b) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Be to patikrinkite ar gali vektorius

$$\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

būti aukščiau pateiktų rinkinių tiesinis darinys. Atsakymą argumentuokite.

4. Nustatykite ar vektorių rinkiniai:

a) $$\alpha_1 = (4, 1, 3), \ \alpha_2 = (2, 1, -4), \ \alpha_3 = (1, -5, 2);$$

b) $$\alpha_1 = (3, 2, 1, 4), \ \alpha_2 = (2, -1, -2, 0), \ \alpha_3 = (1, 5, 1, 4), \ \alpha_4 = (-2, 3, 0, 0).$$

yra bazės atitinkamose (kokiose) erdvėse. Jei taip raskite vektorių $\alpha = (4, 7, 9)$ ir $\beta = (4, 6, 8, 2)$ koordinates atitinkamose bazėje (jei tai galima).

5. Nustatykite, ar vektorių rinkinys:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

yra erdvės $(\mathcal{R}^*)^4$ bazė. Jei taip, raskite vektoriaus α koordinates šioje bazėje.

6. Nustatykite ar vektorių rinkinys sudaro erdvės bazę. Jei ne papildykite šį rinkinį iki erdvės bazės, o po to pagrįskite, kad tai bazė:

$$\alpha_1 = (-2, 0, 1, 2);\ \alpha_2 = (0, -2, 3, 1).$$

7. Raskite pateiktųjų vektorių rinkinių rangus:

a) $$\alpha_1 = (2, 4),\ \alpha_2 = (2, 4),\ \alpha_3 = (-3, -12),\ \alpha_4 = (5, 2);$$

b) $$\alpha_1 = (0, 1, 2),\ \alpha_2 = (12, 3, 4),\ \alpha_3 = (-2, 2, 2),\ \alpha_4 = (10, 10, 2);$$

c) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -14 \\ -19 \end{pmatrix}\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

8. Raskite pateiktų matricų rangus:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & -9 & 5 & 4 \\ 2 & -12 & -10 & -5 & 4 \\ 10 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & -8 & -10 & 0 & 4 \\ 2 & -12 & -10 & -5 & 4 \\ 10 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Nustatykite ar vektorių rinkinys

$$\alpha_1 = (1, 2, 1, 4, -2);\quad \alpha_2 = (1, -1, -3, 1, -3);\quad \alpha_3 = (1, 3, -4, -5, -2);$$

$$\alpha_4 = (2, 2, -5, -5, -3);\quad \alpha_5 = (3, 7, -8, -4, -7)$$

sudaro erdvės bazę. Jei ne, raskite šio rinkinio tiesinio apvalkalo generuoto poerdvio bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai $\alpha = (1, -2, 4, 10, -3)$, $\beta = (0, 8, -4, -5, -5)$ ir $3\alpha + 4(2, 4, -4, 1, 5)$ priklauso šiam poerdviui. Jei taip raskite šių vektorių koordinates kokioje nors poerdvio bazėje.

10. Nustatykite ar egzistuoja parametro reikšmės, su kuriomis vektoriai $\alpha_a = (5+a, a, 3, a)$, $\beta_b = (b, 3, b+2, 2)$ priklauso vektorių rinkinio

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

generuotam poerdviui.

11. Nustatykite, kaip nuo parametro reikšmės priklauso vektorių rinkinio rangas:

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix},\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

generuotam poerdviui.

12. Raskite homogeninių tls-mų sprendinių generuotų poerdvių bazes bei dimensijas. Nustatykite ar vektoriai $\alpha = (0, -4, -4, -4, 4)$ bei $\beta = (0, 4, 4, 6, 4, -4)$ priklauso šiam poerdviui.

Jei taip, raskite vektoriaus koordinates poerdvio bazėje.

$$a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 0. \end{cases} ; \quad b)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$