

Mokinių matematikos olimpiados  
rajono etapo uždutys 11 - 12 klasei  
2011 m.

1. Natūralieji skaičiai  $m$  ir  $n$  tenkina lygybę  $(m - n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$ . Įrodykite, kad  $m + n$  yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

(5 taškai)

2. Vienas iš penkių mamos sūnų nupirko jai gėlių. Mamos klausiami, kuris tai padarė, sūnūs iš eilės atsakė štai ką:

Adomas: Gėles nupirko Domas arba Tomas.

Domas: Nei aš, nei Rimas gėlių nepirkome.

Tomas: Adomas ir Domas abu ką tik sumelavo.

Romas: Ne, sumelavo lygiai vienas iš jų.

Rimas: Romai, tu pats ką tik sumelavai.

O jų sesuo Rima pasidžiaugė, kad daugiau nei pusė jos brolių pasakė tiesą. Žinodami, kad Rima niekada nemeluoja, nustatykite, kas nupirko mamai gėlių.

(5 taškai)

3. Dviejų natūraliųjų skaičių sandauga yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

a) Įrodykite, kad tų dviejų skaičių skirtumas negali būti lygus 2.

b) Kokie gali būti tie du skaičiai, jei skirtumas tarp jų lygus 3? Raskite visus variantus.

(5 taškai)

4. Trikampio  $ABC$  kraštinėse  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  atitinkamai pažymėti taškai  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  (nesutampantys su tų kraštinių galais). Atkarpos  $AB$  ir  $A_1B_1$  lygiagrečios; lygiai taip pat  $BC \parallel B_1C_1$  bei  $CA \parallel C_1A_1$ . Įrodykite, kad  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  yra trikampio  $ABC$  kraštinių vidurio taškai.

(5 taškai)

5. Karlsonas Mažylio gimtadienį šventė dvi dienas ir Mažylis jį vaišino uogiene bei tortu. Antrąją dieną Mažylis davė Karlsonui daugiau uogienės ir mažiau torto nei pirmąją, bet Karlsono per dieną suvalgyto maisto svoris nepakito. Karlsonas su apmaudu nustatė, kad jei antrąją dieną Mažylis uogienės kiekį (kilogramais) būtų padidinęs tiek nuošimčių, keliais jis sumažino torto kiekį, o torto kiekį sumažinęs tiek nuošimčių, keliais padidino uogienės kiekį, tai bendras Karlsono suvalgyto maisto svoris būtų padidėjęs 50%. Dar daugiau, jei antrąją dieną Mažylis būtų uogienės kiekį padidinęs tiek kartų, kiek jis sumažino torto kiekį, o torto kiekį sumažinęs tiek kartų, kiek jis padidino uogienės kiekį, tai bendras maisto svoris būtų padidėjęs net 220%. Keliais nuošimčiais antrąją dieną Mažylis realiai padidino uogienės kiekį palyginti su pirmąja diena?

(5 taškai)